

## 2次元位相的場の量子論と量子スペクトル曲線へのご招待

オリヴィア・ドゥーミトレスク (OLIVIA DUMITRESCU) AND 村瀬元彦 (MOTOHICO MULASE)

ABSTRACT. 本稿第1部では、2次元位相的場の量子論をリボングラフの圏からモノイド圏上の自己関手圏へのモノイド関手として捉えるという定式化を与える。ポイントはリボングラフ圏がこの関手を通して全てのフロベニウス対象を決定するという事実にある。予備知識として必要なフロベニウス代数や、位相的場の量子論・コホモロジー的場の理論からの基礎的な事項には丁寧な解説を与える。フロベニウス代数係数の位相的漸化式についての一結果を与えて第1部を終える。

第2部では量子曲線の幾何理論を解説する。議論の焦点は、量子化のプロセスがヒッチンのスペクトル曲線の変形族からオパーの族への移行であると理解する点にある。簡潔な説明を与えるために、種数2以上のコンパクトリーマン面  $C$  上のヒッグズ束と  $SL_2(\mathbb{C})$  オパーの場合に限定して話を進める。この場合、量子曲線もオパーも全て古典的な概念である  $C$  上の射影構造と全く同じものであることが分かる。ここでも、射影座標系やヒッグズ束、オパー、非アーベル的ホッジ対応などの予備知識として必要な事項には簡単な解説を与える。最近得られたオパーの構成に関するガイオットの一予想の解決を紹介して本稿を終える。

### CONTENTS

0. 序章：古代の息吹き	1
<b>Part 1. 位相的場の量子論</b>	<b>6</b>
1. フロベニウス代数	6
2. 位相的場の量子論	9
3. グロモフーウィッテン理論のシルエット	12
4. コホモロジー的場の理論	17
5. セルグラフの圏	22
6. セルグラフから 2D TQFT へ	27
7. TQFT-係数の位相的漸化式	29
<b>Part 2. ヒッグズ束の量子化</b>	<b>34</b>
8. 量子曲線	34
9. 射影構造・オパー・ヒッグズ束	37
10. $SL_2(\mathbb{C})$ オパーの準古典 (WKB) 近似	47
11. 異なるヒッチンモジュライ空間の間の非アーベル的ホッジ対応	49
References	51

### 0. 序章：古代の息吹き

紀元前4世紀から前1世紀ごろのものとして推定される粘土板に、時間-運動量空間の幾何を用いて木星の軌道が近似的に計算されていたのではないかと示唆する論文が最近出版されました [93]。この興味深い論文には新バビロニア時代の積分計算を示すとされる楔形文字が刻まれた粘土板の写真が掲載されています。

木星の軌道は時間-座標空間内のグラフです。運動量を時間-運動量空間でのグラフとして表すことによって、バビロニア人は運動量の積分をグラフと時間軸との間の面積として可視化することに成功しました。その面積を台形近似で求めることによって、運動量の

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 14H15, 14N35, 81T45; Secondary: 14F10, 14J26, 33C05, 33C10, 33C15, 34M60, 53D37.

*Key words and phrases*. 位相的場の量子論; 量子曲線; オパー; ヒッチンモジュライ空間; ヒッグズ束; ヒッチン切断; 量子化; 位相的漸化式.

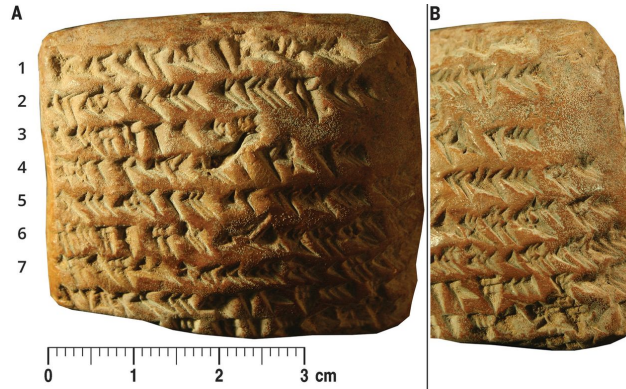


FIGURE 0.1. 時間-運動量空間での積分を示す楔形文字の刻まれた粘土板 [93]。

積分、すなわち座標空間での位置を、かなり正確に計算することができたのです。これはまさにニュートンによる微分積分論の基本定理の原型がすでに知られていたことを意味します。木星の天空における軌道の解析と、時間-運動量空間の幾何とを関係させるというこの新バビロニア時代のアイディアにはハッとさせられます。そこではすでに座標空間と運動量空間とが同等に扱われており、まさにシンプレクティック幾何学の原点がそこにあつたのではないかと思わされるからです。

ここ半世紀の間に発見された、数学的数値や代数的公式を示唆する楔形文字が記された多くの粘土板は私たちの想像をかき立ててくれます。その中で最も有名なものは、およそ紀元前1800年頃（古代バビロニア時代）に作られたとみられるプリムトン322です。そこには15のピタゴラス数が、直角三角形の斜辺の角度が45度から60度に増えていく順に並べて記されています。



FIGURE 0.2. プリムトン322 [96]

古代バビロニア人は平方根の計算アルゴリズムを知っていました。 $\sqrt{2}$ の60進数展開近似を記した楔形文字粘土板が見つかっています。プリムトン322の実用的用途やピタゴラス数を計算するアルゴリズムを知っていたか、などいろいろ議論はあるようですが[96]、私たちのイマジネーションは粘土板の作者が感じたであろう驚きに向けられます。2番目と3番目の列に記された数の組  $(y, z)$  について  $z^2 - y^2$  を計算すると、常に完全平方が得られます。したがって、この数に対して平方根の計算アルゴリズムを当てはめると、計算は有限回で終わり、厳密な値が得られます。こうして無限が続く森の中で有限性の花に出会う。複雑な函数が現れると思われる所で多項式に遭遇する時に私たちは同じ感動を覚えます。有限性に美しさを見出す感性は数学をする私たちの心の中に今も宿っているのです。

図0.1の粘土板にはなんの絵も描かれていません。[93]の著者は、なんの意味もないように見える数字の羅列の中に、惑星運動の深い幾何学的探求が秘められているのだと説得力を持って訴えかけます。この発見にも私たちのイマジネーションがそそられます。代数、幾何、天文学の織りなすタペストリー、そして運動量座標と位置座標とを同等に扱う素晴

らしい視点。この粘土板に数値を書き込みながら、作者は何を考え、何を感じていたのでしょうか？それは私たちを取り巻く天界の現象が、数学によってピタリと記述できるのだ、という「発見の鋭い喜び」ではなかったでしょうか？今私たちは、岡潔の言葉を思い出します。「発見には必ず発見の鋭い喜びが伴う。この『発見の鋭い喜び』という言葉は物理の寺田寅彦先生の言葉です（岡潔講義録15）。」

粘土板に絵がないこともさることながら、新バビロニア時代の計算値の正確さには驚愕させられます。これは、ほぼ同じ頃に完成したユークリッドの原論と好対照をなします。原論には、私たちがよく知っている美しい幾何学図形のみならず、数々の驚くべき証明が描かれています。その中で、公理的方法論が確立されたのでした。ここに、様々な方法を用いて未知の量を高度の正確さで計算できる技術と、その公式を有限性の原理に基づいて証明するという行為の二項対立が、すでに見られます。この二項対立こそが、本稿の著者二人の共同研究の出発点、動機だったのでした。私たちの研究分野の中で、理論物理学者たちの研究から鋭い公式が発見されてきました。そのいくつかには著者たちによって証明が与えられました。それでも今なお、私たちは全てを理解しているわけではないのです。

本講義録の第1部ではセルグラフによる2次元場の量子論の新しい定式化を与えます。タイプ  $(g, n)$  のセルグラフとは、種数  $g \geq 0$  の向きづけられた境界のないコンパクト位相曲面の単体分割の1-切片 (1-スケルトン) のことをさします。ここで、 $n$  は順序付けられた0次元単体の数を表します。0次元単体はセルグラフの頂点を与えます。この概念には他にもいろいろな呼び名があります。例えば、リボングラフ、デッサン・ダンファン、地図、埋め込まれたグラフ、曲面グラフ、等々。私たちがセルグラフという呼び名を使うのは、曲面の静的性質ではなく、動的性格、特に複素構造の変形と退化とに現れる性格を表したいからなのです。グラフというのは1次元の対象ですが、セルグラフでは曲面の単体分割に現れる2次元単体として、「面」の概念が生きています。

単体分割の1次元単体を辺と呼びます。少しぎこちない言い方ですが、half-edge の訳語として、「半辺」を使うことにします。これは、各辺の中点で辺を2等分したものです。各頂点に繋がっている半辺の数が、その頂点の次数です。著者たちの前のレクチャーノート [33] で説明されているように、次数  $2m$  の頂点の一つだけを持ったタイプ  $(0, 1)$  のセルグラフの数は  $\frac{1}{2m} C_m$  で与えられます。ここで、

$$C_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$$

は  $m$  次カタラン数です。カタラン数の母関数

$$z = z(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{1}{x^{2m+1}}$$

は代数方程式

$$(0.1) \quad x = z + \frac{1}{z}$$

を充します。前のレクチャーノート [33, Section 2] で展開されたストーリーは、任意のタイプ  $(g, n)$  のセルグラフの数え上げ問題が代数曲線 (0.1) の量子化によって解決される、というものでした。量子化の鍵を与える公式は、[33, Catalan Recursion, Section 2.1] で得られた組み合わせ論的方程式のラプラス変換に由来します。そして、この組み合わせ論的方程式はセルグラフの辺縮約変換が数え上げにどう影響するかを解析することで得られたのでした。

本稿で展開したい新しいストーリーは、セルグラフのなす圏が全ての2次元位相的場の量子論の情報を含んでいる、という話です。そのために、2D TQFT を公理的方法でセルグラフの圏からのある函手として与えます。基本となるアイディアは簡単なもので、上述したのと全く同じ辺縮約変換がフロベニウス代数を特徴づけている、ということに尽きます。2頂点を結ぶ辺を縮めると、2点が衝突して1点になります。これは積を表します。もし辺がループなら、それはセルグラフが描かれた曲面のサイクルなので、それを縮めることは繋がれた頂点を二つの新しい頂点に分裂する操作になります。こうして余積を表す

ことができます。グラフが曲面上に描かれているので、積と余積との間に関係が生じ、それがフロベニウス構造を定めるのです。

本稿では、まずフロベニウス代数の定義から始め、続く節で位相的場の量子論 (TQFT) とコホモロジー的場の理論 (CohFT) を解説します。セルグラフの圏を導入した後、それが全てのフロベニウス代数を生成することを説明します。セルグラフと 2D TQFT との直接の関連も明らかにされます。

上述した組み合わせ論的方程式のラプラス変換は位相的漸化式 [42, 76, 77] の名で呼ばれるもので、本稿のライトモチーフを為します。本稿の主役である量子化の過程を位相的漸化式の観点から見ることもできます。著者たちのものも入れて [9, 33, 40] すでに多くの解説記事が位相的漸化式の話について書かれているので、本稿では軽く触れるだけにとどめますが、第 1 部の最後で 2D TQFT 係数の位相的漸化式に関する新しい結果を紹介します。

新バビロニアの政治体制は紀元前 539 年にペルシャのキュロス大王によって滅ぼされました。同じペルシャの地に 25 世紀後に生まれる天才マリアム・ミルザハニ (1977–2017) の名前を著者の一人 (MM) が初めて耳にしたのは、2004 年 5 月のことでした。夜遅くフランスから到着したマキシム・コンツェヴィッチを空港まで迎えに行き、デニスへ帰る途中で寄ったサンフランシスコで寿司をつまみながら彼は熱っぽくミルザハニの仕事 [76, 77] を語り聞かせてくれました。その興奮した語り口は彼女の仕事が彼に与えたインパクトを如実に物語っていました。その 3 ヶ月後、著者はリスボンで開かれた研究会でミルザハニの定理を紹介し、[83] で結実する可積分系との関連を述べました。一番前のかぶり付きで熱心に聞いていたのは物理学者のマルコス・マリニョです。マリニョはフルヴィッツ数の母関数がミルザハニの発見した境界付き双極曲面のモジュライのヴェイユピーターソン体積の充す漸化式のラプラス変換と全く同じ関係式を充すことを後に共同研究者と共に予想し [13]、その解決の鍵の一つとして [83] を挙げました。挑戦を受けたように感じた著者は 2 年をかけてその予想を解決しました [41, 86]。そこで確立されたフルヴィッツ数の新しい漸化式の応用の一例として、ヴィラソロ関係式を与えるウィッテン予想 [101] の証明が純粋に代数幾何の範囲内でたった半ページで与えられること、同時に  $\lambda_g$ -予想 [43] がやはり半ページで証明できることを示しました [86]。二つの大定理が瞬く間に証明できたのは、[86] でフルヴィッツ数のラプラス変換が多項式になることを発見したことによります。

ミルザハニの扱ったヴェイユピーターソン体積 [76, 77] も自然に双極曲面の境界の長さの多項式で与えられます。これはものすごい驚きでした。この多項式性を用いて、彼女はウィッテン予想のヴィラソロ版を初めて純粋に幾何学的手法で証明したのでした。全く直接の関連のないヴェイユピーターソン体積とフルヴィッツ数とが同じ多項式性を持つのは、点付き安定代数曲線のモジュライ空間のコホモロジー類の交叉理論が背景にあるからなのです。ミルザハニによるヴェイユピーターソン体積も、カタラン数も、フルヴィッツ数も、ラプラス変換をすると全く同じ形の漸化式、すなわち位相的漸化式を充します。位相的漸化式がこれらの隠れた関連を示唆している。ここで、ラプラス変換はミラー写像に対応し、位相的漸化式が一般種数の B モデルを与える、というのがマリニョに由来する私たちの理解です [11, 12, 44]。ところで、後者二つについてはその量子曲線が知られています [84, 85, 104] が、ミルザハニ理論に対応する量子曲線は未だに分かっていません。

[42] の著者の一人オランタンの学位審査員でもあったコンツェヴィッチは、位相的漸化式の発展の中で早くからそのシンプレクティック構造に注目していました。新バビロニアを下ること 2500 年、21 世紀の幾何であるシンプレクティック幾何がここで再び登場します。境界のない向きづけられた多様体  $X$  のコホモロジー環はフロベニウス代数の一例です。もし多様体が偶数次元で、偶数次のコホモロジー

$$(0.2) \quad A = H^{\text{even}}(X, \mathbb{Q})$$

だけを考えるなら、可換なフロベニウス代数が得られます。それは 2D TQFT と等価です。今  $X$  をシンプレクティック多様体としましょう。その種数 0 のグロモフ-ウィッテン不変量は、シンプレクティック構造を本質的に使うことによって大量子コホモロジー環と呼ばれる  $A$  の量子変形を決めます。さらに、この量子構造は  $X$  のミラーである複素解析空間  $Y$  を定義します。  $Y$  の複素幾何が  $X$  の量子コホモロジーを捉えているわけです。とこ

ろで、グロモフ-ウィッテン不変量は任意の種数で定義することができるので、次の疑問がわきます。

**問い 0.1.** 複素解析空間  $Y$  の上のどんな構造がシンプレクティック多様体  $X$  の種数 1 以上のグロモフ-ウィッテン不変量に対応するのでしょうか？

もし  $X$  のグロモフ-ウィッテン不変量を種数 0 から高種数へと移行させることを量子化と捉えるなら、 $Y$  の上では複素幾何の量子化を考えることになります。その候補となるのが  $D$  加群の理論です。この設定でピタリとくる概念のなかで一番簡単なのが量子曲線と呼ばれるものです。量子曲線と B モデル幾何との関連は [2, 22, 20, 30, 31, 33, 54, 55] など考察されました。量子曲線のアイデアがうまくいくのは、 $X$  の種数 0 のグロモフ-ウィッテン理論に対応する複素解析空間  $Y$  の情報が、代数的あるいは解析的曲線で捉えられる場合です。この曲線は、他の数学の分野、例えば可積分系の理論やランダム行列の理論、ヒッグズ束のモジュライ上のヒッチン系の理論などでは、スペクトル曲線とよばれるものに他なりません。スペクトル曲線は底曲線と呼ばれる別の曲線への射影写像を伴って現れます。つまり底曲線の被覆曲線になっているわけです。量子曲線は、シンプレクティック曲面のラグランジアン部分多様体であるスペクトル曲線を量子化して得られる、底曲線上の  $D$  加群なのです。

フロベニウス代数  $A = H^{even}(X, \mathbb{Q})$  上の CohFT は  $X$  のグロモフ-ウィッテン理論と似た役割を果たすので、CohFT は 2D TQFT を量子化していると考えられます。このプロセスは量子化の二つの段階を経て完成します。一つ目は古典的コホモロジー環  $A$  から量子コホモロジー環への移行で、ミラー対応を与えます。もしミラーの複素幾何が曲線で与えられるなら、量子化の第二段階はスペクトル曲線から量子曲線への量子化と平行なものになっているはずで、CohFT を、安定曲線のモジュライの 0 次コホモロジー群  $H^0(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbb{Q})$  へ制限して得られる 2D TQFT から位相的漸化式を使って回復するという [39] の定理も、量子曲線構成のアナロジーで理解することができるだろうと考えられます。

本稿第 2 部では量子曲線を扱います。著者たちは既に量子曲線と位相的漸化式との関連を解説したレクチャーノート [33] を出版したので、本稿ではヒッチンのスペクトル曲線の量子化の過程をオパーの立場から見た幾何として捉える視点に絞って解説することにしました。私たちの研究論文 [28, 29, 34] で展開された一般論ではなく、ここでは群を  $SL_2(\mathbb{C})$  に限って理論のアイデアを説明します。この場合には、ガニング [56] による種数 2 以上のコンパクトリーマン面上の射影構造が、 $SL_2(\mathbb{C})$  オパーやヒッチンスペクトル曲線に対応する量子曲線概念と実は全く同じものになっていることを解説しようと思います。非アーベル的ホッジ対応とオパーの構成とを結ぶ物理学者ガイオットのある予想 [47] と、私たちの共同研究で得られたその解決 [29] とを紹介して、本稿を締め括ります。

**謝辞.** 本稿は著者の一人が 2016 年度岡シンポジウムで行った講演を敷衍し拡大したものです。同シンポジウムの組織委員の皆様、特に松澤淳一教授に感謝いたします。著者たちはまた、本稿の英語版の出版を勧めてくださった畏友ピオトル・スウコフスキー教授に深く感謝の意を表します。

本稿で解説した著者たちの共同研究は数々の研究機関に滞在していた時に進められたものです。ここで機関名を列挙して、支給された研究助成と素晴らしい研究環境を与えられたことに対して謝意を表したいと思います。The American Institute of Mathematics in California, the Banff International Research Station, Institutul de Matematică “Simion Stoilow” al Academiei Române, Institut Henri Poincaré, Institute for Mathematical Sciences at the National University of Singapore, 神戸大学, Leibniz Universität Hannover, Lorentz Center Leiden, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Max-Planck-Institut für Mathematik-Bonn, 大阪市立大学数学研究所。

上記の共同研究の補助以外に、O.D. は GRK 1463 *Analysis, Geometry, and String Theory* (Leibniz Universität Hannover) と Perimeter Institute for Theoretical Physics、および MPIM-Bonn から研究助成を受けました。M.M. は IHÉS, MPIM-Bonn, Simons Foundation, Hong Kong University of Science and Technology, Université Pierre et Marie Curie, NSF grants DMS-1104734, DMS-1309298, DMS-1619760, DMS-1642515, NSF-RNMS: Geometric Structures And Representation Varieties (GEAR Network, DMS-1107452, 1107263, 1107367) から研究助成を受けました。

## Part 1. 位相的場の量子論

### 1. フロベニウス代数

標数0の体  $K$  を一つ固定します。本稿では  $K = \mathbb{Q}$  か  $K = \mathbb{C}$  の場合をおもに考察します。 $K$  上定義された有限次元の、単位元を持った結合的代数  $A$  を考えましょう。 $A$  が双代数の場合には余積を含む幾つかの構造が追加されます。有限群  $G$  の群環  $A = K[G]$  は双代数の一例です。群環  $K[G]$  の代数構造は群  $G$  の積から自然に決まりますが、余大数としては二つの相異なる構造が存在します。一つはフロベニウス代数の構造で、もう一つはホップ代数の構造です。その違いは、どの次元の位相不変量を考察しているかを反映しています。2次元トポロジーを扱うならフロベニウス代数が便利です。3次元ならホップ代数が自然です。

それではフロベニウス代数の定義から始めましょう。

**定義 1.1** (フロベニウス代数).  $K$  上有限次元で、単位的かつ結合的な代数  $A$  に跡と呼ばれる線型写像  $\epsilon: A \rightarrow K$  が存在して、 $\epsilon(ux) = 0$  または  $\epsilon(xu) = 0$  が全ての元  $x \in A$  について成り立つような元  $u \in A$  は  $u = 0$  に限る場合に、 $A$  をフロベニウス代数といいます。

**命題 1.2.**  $A_1$  と  $A_2$  がフロベニウス代数ならば、その直積  $A_1 \oplus A_2$  やテンソル積  $A_1 \otimes A_2$  はともにフロベニウス代数です。 $K$  上のフロベニウス代数の圏  $\mathcal{A}$  から作られた三つ組  $\mathcal{C} = (\mathcal{A}, \otimes, K)$  はモノイド圏になります。

**証明.**  $A_i, i = 1, 2$  の跡を  $\epsilon_i: A_i \rightarrow K$  で表すと、 $(A_1 \oplus A_2, \epsilon_1 + \epsilon_2)$  はフロベニウス代数になります。同様に、跡

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_2: A_1 \otimes A_2 \ni u_1 \otimes u_2 \mapsto \epsilon_1(u_1)\epsilon_2(u_2) \in K$$

は  $A_1 \otimes A_2$  にフロベニウス代数構造を与えます。  $\square$

**例 1.3.** 1次元ベクトル空間  $A = K$  に跡を  $\epsilon(u) = u$  で定めたものは可換単純フロベニウス代数です。また、 $A = K^{\oplus n}$  に跡を  $\epsilon(u_1, \dots, u_n) = u_1 + \dots + u_n \in K$  で与えると、可換半単純フロベニウス代数が得られます。

**例 1.4.**  $n \times n$  次全行列環  $A = \text{Mat}_n(K)$  に通常の行列の跡  $\epsilon(u) = \text{trace}(u)$  を入れたものは  $n \geq 2$  なら非可換単純フロベニウス代数になります。

**例 1.5.** 上述したように、有限群  $G$  の群環  $A = K[G]$  はフロベニウス代数です。その跡  $\epsilon: K[G] \rightarrow K$  は  $g \in G$  の函数

$$\epsilon(g) = \begin{cases} 1 & g = 1 \\ 0 & g \neq 1 \end{cases}$$

を群環上に線型拡張したものです。

**注意 1.6.** もし全ての  $g \in G$  に対して  $\epsilon(g) = 1$  と定義し、逆元を取る操作を線型に拡張して対合射を与えれば、群環はホップ代数の構造を持ちます。

**例 1.7.** 向きづけられた境界のない  $n$  次元コンパクト微分可能多様体のコホモロジー環  $H^*(M, \mathbb{R})$  に跡写像

$$\epsilon: H^*(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^n(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

を入れたものはフロベニウス代数です。

上記のコホモロジー環の例は、一般のフロベニウス代数にもポアンカレペアリングに当たるものがあるのだろうかという疑問を抱かせます。実際、跡  $\epsilon: A \rightarrow K$  を使って定義されるフロベニウス双線型形式

$$(1.1) \quad \eta: A \otimes A \rightarrow K, \quad \eta(u, v) = \epsilon(uv)$$

がその対応物になっています。それはフロベニウス結合律

$$(1.2) \quad \eta(uv, w) = \eta(u, vw), \quad u, v, w \in A$$

を満たします。定義 1.1 で要請される跡  $\epsilon$  の条件は、まさにフロベニウス形式が非退化であることを意味します。したがって、それは自然な同型

$$(1.3) \quad \lambda : A \xrightarrow{\sim} A^*, \quad \langle \lambda(u), v \rangle = \eta(u, v), \quad u, v \in A$$

を定めます。可換図式

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & A \otimes A \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \otimes \lambda \\ A^* & \xrightarrow{m^*} & A^* \otimes A^* \end{array}$$

によって、この同型は余積  $\delta : A \rightarrow A \otimes A$  を引き起こします。ここで、 $m^* : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$  は積写像  $m : A \otimes A \rightarrow A$  in  $A$  の双対です。私たちは積の可換性を仮定していないので、ペアリング

$$(A^* \otimes A^*) \otimes (A \otimes A) \rightarrow K$$

はテンソルの内側から計算されます。例えば、 $\alpha, \beta \in A^*$  と  $u, v \in A$  に対して、

$$(1.5) \quad \langle \alpha \otimes \beta, u \otimes v \rangle = \langle \alpha, \langle \beta, u \rangle v \rangle = \langle \beta, u \rangle \langle \alpha, v \rangle$$

と計算します。結合的な積の双対として、余積  $\delta$  は余結合律

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccc} & A \otimes A & \\ \delta \nearrow & & \searrow \delta \otimes 1 \\ A & & A \otimes A \otimes A \\ \delta \searrow & & \nearrow 1 \otimes \delta \\ & A \otimes A & \end{array}$$

を充します。同様に、単位元  $\mathbf{1} \in A$  の  $\lambda$  による双対は跡  $\epsilon \in A^*$  になります。つまり  $\lambda(\mathbf{1}) = \epsilon$  が成り立ちます。これは

$$\eta(\mathbf{1}, u) = \eta(u, \mathbf{1}) = \epsilon(u)$$

から分かります。こうして双代数を構成する全ての構造  $(A, \mathbf{1}, m, \epsilon, \delta)$  が決まりました。

**命題 1.8.** 双代数  $(A, \mathbf{1}, m, \epsilon, \delta)$  の代数構造と余代数構造の間に次の両立条件が成り立ちます。

$$(1.7) \quad \begin{array}{ccccc} & & A \otimes A \otimes A & & \\ & 1 \otimes \delta \nearrow & & \searrow m \otimes 1 & \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A & \xrightarrow{\delta} & A \otimes A \\ & \searrow \delta \otimes 1 & & \nearrow 1 \otimes m & \\ & & A \otimes A \otimes A & & \end{array}$$

**注意 1.9.** 逆に、フロベニウス代数を、両立条件 (1.7) を充し、非退化なフロベニウス形式 (1.2) を持つような双代数として定義することもできます。

**証明.**  $A$  の次元を  $r = \dim_K A$  だとし、その  $K$  基底  $\langle e_1, e_2, \dots, e_r \rangle$  を一つとります。双線型形式  $\eta$  は  $r \times r$  行列

$$(1.8) \quad \eta = [\eta_{ij}], \quad \eta^{-1} = [\eta^{ij}], \quad \eta_{ij} := \eta(e_i, e_j)$$

を定めます。元  $v \in A$  の基底展開は

$$(1.9) \quad v = \sum_{a,b} \eta(v, e_a) \eta^{ab} e_b = \sum_{a,b} \eta(e_a, v) \eta^{ba} e_b$$

で与えられます。

$$(1.10) \quad \delta(\mathbf{1}) = \sum_{a,b} \eta^{ab} e_a \otimes e_b$$

に注意して、(1.4) と (1.5) とから余積を

$$\begin{aligned} \delta(v) &= \sum_{i,j,a,b} \eta(v, e_i e_j) (\eta^{jb} e_b) \otimes (\eta^{ia} e_a) \\ &= \sum_{i,j,a,b} \eta(v e_i, e_j) (\eta^{jb} e_b) \otimes (\eta^{ia} e_a) \\ &= \sum_{i,a} (v e_i) \otimes (\eta^{ia} e_a) \\ &= (m \otimes \mathbf{1})(v \otimes \delta(\mathbf{1})) \end{aligned}$$

と計算することができます。従って、

$$\begin{aligned} (1 \otimes m) \circ (\delta \otimes \mathbf{1})(u \otimes v) &= (1 \otimes m) \left( \sum_{i,j,a,b} \eta(u, e_i e_j) (\eta^{jb} e_b) \otimes (\eta^{ia} e_a) \otimes v \right) \\ &= \sum_{i,j,a,b} \eta(u e_i, e_j) (\eta^{jb} e_b) \otimes (\eta^{ia} e_a v) \\ &= \sum_{i,j,a,b,c,d} \eta(u e_i, e_j) (\eta^{jb} e_b) \otimes \eta^{ia} \eta(e_a v, e_c) \eta^{cd} e_d \\ &= \sum_{i,a,c,d} u e_i \otimes \eta^{ia} \eta(e_a, v e_c) \eta^{cd} e_d \\ &= \sum_{c,d} (u v e_c) \otimes \eta^{cd} e_d \\ &= (m \otimes \mathbf{1})(u v \otimes \delta(\mathbf{1})) = \delta(uv) \end{aligned}$$

が得られます。同様に、

$$\begin{aligned} (m \otimes \mathbf{1}) \circ (\mathbf{1} \otimes \delta)(u \otimes v) &= (m \otimes \mathbf{1}) \left( u \otimes \sum_{i,j,a,b} \eta(v, e_i e_j) (\eta^{jb} e_b) \otimes (\eta^{ia} e_a) \right) \\ &= \sum_{i,j,a,b} u \eta(v e_i, e_j) (\eta^{jb} e_b) \otimes (\eta^{ia} e_a) \\ &= \sum_{i,a} u v e_i \otimes \eta^{ia} e_a \\ &= (m \otimes \mathbf{1})(u v \otimes \delta(\mathbf{1})) = \delta(uv) \end{aligned}$$

が従います。これで、命題 1.8 の証明ができました。 □

**注意 1.10.** 次節以降で使うので、ここで、もし  $A$  が可換なら、

$$(1.11) \quad \eta(e_{i_1} \cdots e_{i_j}, e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_n}) = \epsilon(e_{i_1} \cdots e_{i_n}), \quad 1 \leq j < n$$

は添字の置換について完全対称であることに注意しておきます。

**定義 1.11** (オイラー元). フロベニウス代数  $A$  の元

$$(1.12) \quad \mathbf{e} := m \circ \delta(\mathbf{1})$$

をオイラー元と呼びます。その基底展開は

$$(1.13) \quad \mathbf{e} = \sum_{a,b} \eta^{ab} e_a e_b$$



で与えられます。

オイラー元は2D TQFT の種数展開を定めます。つまり、TQFT の種数0の部分から、任意種数の相関関数を計算することを可能にするのです。

基底展開 (1.9) 別の応用として、積と余積とを関係させる式

$$(1.14) \quad (\lambda(u) \otimes 1) \delta(v) = uv$$

を挙げておきます。これは次のように計算されます。

$$\begin{aligned} (\lambda(u) \otimes 1) \delta(v) &= (\lambda(u) \otimes 1) \sum_{a,b} (v\eta^{ab} e_a) \otimes e_b \\ &= \sum_{a,b} \eta(u, v e_a) \eta^{ab} e_b \\ &= \sum_{a,b} \eta(uv, e_a) \eta^{ab} e_b = uv. \end{aligned}$$

## 2. 位相的場の量子論

この節では、TQFT の簡単なおさらいをします。この10年ほどの間に、一般次元、および次元をミックスした位相的場の量子論に数学上の爆発的な進展がありました。(例えば [15, 72] や、これらに触発された最近の文献を参照してください。) 本稿ではそれには触れず、2次元の特殊性に限って議論を展開したいと思います。特に、フロベニウス代数は今後は有限次元かつ可換なものに限ることにします。すでに [1, 19] で示されたように、2D TQFT はこのタイプのフロベニウス代数で分類されることが知られています。実は、以下でセルグラフの圏を展開する理由の一つは非可換なフロベニウス代数を考慮するためなのですが、その点については私たちの論文 [36] で考察する予定です。

共形場の理論と位相的場の量子論の公理的定式化は1980年代にアティヤー [4] とシーガル [97] によって発見されました。 $(d-1)$ 次元のTQFTは、 $(d-1)$ 次元の向きづけられた微分可能閉(すなわちコンパクトで境界のない)多様体のなすモノイド圏から、 $K$ 上の有限次元ベクトル空間のなすモノイド圏へのモノイド函手 $Z$ として定義されます。 $(d-1)$ 次元の微分可能多様体のなす圏のモノイド構造は多様体の直和で与えます。これは可換な作用です。空集合との直和が単位作用です。従って、ベクトル空間のモノイド圏の作用は対称テンソル積で与えて函手 $Z$ を定義します。体 $K$ がテンソル積の単位作用なので、函手は非自明条件

$$Z(\emptyset) = K$$

を充し、 $(d-1)$ 次元微分可能多様体の直和をベクトル空間の対象テンソル積に対応させます。 $d$ 次元の向きづけられた境界付きの多様体が定める境界の間のコボルディズムが $(d-1)$ 次元多様体の圏の射を与えます。函手 $Z$ はコボルディズムを線型写像に対応させます。

向きづけられた $(d-1)$ 次元閉微分可能多様体 $M$ の向きを変えたものを $M^{op}$ と書くことにします。函手 $Z$ には双対条件

$$Z(M^{op}) = Z(M)^*$$

を課します。ここで、 $Z(M)^*$ はベクトル空間 $Z(M)$ の双対空間を表します。 $N$ が $d$ 次元の向きづけられた境界付き微分可能多様体であるとは、境界 $\partial N$ が $(d-1)$ 次元閉微分可能多様体で、補集合 $N \setminus \partial N$ が $d$ 次元の向きづけられた開微分可能多様体になっていることを意味します。境界 $\partial N$ に $N$ から誘導された向きを与えるならば、TQFT 函手 $Z$ はベクトル空間 $Z(\partial N)$ の元

$$Z(N) \in Z(\partial N)$$

を定めます。もし $N$ が閉多様体なら $\partial N = \emptyset$ で、数

$$Z(N) \in Z(\emptyset) = K$$

は $N$ の位相不変量です。

今度は多様体 $N_1$ の境界が

$$\partial N_1 = M_1^{op} \sqcup M_2$$

で与えられているとしましょう。\$M\_2\$ には \$N\_1\$ から誘導された向きを与え、\$M\_1\$ にはその反対の向きを与えます。これは、\$N\_1\$ が \$M\_1\$ から \$M\_2\$ へのコボルディズムを与えると解釈できます。この時、函手 \$Z\$ は元 \$Z(N\_1) \in Z(M\_1)^\* \otimes Z(M\_2)\$ を定めます。これは線型写像

$$Z(N_1) : Z(M_1) \longrightarrow Z(M_2)$$

を与えることと同値です。さらに境界

$$\partial N_2 = M_2^{op} \sqcup M_3$$

を持った多様体 \$N\_2\$ があって、線型写像

$$Z(N_2) : Z(M_2) \longrightarrow Z(M_3)$$

を定めているなら、\$N\_1\$ と \$N\_2\$ を共通の境界成分 \$M\_2\$ に沿って微分可能性を保つように縫い合わせ、新しい微分可能多様体

$$N = N_1 \cup_{M_2} N_2$$

を作ることができます。その境界は明らかに

$$\partial N = M_1^{op} \sqcup M_3$$

で、\$N\$ は \$M\_1\$ から \$M\_3\$ へのコボルディズムを与えます。アティヤー・シーガルの縫合公理 [4] は図式

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccc} Z(M_1) & \xrightarrow{Z(N_1)} & Z(M_2) & \xrightarrow{Z(N_2)} & Z(M_3) \\ \parallel \downarrow & & & & \downarrow \parallel \\ Z(M_1) & \xrightarrow{Z(N)} & & & Z(M_3) \end{array}$$

が可換であることを要請します。

このように、\$d\$ 次元 TQFT は \$d\$ 次元閉多様体一つ一つにその位相不変量を対応させる函手です。その真髄は、\$d\$ 次元閉多様体 \$N\$ を \$(d-1)\$ 次元部分多様体に沿って単純な構造を持った部分に切り分け、位相不変量 \$Z(N)\$ をその分割から再構成するところにあります。2次元の位相的場の量子論の場合は特殊な事情が生じます。まず、私たちは向きづけ可能な閉曲面のあらゆる位相不変量を既に知っています。というのも、それは単純に種数 \$g\$ の函数として書けるからです。種数の研究に新しい理論が必要なわけではありません。さらに、1次元の連結閉多様体は円しかないので、2D TQFT はたった一つのベクトル空間

$$(2.2) \quad Z(S^1) = A$$

とそのテンソル積のみを扱うだけです。そこから一体何が得られるというのでしょうか？

一番の驚きは、**2D TQFT** がさらに量子化されて [17, 27, 53, 68]、古典的な方法では捉えられなかった高次元多様体の新しい不変量を与えてくれることです。このプロセスはフロベニウス代数 (0.2) から出発します。それが、まず量子コホモロジー環へ、そしてさらにグロモフ・ウィッテン不変量へと量子化されていくのです。この変遷にはスペクトル曲線の構成を経て量子曲線に至る道筋と繋がるものがあります。この点が、私たちが展開したいストーリーです。第1部では量子化の逆の手順、すなわち、量子論から始めて古典論に至る道筋のスナップを解説します。

種数 \$g\$ の向きづけられた微分可能な閉曲面から \$m+n\$ 個の小さくて互いに疎な（交わらない）開円盤を取り除いた境界付きの曲面を考えましょう、境界も微分可能曲線だという条件を置けば、それは \$m+n\$ 個の互いに疎な円になります。そのうちの \$n\$ 個には曲面から誘導された向きを入れ、残りの \$m\$ 個には反対の向きを入れます。こうして得られた境界付き曲面を \$\Sigma\_{g,\bar{m},n}\$ で表します。この曲面は \$m\$ 個の円から \$n\$ 個の円へのコボルディズムを与えます。こういった種類の境界付き曲面の向きを保つ微分同相類は、種数 \$g\$ と境界の向きづけの具合を示す二つの数 \$m\$ と \$n\$ とで決まります。従って、\$m\$ 個の円と \$n\$ 個の円の間の向きづけられた微分可能コボルディズムの同値類も \$(g, m, n)\$ で分類されます。それゆえ、コボルディズム \$\Sigma\_{g,\bar{m},n}\$ に多重線型写像

$$\omega_{g,\bar{m},n} \stackrel{\text{def}}{=} Z(\Sigma_{g,\bar{m},n}) : A^{\otimes m} \longrightarrow A^{\otimes n}$$

を対応させる TQFT 関手  $Z$  もラベル  $(g, m, n)$  で完全に決まります。

今、 $k$  個の円から  $m$  個の円への種数  $h$  のコボルディズムが別の曲面  $\Sigma_{h, \bar{k}, m}$  で与えられているしましょう。私たちは、この二つのコボルディズムを結合させたものを、 $m$  個の円に沿って二つの曲面を縫い合わせるによって定義します。曲面  $\Sigma_{h, \bar{k}, m}$  の  $m$  個の円と曲面  $\Sigma_{g, \bar{m}, n}$  の  $m$  個の円はちょうど反対の方法で向きが与えられているので、双方から円を一つづつ取って作る円の  $m$  組を共通の向きに沿って縫い合わせれば、出来上がった新しい曲面には元の二つの曲面と整合する向きが自然に決まります。こうして、種数  $g+h+m-1$  の新しい境界付きの向きづけられた曲面  $\Sigma_{g+h+m-1, \bar{k}, n}$  が得られます。種数が元の曲面の種数の話より増えるのは、円の  $m$  組を互いに貼り合わせる時に、曲面に  $m-1$  個のハンドルを新たに作るからです (Figure 2.1 参照)。アティヤー・シーガルの縫合公理は関手  $Z$  がコボルディズムの結合に線型写像の結合を対応させることを要請します。今の局面では、縫合されたコボルディズム  $\Sigma_{g+h+m-1, \bar{k}, n}$  に線型写像

$$\omega_{g, \bar{m}, n} \circ \omega_{h, \bar{k}, m} = \omega_{g+h+m-1, \bar{k}, n} : A^{\otimes k} \longrightarrow A^{\otimes n}$$

が対応します。

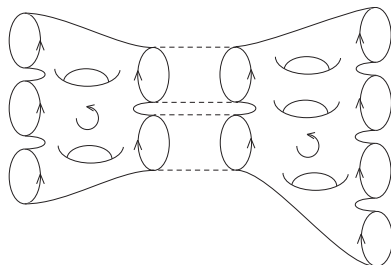


FIGURE 2.1. 弦の相互作用。閉じた弦の相互作用を記述する簡単な物理モデルがアティヤー・シーガルの縫合公理 [4] へと発展した。

この縫合原理は、向きが同じ  $m$  組の円のうちの幾つかだけを貼り合わせるという一般化を許します。例えば、もし  $j \leq l$  かつ  $j \leq m$  なら、 $j$  組の円だけを縫合して写像

$$(2.3) \quad \omega_{g, \bar{m}, n} \circ \omega_{h, \bar{k}, l} = \omega_{g+h+j-1, \overline{k+m-j}, n+l-j} : A^{\otimes k+m-j} \longrightarrow A^{\otimes n+l-j}$$

を作ることができます。さらに、TQFT はコボルディズム自体の連結性を仮定してはいないので、互いに疎なコボルディズムを積み重ねて部分的な縫合をすれば様々な  $A^{\otimes m}$  から  $A^{\otimes n}$  への線型写像が得られます。

ダイクグラフは 2D TQFT と可換フロベニウス代数の間の同値性を指摘しました [19]。この二つのものが似ていることはすぐに分かります。ベクトル空間  $A$  にはフロベニウス代数に現れる演算

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{1} &= \omega_{0, \bar{0}, 1} : K \longrightarrow A, & m &= \omega_{0, \bar{2}, 1} : A^{\otimes 2} \longrightarrow A, \\ \epsilon &= \omega_{0, \bar{1}, 0} : A \longrightarrow K, & \delta &= \omega_{0, \bar{1}, 2} : A \longrightarrow A^{\otimes 2}, \\ \eta &= \omega_{0, \bar{2}, 0} : A^{\otimes 2} \longrightarrow K \end{aligned}$$

が直ちに定義できます。 $m$  個の円が入ってきて、 $n$  個の円が出て行く過程が連結したコボルディズムで与えられるなら、それは曲面の種数だけで決まることを前に注意しました。つまり、コボルディズムの過程で円がどんな風につきはぎされたかという歴史は、曲面の種数が同じである限り、最終的に得られる線型写像には反映されません。従って、コボルディズムの合成で得られる曲面のトポロジータイプ  $(g, m, n)$  が同じであれば、(2.4) に出てくる演算の間に関係が生じます。例えば

$$\omega_{0, \bar{1}, 0} \circ \omega_{0, \bar{2}, 1} = \omega_{0, \bar{2}, 0} \implies \epsilon \circ m = \eta$$

が成り立ちます。これは (1.1) に他なりません。積の結合律は、種数 0 の向きづけられた曲面  $\Sigma_{0, \bar{3}, 1}$  で誘導された向きの円一つと反対の向きの円が三個からなる境界を持ったものの微分同相類は一つしかないことに由来します。境界円の向きを反対にすれば余積の余結

合律が得られます。こうして  $A = Z(S^1)$  には双代数の構造が入ります。代数構造と余代数構造の双対性を成り立たせるために演算  $\eta = \omega_{0,2,0}$  が非退化であることを条件として課せば、 $A$  はめでたく可換フロベニウス代数になります。

逆に、有限次元の可換フロベニウス代数  $A$  から出発して 2D TQFT を構成することもできます [1]。まず (2.4) にリストされた写像  $\omega_{0,\bar{m},n}$  を  $A$  の代数演算で定義します。もっと一般の写像  $\omega_{g,\bar{m},n}$  は既に作られたものから部分縫合 (2.3) を繰り返し用いて作って行きます。この方法で全ての数の組  $(g, m, n)$  が得られるので、作られた写像はその構成からして円のコボルディズムに対応します。こうして 2D TQFT が構成できました。

この考察に基づいて、次の定義を与えましょう。

**定義 2.1** (2次元位相的場の量子論).  $K$  上有限次元のベクトル空間  $A$  と、自明でない線型写像  $\epsilon: A \rightarrow K$ 、さらに線型同形  $\lambda: A \xrightarrow{\sim} A^*$  とからなる三つ組  $(A, \epsilon, \lambda)$  を考えましょう。 $A$  とそのテンソル積の間の写像

$$\omega_{g,\bar{k},\ell}: A^{\otimes k} \rightarrow A^{\otimes \ell}, \quad 0 \leq g, k, \ell,$$

の集合  $\{\omega_{g,\bar{k},\ell}\}$  とが次の公理系を充すときにデータ  $(A, \{\omega_{g,\bar{k},\ell}\})$  は 2次元位相的場の量子論であると定義します。

- **TQFT 1. 対称性公理:**

$$(2.5) \quad \omega_{g,\bar{k},\ell}: A^{\otimes k} \rightarrow A^{\otimes \ell}$$

は定義域への対称群  $S_k$  の作用で不変。

- **TQFT 2. 非自明性公理:**

$$(2.6) \quad \omega_{0,\bar{1},0} = \epsilon: A \rightarrow K.$$

- **TQFT 3. 双対性公理:**

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} A^{\otimes m} & \xrightarrow{\omega_{g,\bar{m},n}} & A^{\otimes n} \\ \lambda^{\otimes m} \downarrow & & \downarrow \lambda^{\otimes n} \\ (A^*)^{\otimes m} & \xrightarrow{(\omega_{g,\bar{n},m})^*} & (A^*)^{\otimes n} \end{array}$$

- **TQFT 4. 部分縫合公理:**

$$(2.8) \quad \omega_{g,\bar{m},n} \circ \omega_{h,\bar{k},\ell} = \omega_{g+h+j-1,\bar{k+m-j},n+\ell-j}: A^{\otimes k+m-j} \rightarrow A^{\otimes n+\ell-j}, \quad j \leq m, j \leq \ell.$$

**注意 2.2.** 既に上で注意したように、この公理系を充すベクトル空間  $A$  には可換フロベニウス代数の構造が入ります。逆に、 $A$  が可換フロベニウス代数ならば、(2.4) に列挙された写像  $\omega_{0,\bar{m},n}$  を一般の  $\omega_{g,\bar{m},n}$  に拡張することによって、TQFT 公理を充す函手  $Z$  を作ることができます。

### 3. グロモフ-ウィッテン理論のシルエット

向きづけられた閉多様体  $X$  のコホモロジー環  $H^*(X, K)$  には自然にフロベニウス代数の構造が入ったことを思い起こしましょう。多様体が偶数次元なら、偶数次のコホモロジーだけを取り出して可換フロベニウス代数  $A = H^{even}(X, K)$  が得られます。それは前節で述べた対応で 2D TQFT を一つ定めます。一般次元 TQFT の役割は高次元多様体の位相不変量を取り出すことでした。私たちが目にしているのは、多様体  $X$  の古典的位相不変量が 2D TQFT だということです。

ここで視点を変えて、そのような  $X$  から始めてどのようにして対応する 2D TQFT が得られるのか、と問うてみましょう。もちろん、第 2 節で見たように、コホモロジー環のフロベニウス構造は自動的に 2D TQFT を定めます。でもこの代数的定式化ではコボルディズムを縫い合わせるというような描像は失われてしまいます。高次元多様体  $X$  を調べる上で、円のコボルディズムは一体どんな役割を果たすのでしょうか？

1990年代の始めに晴天の霹靂のように現れた展望は、2D TQFT がさらに量子化されてグロモフ-ウィッテン理論へと発展し、それが、古典的なトポロジーの方法では捉え

られない新たな量子位相不変量を構成する、というものでした。この歴史的発見は、今なお続く弦理論と幾何学の実り多い交流の決定的な出来事の一つに数えられています。

一番原始的な弦理論は時空多様体  $X$  の中を飛び回る弦を扱います。動く弦の軌道は、多様体  $X$  に埋め込まれた天井裏の空調パイプのような曲がりくねったシリンダーの形をしています。弦が量子的対象ならば、その間に相互作用が生まれます。Figure 2.1 は連続する弦の相互作用の一例だと見るすることができます。時間が左から右へ流れているとすると、まず三つの弦が衝突して複雑な相互作用を起こし、二つの弦を生み出します。相互作用の複雑度は左の曲面の種数が「 $g = 2$ 」であることで測られます。こうして生じた二弦はさらに衝突してもっと複雑な（つまり「 $g = 3$ 」の）相互作用を起こし、最終的に4個の弦に分かれてしまいます。この連続相互作用の軌道は、時空多様体  $X$  の中に埋め込まれた7個の境界円を持つ種数6の曲面だと見るすることができます。

弦理論の初期のモデルは、時空  $X$  が弦の相互作用にどんな制限を与えるかを調べるために導入されました。この過程で、弦理論が物理理論として整合的であるための条件として、カラビーヤウ多様体の重要さが認識されたのです。さらに、この視点を180度転換することによって、物理学者たちは弦の相互作用の単純なモデルが  $X$  それ自体の全く新しい種類の位相不変量を与えうることに気づいたのでした。この新しい不変量は従来のホモロジー・コホモロジー群やホモトピー群では必ずしも捉えられるものではありません。弦理論から得られた不変量は量子位相不変量と呼ばれています。

グロモフ・ウィッテン理論は量子弦理論のモデルに数学的に厳密な解釈を与えます。 $X$  の中で相互作用する弦の軌道は境界付き曲面  $\Sigma_{g,\bar{m},n}$  の写像

$$(3.1) \quad f : \Sigma_{g,\bar{m},n} \longrightarrow X$$

による像だと考えることができます。ちょっと話が変わりますが、 $X$  の基本群  $\pi_1(X, x_0)$  は点付きループ空間

$$\mathcal{L}(X, x_0) = \mathcal{C}^\infty((S^1, *), (X, x_0))$$

の連結性で定義されることを思い出しましょう。ところで、このループ空間は定められた点  $* \in S^1$  を  $x_0 \in X$  に写す円  $S^1$  から  $X$  への微分可能写像のモジュライ空間です。同じ精神で、グロモフ・ウィッテン不変量は  $\Sigma_{g,\bar{m},n}$  から  $X$  への写像のしかるべきモジュライ空間の古典的、つまり通常の、位相不変量として定義されるのです。弦に長さの概念が付与される場合には、その軌道  $\Sigma_{g,\bar{m},n}$  には曲面としての計量が入ります。外空間  $X$  が、例えばシンプレクティック構造や複素構造、あるいはケーラー構造といった幾何構造を持つならば、写像  $f$  は当然その定義域と値域の幾何構造に関して整合的であるべきでしょう。実際、 $X$  がケーラー多様体なら、曲面  $\Sigma_{g,\bar{m},n}$  にはその計量の共形類で決まる複素構造を入れて、複素解析写像  $f$  を考えるのが自然です。ただ、こういった写像のモジュライ空間を定義しようとするまさにその時点で、私たちは技術的困難に遭遇するのです。たとえばモジュライ空間を見つけられたとしても、それは従来の多様体論で扱われた対象とはかなり違ったものであることが多いので、私たちは多様体概念そのものの拡張を迫られます。したがって、そういった拡張された空間概念の古典的位相不変量を定義すること自体が、また困難な問題になってしまいます。

いろいろある困難を回避するために、ここで一番単純なケースを考えてみましょう。空間  $X$  がただ一点だけの時を考えるのです。もちろん一点の位相構造を調べるのがポイントではありません。そんなの誰でも知っている。一点のグロモフ・ウィッテン理論を調べることで、私たちは理論自体の構造を知りたいのです。ちょっと考えてみれば、どんなものでも一点に写像できるので、ひょっとしたら一点というのはそんなに単純なものではないのかもしれない。これは物理で真空を扱うのと似ています。実際、何であれ真空に放り込むことができるので、真空の量子論はどうしたって豊かな理論になるわけです。

$X = pt$  が一点なら、入射する弦も出て行く弦も大きさは無限小だと考えます。したがって、軌道は閉曲面になり、境界があったところにはただ曲面上の点が指定されているだけです。閉曲面の計量は自然な複素構造を定め、こうしてコンパクトリーマン面が得られます。それはさらに射影代数曲線の構造を獲得します。相互作用する弦はその過程で無限に小さくなくても構わないので、軌道には、埋め込まれた円  $S^1$  が点に収束し、そこからまた瞬時に大きくなっていく、というようなプロセスが含まれていることもあるでしょう。こ

のプロセスは複素代数幾何で代数曲線の通常二重点と呼ばれるものに当たります。局所的には、代数曲線の通常二重点は特異平面曲線

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = 0\}$$

の原点の近傍として定義されます。もちろん私たちはここで軌道概念を抽象的に捉えています。 $X = pt$  の中では何も動けないからです。写像の観点 (3.1) からすれば、値域が点ならどんな射影代数曲線であってもそこから一点への代数多様体としての射  $f$  が唯一存在します。この場合、写像のモジュライ空間とは定義域のモジュライに他なりません。

後で定義するように、安定曲線とは、非特異あるいはたかだか通常二重点のみを特異点として持つ射影代数曲線で、滑らかな点が幾つかその上に指定されており、各指定点を固定するような自己同型写像が有限個しかないようなものをさします。1次元複素射影空間  $\mathbb{P}^1$  の正則自己同型群は

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = PSL_2(\mathbb{C})$$

で、 $\mathbb{P}^1$  に三重可遷的に作用することを思い起こしましょう。指定点が2個までなら、その各点を固定する自己同型は無限にあります。 $PSL_2(\mathbb{C})$  はコンパクトで複素3次元の群なので、相異なる3点を指定し、その一つ一つを固定する  $\mathbb{P}^1$  の自己同型を考えれば、その数は有限になります。この場合は実はたった一つしかありません。したがって3点が指定された射影直線は安定曲線です。次に楕円曲線の場合を考えてみましょう。楕円曲線  $E$  はそれ自体可換群で、群  $E$  の曲線  $E$  への作用は可遷的です。この平行移動の自由度を無くするためには点を一つ指定すればいいのですが、その点を  $E$  の単位元とみなすことにします。一点を固定する楕円曲線の自己同型群は有限群になります。

コンパクトリーマン面  $C$  の種数が  $g = g(C) \geq 2$  なら、その正則自己同型群の位数は

$$|\text{Aut}(C)| \leq 84(g-1)$$

という上限を持つことが知られています。曲面の双曲幾何を用いればこの評価式を導くことができます。有限性だけを示すのはより簡単です。まず  $C$  の普遍非覆面は上半面

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

であることを思い起こしましょう。したがって、 $C$  の基本群を  $\mathbb{H}$  の自己同型群内に

$$(3.2) \quad \rho : \pi_1(C) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{R}) = \text{Aut}(\mathbb{H})$$

で忠実に表現すれば、 $C$  を商空間

$$(3.3) \quad C \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}/\rho(\pi_1(C))$$

として実現できます。ここで、 $C$  の正則自己同型は普遍被覆  $\mathbb{H}$  の自己同型に拡張することに注意します。次に、 $C$  の連続な正則自己同型は微分することによって  $C$  上の正則ベクトル場  $v$  を誘導します。ここで、閉曲面上の微分可能ベクトル場のトポロジーを思い起こしましょう。ベクトル場の0点には指数が与えられています。今の場合  $v$  は正則なので、0点の周りでは局所的に  $z^n d/dz$  と書かれます。この  $n$  が指数なのです。ベクトル場の0点の指数を全て足し合わせたものは  $C$  のオイラー標数  $\chi(C) = 2 - 2g < 0$  に等しい、というのがトポロジーの一定理です。ところで、正則ベクトル場はもし0点を持てばその指数は正なので、その和であるオイラー標数は非負でなければなりません。これは矛盾です。したがって  $C$  上には正則ベクトル場は存在しません。ということは  $C$  の自己同型群は離散群ですが、コンパクト群に  $\text{Aut}(C) \subset PSL_2(\mathbb{C})$  として埋め込まれるので、 $|\text{Aut}(C)|$  の有限性が従います。

代数曲線が安定であるとは、(1) 特異点としては通常二重点のみを許し、(2)  $C$  の各既約成分  $C'$  は有限個の自己同型しか持たない、ことを意味します。第2条件は、 $C'$  上にある指定された滑らかな点(正則点)と特異点との合計が、もし  $g(C') = 0$  なら3以上、 $g(C') = 1$  なら1以上、であることと同値です。既約成分の種数が2以上なら何の条件もありません。安定領域  $2g - 2 + n > 0$  にあり  $g \geq 0$  と  $n \geq 1$  を充す整数の組  $(g, n)$  について、種数  $g$  でその上に  $n$  個の指定された非特異点を持つ安定曲線のモジュライ空間  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  が定義されます。これは  $3g - 3 + n$  次元複素オービフォールドになります。一点  $X = pt$  の量子位相不変量は  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  上の古典的な位相不変量として実現されます。ところで、今日なお全

での  $i, g, n$  の値に対して  $H^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  を決定することはなされていません。ただ、 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  がモジュライ空間であるというその定義そのものからトートロジー類と呼ばれる具体的なコホモロジー類を沢山作ることができます。今なお分からないのはこうして得られるコホモロジー類にあと何を付け加えたら  $H^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  全体を生成できるのかという点です。もちろんある程度小さな  $g$  のコホモロジーは知られています。ウィッテン予想 [101] とそれに続くコンツェヴィッチの定理 [67] が大きな驚きだったのは、余接類と呼ばれるトートロジー類の完全な交叉関係式が全ての  $g$  と  $n$  で具体的に書ける、という点にあったのです。

ウィッテン予想のこれまでに得られた様々な証明 (例えば [66, 67, 76, 77, 86, 91] 参照) の中で、[77, 86] の二つでは TQFT に見られるのとよく似た精神に基づく曲面に関する漸化式が用いられます。この漸化式によるウィッテン予想の解釈は [23] で指摘されました。位相的漸化式とウィッテン予想の関連は [33] で詳しく扱われています。

異なる  $(g, n)$  の値をもつ  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  の間には簡単な幾何学的意味を持つ関係が成立します。 $n$  点付きの滑らかな曲線のモジュライを  $\mathcal{M}_{g,n}$  で表すことにしましょう。 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  の境界

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \mathcal{M}_{g,n}$$

は特異曲線を表す点から成っています。一番簡単な特異曲線は通常二重点を一つ持ちます。それは二つの滑らかな点が衝突して生成されたという風に記述できます。曲線の退化で特異点がどのように生成されるかを調べると、モジュライ空間  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  の間には三種類の自然な射があることが分かります。その一つは安定曲線上の指定点をただ消してしまうという忘却射

$$(3.4) \quad \pi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

です。あとの二つは貼り合わせの射

$$(3.5) \quad gl_1 : \overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

$$(3.6) \quad gl_2 : \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$$

で、 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  の境界成分を構成します。貼り合わせ射によって滑らかな 2 点が重ね合わされて通常二重点を生成します。第一の射  $gl_1$  では一つの曲線上の 2 点が貼り合わされ、 $gl_2$  では異なる曲線上の 2 点が貼り合わされます。

次に射  $\pi$  による安定曲線  $(C, p_1, \dots, p_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  でのファイバーが何かを調べてみましょう。 $n+1$  番目の指定点は曲線  $C$  のどこに取ることもできるので、ファイバーは  $C$  自体であることが分かります。したがって、 $\pi$  はモジュライ  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  をパラメーター空間とする普遍曲線族になっています。もう少し詳しく見てみましょう。指定点  $p_{n+1}$  を  $p_i, i = 1, \dots, n$  に重ねて取るときは、 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$  の点として表されているのは  $C$  と  $\mathbb{P}^1$  とを点  $p_i \in C$  のある場所で貼り合わせ、二つの指定点  $p_i, p_{n+1}$  を  $\mathbb{P}^1$  上に置いた特異曲線です。この 2 点と通常二重点とは  $\mathbb{P}^1$  上の 3 点を成しますが、前に見たように  $\mathbb{P}^1$  上の 3 点はモジュライを持たないので、この特異安定曲線がただ一つ決まるのです。 $(C, p_1, \dots, p_n)$  にこうしてできた特異曲線を対応させて切断

$$\sigma_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$$

が定義されます。これは  $\pi$  の右逆射です。幾何学的には、 $\sigma_i$  は  $(C, p_1, \dots, p_n)$  をファイバー  $C = \pi^{-1}(C, p_1, \dots, p_n)$  上の点  $p_i$  に写します。明らかに、

$$\pi \circ \sigma_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

は恒等射です。ファイバーの構成は  $(C, p_1, \dots, p_n)$  が特異安定曲線  $C$  から成るときも同様ですが、 $p_{n+1}$  を  $C$  の特異点に取ろうとするときにはどんな曲線がモジュライの点として対応しているのかが注意が必要です。まず通常二重点を解消して局所的に曲線を非特異化します。次に元の特異点があった場所を直線  $\mathbb{P}^1$  で繋ぎます。最後に  $p_{n+1}$  を  $\mathbb{P}^1$  上の第 3 点としてとるのです。したがって、切断  $\sigma_j$  による特異曲線の像がファイバーの特異点の場合は、それは特異点の数が一つ増えた特異曲線を表す点に対応します。忘却射は  $p_{n+1}$  を消すのですが、そうすると  $\mathbb{P}^1$  成分には特異点 2 点しか残らないので、安定曲線にはなりません。この場合は、 $\pi$  は  $\mathbb{P}^1$  成分そのものを 1 点に潰してしまうのです。この操作を安定化と呼びます。

ケーラ多様体  $X$  のグロモフーウィッテン理論 [17] はモジュライ空間

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) = \{f : (C, p_1, \dots, p_n) \longrightarrow X \mid [f(C)] = \beta\}$$

のトポロジー構造を扱います。このモジュライは、安定とは限らない通常二重点のみを持つ  $n$  個の滑らかな点  $p_1, \dots, p_n \in C$  を持った曲線  $C$  から  $X$  への安定複素写像  $f$  で、その像  $f(C)$  が決めるホモロジー類があらかじめ与えられたホモロジー類  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$  に一致するようなもの全体の成す空間として定義されるべきものです。ここでも写像の安定性は自己同型の有限性として定義されます。このモジュライ空間の定義を厳密に与えることは本稿の目標とする範囲を超えてしまうので、詳しくは教科書 [17] を参照してください。モジュライ空間が定義されたならば、それは二つの自然な射

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) & \xrightarrow{ev_i} & X \\ \phi \downarrow & & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,n} & & \end{array}$$

を伴います。忘却射  $\phi$  は写像  $f$  を忘れてしまい、 $f$  にその定義域  $(C, p_1, \dots, p_n)$  の安定化を対応させます。そして、

$$ev_i(f : (C, p_1, \dots, p_n) \longrightarrow X) = f(p_i) \in X, \quad i = 1, \dots, n,$$

は  $i$  番目の指定点  $p_i \in C$  に  $f$  のその点での値を対応させます。上に見たように、安定化とは安定でない  $(C, p_1, \dots, p_n)$  の成分一つ一つを 1 点に潰す操作です。実際にもしモジュライ空間  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  が決定され、そのコホモロジー理論が期待通りに振る舞うなら、コホモロジー間の写像

$$\begin{array}{ccc} H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta), \mathbb{Q}) & \xleftarrow{ev_i^*} & H^*(X, \mathbb{Q}) \\ \phi_! \downarrow & & \\ H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) & & \end{array}$$

が得られるでしょう。ここで、 $\phi_!$  はファイバーに沿っての積分で定義されるギジン写像です。もし仮に  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  が多様体であったとし、また、射  $\phi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  がファイバー束だったなら、 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  は局所的には直積で、 $\phi$  のギジン写像  $\phi_!$  は実際  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  のド・ラムコホモロジー類を  $\phi$  のファイバーに沿って積分して得られたことでしょう。それなら  $X$  の任意のコホモロジー類  $v_1, \dots, v_n \in H^*(X, \mathbb{Q})$  を選んで、グロモフーウィッテン不変量を積分

$$GW_{g,n}^{X,\beta}(v_1, \dots, v_n) := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \phi_!(ev_1^*(v_1) \cdots ev_n^*(v_n))$$

で定義することも可能だったはずですが。しかしながら、一般のモジュライ理論ではこのギジン写像の構成を期待通りに行うことは不可能なのです。これは、モジュライ空間  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  の複雑な性質に由来します。この空間はリーマン・ロッホ理論で期待される次元とは異なる次元の成分を持つことがあるのです。その救済策として考案されたのが、期待値と同じ次元を持つ仮想基本類  $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{vir}$  の構成によって  $\phi_!$  の使用を回避し、グロモフーウィッテン不変量を

$$(3.7) \quad GW_{g,n}^{X,\beta}(v_1, \dots, v_n) := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{vir}} ev_1^*(v_1) \cdots ev_n^*(v_n)$$

として定義する流儀です。教科書 [17] でその詳細を勉強することができます。

さて、 $A = H^{even}(X, \mathbb{Q})$  はフロベニウス代数であることを思い起こしましょう。グロモフーウィッテン理論は  $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{vir}$  という巨大なブラックボックスを経て定義されるのですが、私たちが望んでいるのは写像

$$\Omega_{g,n} : H^{even}(X, \mathbb{Q})^{\otimes n} \longrightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$



で、その  $\overline{M}_{g,n}$  での積分が  $X$  の量子不変量を与えてくれるようなものです。グロモフ-ウィッテン不変量の充すべき性質とは何なのでしょう？その性質を写像  $\Omega_{g,n}$  の公理系として定式化し、そのことでグロモフ-ウィッテン不変量の特徴づけることはできないものなのでしょうか？これがコンツェヴィッチとマニンによるコホモロジー的場の理論の導入 [68] の動機の一つだったのです。以下で見るように、2D TQFT は CohFT の特殊な場合として得られます。CohFT をその TQFT への制限から再構成するというギヴェンタルとテレマンの素晴らしい理論 [53, 99] は、[3, 39, 44, 73] などに見られる最近の様々な発展の基礎となっています。その幾つかは位相的漸化式とも深く繋がっているのです。

#### 4. コホモロジー的場の理論

代数曲線のモジュライ空間はリーマンの 1857 年の論文 [95] で代数曲線の双有理同値類のパラメーター空間として導入されました。「モジュライ」という用語もリーマンによるものです。彼はまたモジュライ空間の点が周期行列として捉えられることも示しました。時代が降り、1950 年代の小平・スペンサーの複素構造の変形理論を通して無限小のレベルではモジュライ空間とは何であるかが次元によらず理解されるようになりました。大域的な概念としてのモジュライ空間は曲線の場合に  $\overline{M}_g$  を代数的スタックとして定義した [18] で確立されました。ひとたびモジュライの概念が確定すれば、その位相構造を問うことが可能になります。それでも、点付き曲線のモジュライがネットワークを形成し、それによって帰納的に  $\overline{M}_{g,n}$  の位相構造を調べることができるというアイデアに到達するまでに数学界はさらに数十年を費やしたのでした。

ピクストン [94] に従って安定グラフを導入しましょう。この名前は「安定曲線の双対グラフ」に由来します。安定グラフ  $\gamma = (V, E, L)$  は頂点の集合  $V$  と辺の集合  $E$ 、それに足の集合  $L$  が加わった三つの集合の間の隣接関係に幾つかの条件がつけられたものとして定義されます。各辺は二つの頂点を結びます。この 2 点は同一点でもいいので、辺はループを成すことも許されます。2 頂点は二本以上の辺で結ばれることも可能です。各頂点  $v \in V$  には種数と呼ばれる非負整数  $g(v)$  が与えられます。足は幾つかの頂点から出る線分ですが、その終点は頂点には数えません。頂点  $v$  から出る足の数とその頂点の次数（隣接する半辺の数）との合計を  $n(v)$  で表します。グラフの安定性条件とは、各頂点で不等式

$$(4.1) \quad 2g(v) - 2 + n(v) > 0$$

が成立すること、と定めます。1次元位相空間としてのホモロジー群  $H_i(\gamma, \mathbb{Q}), i = 0, 1$  の次元を  $h_i(\gamma)$  で表します。

$$(4.2) \quad \begin{cases} g = \sum_{v \in V} g(v) + h_1(\gamma) \\ n = |L| \end{cases}$$

が成り立つ時安定グラフ  $\gamma$  のタイプは  $(g, n)$  であるということにします。それは算術種数  $g$  で  $n$  個の指定点を持った安定曲線を表します。その曲線には  $|V|$  個の規約成分があり、頂点  $v \in V$  に対応する規約成分の幾何種数は  $g(v)$  で与えられ、各成分は  $|E|$  個の通常二重点で繋がっています。足はどの規約成分に指定点が置かれているかを表しています。2 頂点  $v, w \in V$  を結ぶ辺は対応する二つの規約成分の交点として作られる通常二重点を表します。また、ループは規約成分が自分自身と交わる時に生じます。

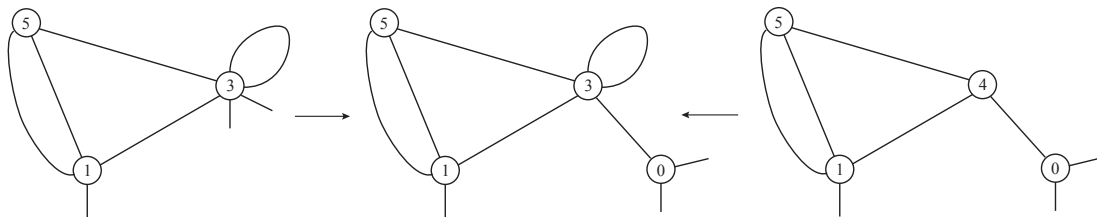


FIGURE 4.1. タイプ  $(12, 3)$  の安定グラフ。矢は安定曲線の退化を示す。辺縮約変換は矢を逆に辿ることを意味する。ある頂点に付随するループが縮約されると、その頂点の種数は 1 増える。2 頂点間の辺の縮約では種数は加算される。

種数  $g$  で  $n$  個の指定点を持った滑らかな曲線にはたった一つの頂点に種数  $g$  と  $n$  本の足が付与された安定グラフが対応します。曲線に特異点がないので、このグラフには辺がありません。一般に、安定グラフの辺の数  $|E|$  は対応する安定曲線が属する  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  境界滑層の余次元を表します。従って、タイプ  $(g, n)$  の安定曲線が持ちうる辺の数の最大値は  $3g - 3 + n$  です。グラフ  $\gamma$  のオイラー標数は

$$h_0(\gamma) - h_1(\gamma) = 1 - g$$

なので、頂点数の最大値は  $2g - 2 + n$  で与えられます。この場合、各頂点  $v \in V$  は種数 0 で、常に  $n(v) = 3$  が成り立ちます。

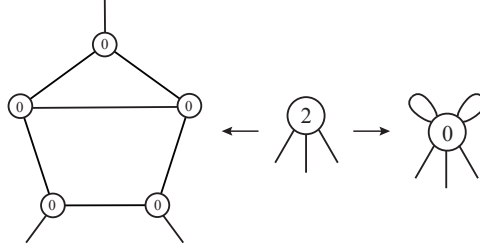


FIGURE 4.2. タイプ  $(2, 3)$  の安定グラフ。頂点数を最大にする退化と、頂点数 1 のままで種数を 0 にする退化とを示す。

同じタイプの安定曲線の成すネットワークは辺縮約変換で繋がっています。次節で私たちはセルグラフの辺縮約を扱います。同じ辺縮約といっても、セルグラフに適応された場合と安定グラフの場合とではその性格にかなりの違いがあります。安定グラフでは辺は安定曲線の通常二重点を表すので、その縮約は特異点を生み出した退化の過程を逆方向に辿ることに対応します。Figure 4.1 に示すように、安定グラフ  $\gamma = (V, E, L)$  の 2 頂点  $v$  と  $w$  とを繋ぐ辺を縮約する場合には、新しくできた頂点には種数  $g(v) + g(w)$  が割り当てられます。頂点  $v$  に隣接するループを縮約すると、 $v$  の種数は 1 増えます。タイプ  $(g, n)$  のどのグラフも全ての辺を縮約してしまえば滑らかな曲線に対応するグラフが得られます。従って同じタイプの安定グラフのネットワークは辺縮約の作用でつながっているわけです。

**定義 4.1** (コホモロジー的場の理論 [68]). 基底  $\{e_1, \dots, e_r\}$  を持つ有限次元可換フロベニウス代数  $A$  を一つ固定します。安定領域  $2g - 2 + n > 0$  に属する指数  $(g, n)$  について定義された線型写像

$$(4.3) \quad \Omega_{g,n} : A^{\otimes n} \longrightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, K)$$

の成すシステム  $(A, \{\Omega_{g,n}\})$  がコホモロジー的場の理論であるとは、このシステムが次の公理系を満たすことと定めます。

$$\text{CohFT 0: } \Omega_{g,n} \text{ は } S_n \text{ 不変で、} \Omega_{0,3}(v_1, v_2, v_3) = \eta(v_1 v_2, v_3).$$

$$\text{CohFT 1: } \Omega_{g,n+1}(v_1, \dots, v_n, \mathbf{1}) = \pi^* \Omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n).$$

$$\text{CohFT 2: } gl_1^* \Omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{a,b} \Omega_{g-1,n+2}(v_1, \dots, v_n, e_a, e_b) \eta^{ab}.$$

$$\text{CohFT 3: } gl_2^* \Omega_{g_1+g_2, |I|+|J|}(v_I, v_J) = \sum_{a,b} \eta^{ab} \Omega_{g_1, |I|+1}(v_I, e_a) \otimes \Omega_{g_2, |J|+1}(v_J, e_b),$$

ここで  $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$  は指数集合の分割を表し、右辺のテンソル積はコホモロジー環のキュネット公式による同型

$$H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g_1, n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2, n_2+1}, K) \cong H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g_1, n_1+1}, K) \otimes H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g_2, n_2+1}, K)$$

で左辺と同一視します。

**注意 4.2.** 条件  $\Omega_{0,3}(v_1, v_2, v_3) = \eta(v_1 v_2, v_3)$  はフロベニウス代数の積構造がグロモフ-ウィッテン不変量の  $(0, 3)$  値で決まることを示します。

**注意 4.3.** 貼り合わせ射の条件は、貼り合わせによってできた特異点にフロベニウス代数の単位元  $\mathbf{1}$  を与え、特異点を生ずる前の二つの正則点に (1.10) を割り振ったものと同一視する、というものです。安定グラフの言葉で言い換えると次のようになります。タイプ  $(g, n)$  のグラフで辺を一つだけ持ったものを考えましょう。まずこの辺に単位元  $\mathbf{1}$  を割り当て、そしてその辺を切断します。切断によって新たに足が二本追加されます。この辺切断の過程は、安定曲線の唯一の特異点を解消し、得られた正則点 2 点を指定点に追加することに対応します。次に  $\delta(\mathbf{1})$  を新たな二本の足に割り当てます。こうして得られた値を  $\Omega_{g,n}$  の貼り合わせの射による引き戻しと同一視するのです。

**命題 4.4** (2D TQFT が CohFT の例であること). 2D TQFT は  $H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, K)$  に値を取る CohFT です。2D TQFT  $(A, \omega_{g,\bar{m},n})$  を一つ取りましょう。すると、 $\omega_{g,n} = \omega_{g,\bar{n},0}$  は CohFT 公理を充します。ここで、 $K = H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, K)$  と同一視します。

**証明.**  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  は連結なので、三種類の射 (3.4) と (3.5) と (3.6) とは全て 0 次コホモロジーの同型を引き起こします。従って、公理 CohFT 1-3 はより簡単な

$$(4.4) \quad \omega_{g,n+1}(v_1, \dots, v_n, \mathbf{1}) = \omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n),$$

$$(4.5) \quad \omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{a,b} \omega_{g-1,n+2}(v_1, \dots, v_n, e_a, e_b) \eta^{ab},$$

$$(4.6) \quad \omega_{g_1+g_2, |I|+|J|}(v_I, v_J) = \sum_{a,b} \eta^{ab} \omega_{g_1, |I|+1}(v_I, e_a) \cdot \omega_{g_2, |J|+1}(v_J, e_b)$$

に帰着されます。証明したいのは、 $\omega_{g,n} = \omega_{g,\bar{n},0}$  を仮定すると、(4.4)-(4.6) が TQFT の部分的縫合公理 (2.8) の帰結として導かれるということです。

$\omega_{0,\bar{0},1} = \mathbf{1}$  なので、(2.8) から

$$\omega_{g,\overline{n+1},0} \circ_{(n+1)} \omega_{0,\bar{0},1} = \omega_{g,\bar{n},0} = \omega_{g,n} : A^{\otimes n} \rightarrow K$$

が従います。すなわち (4.4) です。ここで、 $\circ_{(n+1)}$  は  $\omega_{g,\overline{n+1},0}$  の独立変数の  $(n+1)$  番目の場所で合成をすることを表します。次に、 $\omega_{0,\bar{0},2} : K \rightarrow A \otimes A$  を決めねばなりません。 $\omega_{0,\bar{0},2} = \omega_{0,\bar{1},2} \circ \omega_{0,\bar{0},1}$  なので、 $\omega_{0,\bar{0},2}(\mathbf{1}) = \delta(\mathbf{1}) = \sum_{a,b} \eta^{ab} e_a \otimes e_b$  と計算されます。改めて  $\circ_{(n+1,n+2)}$  で最後の二つの変数での合成を取ると、(4.5)、すなわち

$$\omega_{g-1,\overline{n+2},0} \circ_{(n+1,n+2)} \omega_{0,\bar{0},2} = \omega_{g,\bar{n},0} : A^{\otimes n} \rightarrow K$$

が得られます。もし互いに疎な変数の集合  $v_I$  と  $v_J$  とが与えられたならば、 $\omega_{0,\bar{0},2}$  との合成を二つの異なる写像に作用させて、

$$(\omega_{g_1,\overline{|I|+1},0} \otimes \omega_{g_2,\overline{|J|+1},0}) \circ \omega_{0,\bar{0},2} = \omega_{g_1+g_2,\overline{|I|+|J|},0} : A^{\otimes(|I|+|J|)} \rightarrow K$$

が得られます。これは (4.6) です。

ここで、線型写像

$$\omega_{g,m+n} : A^{\otimes m} \otimes A^{\otimes n} \rightarrow K$$

は  $A^{\otimes m} \rightarrow (A^*)^{\otimes n}$  と同値であることに注意します。従って  $\omega_{g,\bar{m},n}$  を from  $\omega_{g,m+n}$  から

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccc} A^{\otimes m} & \xrightarrow{\omega_{g,m+n}} & (A^*)^{\otimes n} \xrightarrow{(\lambda^{-1})^{\otimes n}} A^{\otimes n} \\ \parallel \downarrow & & \downarrow \parallel \\ A^{\otimes m} & \xrightarrow{\omega_{g,\bar{m},n}} & A^{\otimes n} \end{array}$$

を用いて再構成できます。ここで、 $\lambda : A \xrightarrow{\sim} A^*$  は同型 (1.3) です。 $g = 0, m = 2, n = 1$  の場合に (4.7) を当てはめれば、

$$\lambda^{-1} \omega_{0,3}(v_1, v_2, \cdot) = \omega_{0,\bar{2},1}(v_1, v_2) = v_1 v_2$$

が全ての  $v_1, v_2 \in A$  に対して成り立ちます。すなわち、

$$(4.8) \quad \omega_{0,3}(v_1, v_2, v_3) = \eta(v_1 v_2, v_3) = \epsilon(v_1 v_2 v_3)$$

が成立します。これで証明が完了します。  $\square$

逆に CohFT を 0 次コホモロジーに制限したものは 2D TQFT です。

**命題 4.5** (CohFT の 0 次コホモロジーへの制限). フロベニウス代数  $A$  上の  $CohFT(A, \Omega_{g,n})$  を一つ固定します。フロベニウス代数  $A$  自体一つの  $2D TQFT(A, \omega_{g,\bar{m},n})$  を定めます。今

$$r : H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, K) \longrightarrow H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, K) = K$$

でコホモロジー環からその 0 次部分への制限を表し、

$$(4.9) \quad \omega_{g,n} = r \circ \Omega_{g,n} : A^{\otimes n} \longrightarrow K$$

と定義しましょう。この時、写像間の等式

$$(4.10) \quad \omega_{g,n} = \omega_{g,\bar{n},0} : A^{\otimes n} \longrightarrow K$$

が  $2g - 2 + n > 0$  の範囲の  $(g, n)$  について成立します。すなわち、 $CohFT$  の 0 次コホモロジーへの制限はフロベニウス代数  $A$  で定められた  $2D TQFT$  に一致します。

**証明.** 私たちはすでに  $(A, \omega_{g,\bar{m},n})$  が  $H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, K)$  に値を持つ CohFT を定めることを上に見ました。証明したいのは、この CohFT が、私たちが出発した与えられた CohFT の 0 次部分への制限と一致していることです。まず、 $\omega_{g,n}$  を非安定領域へ

$$(4.11) \quad \omega_{0,1} = \epsilon : A \longrightarrow K, \quad \omega_{0,2} = \eta : A^{\otimes 2} \longrightarrow K$$

として拡張します。(2.4) と (4.11) とから (4.10) が  $\omega_{0,1}$  と  $\omega_{0,2}$  については成立することが分かります。一般の場合の (4.10) は  $3g - 3 + n$  に関する数学的帰納法で証明されます。ここで、 $\omega_{0,3}$  の定義が正しくなされていることが肝心です。これは (4.5) と (4.6) とが  $\omega_{g,n}$  を  $3g - 3 + n$  がより小さいような  $g$  と  $n$  とから帰納的に定義していることによります。実際

- Case of (4.5):  $3g - 3 + n = [3(g - 1) - 3 + (n + 2)] + 1$ ,
- Case of (4.6):  $3(g_1 + g_2) - 3 + |I| + |J| = [3g_1 - 3 + |I| + 1] + [3g_2 - 3 + |J| + 1] + 1$

なので、帰納的定義では右辺の複雑度  $3g - 3 + n$  が常に 1 だけ小さくなっています。

最後に、 $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$  が一点であることを思い起こしましょう。これは前に  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  を調べた時に注意しました。従って、コホモロジーは 0 次元だけなので、 $\omega_{0,3} = \Omega_{0,3}$  が成り立ちます。よって

$$(4.12) \quad \omega_{0,3}(v_1, v_2, v_3) = \eta(v_1 v_2, v_3)$$

が成立し、(4.10) は全ての  $(g, n)$  について正しいことが分かります。こうして証明が完成しました。  $\square$

**注意 4.6.** すでに私たちは 2D TQFT が、

- (1) 可換フロベニウス代数  $A$ 、
- (2) TQFT 公理系を充す写像のシステム  $\{\omega_{g,\bar{m},n}\}$ 、

のどちらを使っても同じように定義されることを見ました。上述した二つの命題はさらに

- (3) CohFT の 0 次部分  $(A, \omega_{g,n})$

が同様に 2D TQFT を与えることを示しています。以下では最も扱いやすい  $(A, \omega_{g,n})$  を用いて 2D TQFT を表すことにします。

**命題 4.7.**  $2D TQFT$  の種数 0 の値は

$$(4.13) \quad \omega_{0,n}(v_1, \dots, v_n) = \epsilon(v_1 \cdots v_n)$$

で与えられます。

**証明.** これは CohFT 3 と (1.9) とからの直接の帰結です。  $\square$

TQFT[4, 97] のもともとの目的の一つは閉多様体  $N$  の位相不変量  $Z(N)$  を同定することでした。2次元の場合には種数  $g$  の向きづけられた閉曲面  $\Sigma_g$  の位相不変量が

$$(4.14) \quad Z(\Sigma_g) := \epsilon(\lambda^{-1}(\omega_{g,1}))$$

として得られます。ここで  $\omega_{g,1} : A \rightarrow K$  は  $A^*$  の元で、 $\lambda : A \xrightarrow{\sim} A^*$  は (1.3) で与えた自然な同型です。

**命題 4.8.** 位相不変量 (4.14) は (1.12) で定義したオイラー元  $\mathbf{e} \in A$  を用いて

$$(4.15) \quad Z(\Sigma_g) = \epsilon(\mathbf{e}^g),$$

と計算されます。

**補助定理 4.9.** オイラー元は次の式でも与えられます。

$$(4.16) \quad \mathbf{e} := m \circ \delta(1) = \lambda^{-1}(\omega_{1,1}).$$

**証明.** これは

$$\omega_{1,1}(v) = \sum_{a,b} \omega_{0,3}(v, e_a, e_b) \eta^{ab} = \sum_{a,b} \eta(v, e_a e_b) \eta^{ab} = \eta(v, \mathbf{e})$$

が全ての  $v \in A$  で成り立つことから従います。  $\square$

**命題 4.8 の証明.**  $g = 1$  の場合は上の補助定理から (4.15) の成立が分かります。一般には

$$\begin{aligned} \omega_{g,1}(v) &= \sum_{a,b} \omega_{g-1,3}(v, e_a, e_b) \eta^{ab} \\ &= \sum_{i,j,a,b} \omega_{0,4}(v, e_a, e_b, e_i) \omega_{g-1,1}(e_j) \eta^{ab} \eta^{ij} \\ &= \sum_{i,j,a,b} \eta(v e_a e_b, e_i) \omega_{g-1,1}(e_j) \eta^{ab} \eta^{ij} \\ &= \sum_{i,j} \eta(v \mathbf{e}, e_i) \omega_{g-1,1}(e_j) \eta^{ij} \\ &= \omega_{g-1,1}(v \mathbf{e}) \\ &= \omega_{1,1}(v \mathbf{e}^{g-1}) \\ &= \eta(v \mathbf{e}^{g-1}, \mathbf{e}) = \eta(v, \mathbf{e}^g) \end{aligned}$$

なので種数に関する数学的帰納法が使え、証明が完了します。  $\square$

位相幾何学的には、種数  $g$  の閉曲面は  $g$  個の入力境界円を持った種数 0 の曲面に  $g$  個の種数 1 で 1 個の出力円を持った曲面を縫い合わせて構成されます。オイラー元は種数 1 で一つだけ出力円を持った曲面の出力値なので、それを入力させて同じ結果

$$Z(\Sigma_g) = \omega_{0,g}(\overbrace{\mathbf{e}, \dots, \mathbf{e}}^g)$$

を得ることができます。

**定理 4.10.** 2D TQFT の値は

$$(4.17) \quad \omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n) = \epsilon(v_1 \cdots v_n \mathbf{e}^g)$$

で与えられます。

**証明.** 命題 4.8 の証明と同じ方法で

$$\begin{aligned} \omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n) &= \omega_{1,n}(v_1 \mathbf{e}^{g-1}, v_2, \dots, v_n) \\ &= \sum_{a,b} \omega_{0,n+2}(v_1 \mathbf{e}^{g-1}, v_2, \dots, v_n, e_a, e_b) \eta^{ab} \\ &= \epsilon(v_1 \cdots v_n \mathbf{e}^g) \end{aligned}$$

が得られ、証明が完了します。  $\square$

**注意 4.11.** モジュライ空間  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  は連結で、その 0 次コホモロジー群をどの次元の連結境界滑層に制限しても同型なので、 $\omega_{g,n}$  を計算するのに一番都合の良い安定グラフを使うことができます。例えば、Figure 4.2 の右端のグラフを用いてみましょう。それは種数 0 の頂点一つを持ち、それに  $n$  個の足と  $g$  個のループが付けられています。ループの一つ一つにフロベニウス代数の単位元  $\mathbf{1}$  を付与し、ループをその中央で切断します。その効果を CohFT 2 と (4.13) とを用いて計算すれば、やはり同じ結果 (4.17) が得られます。

## 5. セルグラフの圏

上述した 2D TQFT の構成では、積と余積の演算は三つの境界円を持った種数 0 の向きづけられた曲面に対応付けられました。本節ではすべての有限次元のフロベニウス代数の情報を含む対象としてリボングラフの圏を導入します。不必要な混乱を避けるため、リボングラフの代わりに本稿ではセルグラフという用語を使います。リボングラフは位相曲面の複素構造を統一して表現するのに向いています ([67, 81] 参照)。私たちが曲面上のグラフを使うのは安定曲線の退化を表すためであり、また、リボングラフの時のように各面を指定するのではなく、各頂点を指定するのです。

**定義 5.1** (セルグラフ). 種数  $g$  の向きづけられた境界のないコンパクト連結位相曲面の単体分割の 1-切片 (1-スケルトン) のことを位相タイプ  $(g, n)$  を持つ連結セルグラフと呼びます。ここで、 $n$  は順序付けられた 0 次元単体の数を表します。グラフ理論での呼び名に従って、0 次元単体を頂点、1 次元単体を辺、2 次元単体を面と呼びます。タイプ  $(g, n)$  の連結セルグラフすべての集合を  $\Gamma_{g,n}$  で表します。各辺はその中点で二つの半边が繋がったものと考えます。

**注意 5.2.**

- リボングラフ、あるいはグロタンディークのデッサン・ダンファンンの双対がセルグラフです。セルグラフで頂点に順序を与えることは、リボングラフで各面を順序付けることに対応します。リボングラフは埋め込まれたグラフ (embedded graph) や地図 (map) などと呼ばれることがあります。
- 二つの曲面の位相同型が一つの単体分割をもう一つの単体分割に移し、0 次元単体の順序を保つ時、二つのセルグラフを同一視することにします。セルグラフの自己同型は従って各頂点の周りでの半边の巡回群の直積の元に限られます。

**定義 5.3** (有向セルグラフ). セルグラフが有向グラフでもある時、有向セルグラフと言います。有向グラフとは各辺に矢印がつけられたグラフです。それは辺をなす二つの半边に順序を入れることと同じです。タイプ  $(g, n)$  の有向セルグラフの全体を  $\vec{\Gamma}_{g,n}$  で表します。

**注意 5.4.** 有向セルグラフは籐の一種です。籐自体が向きづけられた曲面上に描かれているので、その分の情報が付加されています。

$n$  個の頂点を順序付けるのに普通は  $n$ -集合

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

を用いますが、 $n$  元からなるどんな全順序集合を用いても同じです。頂点を名付ける理由は各頂点に  $K$ -ベクトル空間  $A$  の元を付与するためです。本稿ではセルグラフ  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  が線型写像

$$(5.1) \quad \Gamma_{g,n} \ni \gamma : A^{\otimes n} \longrightarrow K$$

を与える場合のみを考慮しますが、[36] で扱われるような場合には写像  $\gamma$  の値域をもっと一般にすることも必要となります。

辺縮約変換は漸化式を通して様々なグラフの数え上げに有効な手段を与えます。私たちは、同じ辺縮約変換に代数的な意味を与えることを考えます。

**定義 5.5** (辺縮約変換). セルグラフには次の二つの種類の辺縮約変換が作用します。

- **ECO 1:** セルグラフ  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  に図5.1のような  $p_i$  から出て  $p_j$  に至る有向辺  $\vec{E} = \overrightarrow{p_i p_j}$  が含まれているならば、 $\gamma$  の中で  $\vec{E}$  を縮約して、 $p_i$  を  $p_j$  に重ねることが出来ます。ラベル  $i$  を新しい頂点に与え、それをまた  $p_i$  と呼ぶことにします。こうして頂点数が一つ少ないグラフ  $\gamma' \in \Gamma_{g,n-1}$  が得られます。このプロセスではグラフが描かれた曲面の位相は変わらないので、種数も保たれます。

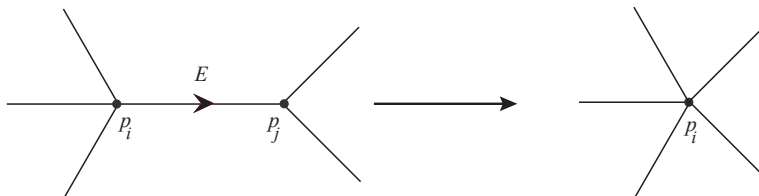


FIGURE 5.1. 辺縮約変換 ECO 1. 異なる2点  $p_i$  と  $p_j$  とを結ぶ辺が一点  $p_i$  に縮約されている。

- 辺と同じ記号  $\vec{E}$  を用いて縮約作用

$$(5.2) \quad \vec{E} : \Gamma_{g,n} \ni \gamma \mapsto \gamma' \in \Gamma_{g,n-1}$$

を表します。

- **ECO 2:** グラフ  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  の頂点  $p_i$  から出る向きづけられた辺がループ  $\vec{L}$  になっているとしましょう。曲面の単体分割の1-切片に含まれたループは位相的サイクルなので、それを縮約すれば曲面の位相構造が必然的に変化します。まず曲面上の点  $p_i$  の近傍でループ  $\vec{L}$  の矢印が上向きになるように曲面を置きます。 $p_i$  の周りで  $\vec{L}$  は近傍を左右二つの領域に分割するので、 $\vec{L}$  に属さない  $p_i$  に繋がった半辺も同じように左右二つのグループに分けられます。 $\vec{L}$  を縮約するに当たって、 $p_i$  を2点  $p_{i_1}$  と  $p_{i_2}$  とに分離し、ループに関して左側の半辺は  $p_{i_1}$  に繋がりと、右側のもは  $p_{i_2}$  に繋がるようにします。こうしてできたグラフ図5.2を  $\gamma'$  で表しましょう。

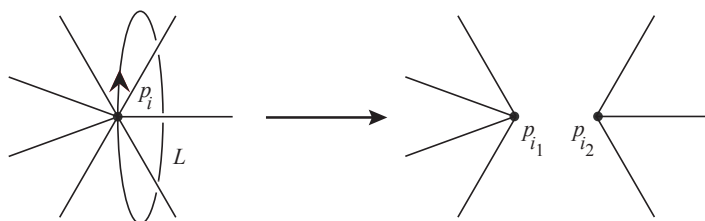


FIGURE 5.2. 辺縮約変換 ECO 2. 縮約される辺がループ  $\vec{L}$  の場合。頂点  $p_i$  の周りでループの矢印が上向きになるようにする。 $p_i$  は左側の  $p_{i_1}$  と右側の  $p_{i_2}$  とからなる新しい2頂点に分離する。 $p_i$  に繋がっていた半辺は左右どちらかの新頂点に繋がる二つのグループに分けられる。

- もし  $\gamma'$  が連結ならそれは  $\Gamma_{g-1,n+1}$  に属します。ループ  $\vec{L}$  をハンドルループと呼びます。同じ記号  $\vec{L}$  で辺縮約変換

$$(5.3) \quad \vec{L} : \Gamma_{g,n} \ni \gamma \mapsto \gamma' \in \Gamma_{g-1,n+1}$$

を表します。

- もし  $\gamma'$  が連結でないなら、種数  $g$  と頂点  $p_i$  の補集合の分割

$$(5.4) \quad \begin{cases} g = g_1 + g_2 \\ I \sqcup J = \{1, \dots, \hat{i}, \dots, n\} \end{cases}$$

が存在して、 $\gamma' = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_{g_1,|I|+1} \times \Gamma_{g_2,|J|+1}$  となります。辺縮約変換を同じ記号

$$(5.5) \quad \vec{L} : \Gamma_{g,n} \ni \gamma \mapsto (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_{g_1,|I|+1} \times \Gamma_{g_2,|J|+1}$$

で表すことにします。この場合、ループ  $\vec{L}$  を切断ループと呼びます。ラベルの集合  $I$  に属する頂点は種数  $g_1$  の連結成分をなし、 $J$  でラベルづけられた頂点は種数  $g_2$  の連結成分に属します。 $(I_-, i, I_+)$  (あるいは  $(J_-, i, J_+)$ ) で  $I \sqcup \{i\}$  を (あるいは  $J \sqcup \{i\}$  を) 増加する順に並べ替えたものとしましょう。 $p_i$  を分離した後  $i_1, i_2$  という二つのラベルを与えましたが、それは二つの相異なるグラフに属するので、 $p_{i_1} \in \gamma_1$  のラベルにも  $p_{i_2} \in \gamma_2$  のラベルにも全く同じ  $i$  を与えることができます。ループ  $\vec{L}$  の矢印は 2 頂点  $p_{i_1}$  and  $p_{i_2}$  の順序に翻訳されたわけです。

**注意 5.6.** グラフ  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  の複雑度を表す量  $m(\gamma) = 2g - 2 + n$  を導入しましょう。辺縮約変換は、どのタイプであれ複雑度  $m(\gamma)$  を丁度 1 だけ減らすことができます。実際 ECO 1 なら、

$$m(\gamma') = 2g - 2 + (n - 1) = m(\gamma) - 1$$

となります。また、ECO 2 をハンドルループに作用させるなら

$$m(\gamma') = 2(g - 1) - 2 + (n + 1) = m(\gamma) - 1$$

となり、切断ループの場合には

$$+) \quad \frac{2g_1 - 2 + |I| + 1}{2g_1 + 2g_2 - 4 + |I| + |J| + 2} = 2g - 2 + n - 1$$

となるので、確かに複雑度は 1 だけ減少しています。

有向セルグラフを導入する動機は非可換フロベニウス代数を扱うためです。共通部分を持たない二つの集合の和集合を取る操作は対称的です。したがって、2D TQFT は必然的に可換フロベニウス代数を与えます。有向グラフを用いる私たちの定式化の利点は非可換フロベニウス代数とその非可換テンソル積を扱うことができる点にあります。

以下では、理論展開を簡単なものに保つため、矢印なしのセルグラフだけを扱います。従って私たちは通常の 2D TQFT と可換フロベニウス代数だけを回復することになります。一般論は [36] で展開される予定です。

いよいよセルグラフの圏の導入に進むことにしましょう。私たちがこれから展開する話で一番型破りなのは、セルグラフ間の射として単体写像を採用しない点ではないかと思われる。セルグラフ  $\gamma$  から  $\gamma'$  への単体写像  $f: \gamma \rightarrow \gamma'$  とは 1 次元単体複体の間の単体構造を保つ写像のことであることを思い起こしましょう。写像  $f$  は  $\gamma$  の頂点を  $\gamma'$  の頂点に写し、 $\gamma$  の辺は  $\gamma'$  の辺あるいは頂点に元の繋がり具合を保つように写します。特に、単体写像はセルグラフが描かれた曲面の位相から誘導されるセルグラフ自体の位相に関して連続です。

**定義 5.7** (セルグラフの圏). 次の要領でセルグラフの圏  $\mathcal{CG}$  を定義します。

- 圏  $\mathcal{CG}$  の対象の集合はセルグラフ全体の集合

$$(5.6) \quad \text{Ob}(\mathcal{CG}) = \coprod_{g \geq 0, n > 0} \Gamma_{g,n}$$

と定めます。

- セルグラフ間の射  $f \in \text{Hom}(\gamma, \gamma')$  は辺縮約変換とセルグラフの自己同型の有限個の合成写像として定義します。特に  $\text{Hom}(\gamma, \gamma) = \text{Aut}(\gamma)$  です。もし辺の縮約と自己同型の合成とで  $\gamma$  を  $\gamma'$  に変換することができないならば、たとえセルグラフ間に単体写像があったとしても、 $\text{Hom}(\gamma, \gamma') = \emptyset$  と定義することにします。

**注意 5.8.** 三つ組  $(\mathcal{CG}, \sqcup, \emptyset)$  は対称モノイド圏を為します。

**注意 5.9.** セルグラフの自己同型と ECO 1 とは単体写像ですが、ECO 2 はそうではありません。ECO 2 を合成成分に含む射は一般には単体写像ではありません。連続写像ではないのです。



例 5.10. ここで射の例を幾つか与えます。頂点の集合は順序付けられており、自己同型は順序を保つことに注意します。

$$(5.7) \quad \text{Hom}(\bullet, \bullet) = \{id\}.$$

$$(5.8) \quad \text{Hom}(\bullet, \bullet \rightarrow \bullet) = \emptyset.$$

$$(5.9) \quad \text{Hom}(\overset{E_1}{\bullet} \xrightarrow{\bullet} \overset{E_2}{\bullet}, \bullet \rightarrow \bullet) = \{E_1, E_2\}.$$

$$(5.10) \quad \text{Hom}(\overset{E_1}{\bullet} \xrightarrow{\bullet} \overset{E_2}{\bullet}, \bullet) = \{E_1 E_2 = E_2 E_1\}.$$

$$(5.11) \quad \text{Hom}\left(\begin{array}{c} \overset{E_1}{\bullet} \\ \circlearrowleft \\ \underset{E_2}{\bullet} \end{array}, \bullet\right) = \{E_1, E_2 = \sigma(E_1)\}.$$

$$(5.12) \quad \text{Hom}\left(\begin{array}{c} \overset{E_1}{\bullet} \\ \bullet \\ \underset{E_2}{\bullet} \end{array}, \bullet \bullet\right) = \{E_1 E_2 = E_2 E_1\}.$$

例 (5.10) では、合成射  $E_1 E_2 := E_1 \circ E_2$  と  $E_2 E_1 := E_2 \circ E_1$  とは同じものです。これは両者とも同じ結果  $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$  を引き起こす事から分かります。例 (5.11) と (5.12) の左側のセルグラフは  $E_1$  と  $E_2$  を入れ替える自己同型を持っています。それは辺縮約変換としての等式  $E_2 = E_1 \circ \sigma = \sigma(E_1)$  を誘導します。例 (5.11) には 2 : 1 の被覆写像がある事に注意しましょう。この単体被覆写像は  $\begin{array}{c} \overset{E_1}{\bullet} \\ \circlearrowleft \\ \underset{E_2}{\bullet} \end{array}$  の辺  $E_1$  と  $E_2$  とを  $\bullet \rightarrow \bullet$  のたった一つのループに写し、また、左のグラフの二つの頂点を右のグラフの唯一の頂点に写します。この写像は辺縮約変換ではないので、セルグラフ間の射ではありません。例 (5.12) の射は連続写像ではないので、単体写像ではありません。

記号  $\mathbf{Vect}$  で  $K$  上の有限次元ベクトル空間のなす圏を表します。三つ組

$$\mathcal{C} = (\mathbf{Vect}, \otimes, K)$$

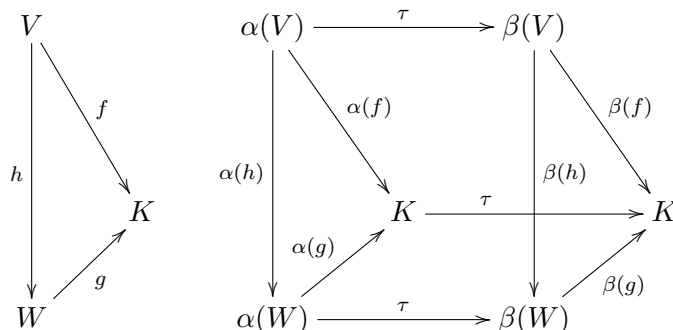
はモノイド圏になります。簡単のため、私たちは対称テンソル積のみを考慮しているので、 $\mathcal{C}$  は対称モノイド圏です。 $\mathbf{Vect}$  の  $K$ -対象とはベクトル空間  $V$  と線型写像  $\epsilon : V \rightarrow K$  の組  $(V, \epsilon : V \rightarrow K)$  の事を指します。 $\mathbf{Vect}$  の  $K$ -対象のなす圏を  $\mathbf{Vect}/K$  で表します。この圏は唯一の終対象  $(K, id : K \rightarrow K)$  を持つので、

$$\mathcal{C}/K = (\mathbf{Vect}/K, \otimes, (K, id : K \rightarrow K))$$

はまたモノイド圏になります。モノイド圏  $\mathcal{C}/K$  の自己関手圏を

$$(5.13) \quad \mathcal{F}un(\mathcal{C}/K, \mathcal{C}/K)$$

で表す事にしましょう。これはモノイド関手  $\alpha : \mathcal{C}/K \rightarrow \mathcal{C}/K$  をその対象とし、モノイド関手間の自然変換を射とする圏です。その関係を可換図式を用いて



と表す事ができます。ここで、左側の三角形は  $\mathcal{C}/K$  の二つの対象  $(V, f : V \rightarrow K)$  と  $(W, g : W \rightarrow K)$  と、その間の射  $h$  を示します。右側のプリズム型の図式はその三角形の二つのモノイド自己関手  $\alpha$  と  $\beta$  による像

$$V \mapsto \alpha(V), \quad V \mapsto \beta(V)$$

$$W \mapsto \alpha(W), \quad W \mapsto \beta(W)$$

と、それらの間の自然変換  $\tau: \alpha \rightarrow \beta$  を表しています。自己関手圏  $\mathcal{F}un(\mathcal{C}/K, \mathcal{C}/K)$  の終対象は

$$(5.14) \quad \phi: (V, f: V \rightarrow K) \rightarrow (K, id_K: K \rightarrow K)$$

で、それは定義域  $\mathcal{C}/K$  の全ての対象を  $\mathcal{C}/K$  の終対象に写す自己関手です。

**定義 5.11** (自己関手圏のモノイド圏構造、[36]). 自己関手圏  $\mathcal{F}un(\mathcal{C}/K, \mathcal{C}/K)$  に、テンソル積と自己関手終対象 (5.14) を単位対象として再びモノイド圏構造を導入します。

**注意 5.12.** 任意の圏  $\mathcal{C}$  の自己関手圏  $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{C})$  は自然に関手の合成と恒等関手とによってモノイド圏を為しますが、ここで私たちが扱うモノイド圏の構造はそれとは全く違うものであることに留意してください。本稿では自己関手圏  $\mathcal{F}un(\mathcal{C}/K, \mathcal{C}/K)$  は常に定義 5.11 で与えられたモノイド圏の構造を入れたものとして扱います。

**定義 5.13** (ECO 関手、[36]). ECO 関手を、モノイド関手

$$(5.15) \quad \omega: \mathcal{C}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{C}/K, \mathcal{C}/K)$$

であって次の条件を充すものとして定義します。

- 頂点一つだけで辺を全く含まないグラフ  $\bullet \in \Gamma_{0,1}$  は恒等関手

$$(5.16) \quad \omega(\bullet) = id: \mathcal{C}/K \rightarrow \mathcal{C}/K$$

に対応します。

- 各グラフ  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  は関手

$$(5.17) \quad \omega(\gamma): (V, \epsilon: V \rightarrow K) \mapsto (V^{\otimes n}, \omega_V(\gamma): V^{\otimes n} \rightarrow K)$$

に対応します。

- 射としての辺縮約変換は関手の間の自然変換に対応します。

ここで、フロベニウス対象の定義を与えましょう。

**定義 5.14** (フロベニウス対象). 対称モノイド圏  $(\mathcal{C}, \otimes, K)$  のフロベニウス対象とは、対象  $V \in Ob(\mathcal{C})$  と射

$$m: V \otimes V \rightarrow V, \quad \mathbf{1}: K \rightarrow V, \quad \delta: V \rightarrow V \otimes V, \quad \epsilon: V \rightarrow K$$

の組  $(V, m, \mathbf{1}, \delta, \epsilon)$  であって、次の条件を充すものとして定義されます。

- $(V, m, \mathbf{1})$  は  $\mathcal{C}$  のモノイド対象を為します。
- $(V, \delta, \epsilon)$  は  $\mathcal{C}$  の余モノイド対象を為します。

さらに、射  $m$  と  $\delta$  とは両立条件 (1.7)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V \otimes V \otimes V & & \\
 & \nearrow^{id \otimes \delta} & & \searrow^{m \otimes id} & \\
 V \otimes V & \xrightarrow{m} & V & \xrightarrow{\delta} & V \otimes V \\
 & \searrow^{\delta \otimes id} & & \nearrow^{id \otimes m} & \\
 & & V \otimes V \otimes V & & 
 \end{array}$$

を充します。

私たちは  $\mathbf{Vect}$  の  $K$ -対象からなるモノイド圏を考えているので、アприオリには  $V$  の中に  $\mathbf{1}$  という概念は含まれていません。射  $\mathbf{1}: K \rightarrow V$  の存在は非退化条件を要求します。次の定理は [36] で証明されました。

**定理 5.15** (フロベニウス対象の生成、[36]). 剛性モノイド圏  $\mathcal{C}/K$  の対象  $(V, \epsilon: V \rightarrow K)$  は、関手  $\omega_V(\bullet \rightarrow \bullet): V \otimes V \rightarrow K$  が  $V$  上に非退化対称双線型形式を定めるとき、フロベニウス対象となります。

## 6. セルグラフから 2D TQFT へ

第4節の結果から、2D TQFT はフロベニウス代数  $A$  と、全ての  $g \geq 0$ 、 $n \geq 1$  について与えられた線型写像

$$(6.1) \quad \omega_{g,n} : A^{\otimes n} \longrightarrow K$$

の組  $(A, \omega_{g,n})$  で然るべき条件を充すものとしても定義されることが分かります。その条件とは次のようなものでした。まず、 $2g - 2 + n > 0$  のとき  $(A, \omega_{g,n})$  は CohFT の公理を充します。さらに、条件

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \omega_{0,1} &= \epsilon : A \longrightarrow K, \\ \omega_{0,2} &= \eta : A \otimes A \longrightarrow K \end{aligned}$$

を課します。この節では、2D TQFT の全く別の新しい定式化を与えます。私たちのアイディアはセルグラフを基にした別の公理系を与えることです。最終目標は、2D TQFT、CohFT、ミラー対称性、位相的漸化式、量子曲線といった概念を統一的に関連付けて捉えることにあります。量子曲線は本稿の第2部で導入されます。上に述べた関連は [36] で展開される予定です。

**定理 6.1** (グラフ不変性、[32]). 今、 $(A, \epsilon : A \longrightarrow K)$  が定義 5.13 で与えられた ECO 関手  $\omega$  に関してフロベニウス対象であるとしましょう。この時、全ての連結セルグラフ  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  は常に同じ写像

$$(6.3) \quad \omega_A(\gamma) : A^{\otimes n} \ni v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto \epsilon(v_1 \cdots v_n \mathbf{e}^g) \in K$$

を引き起こします。ここで、 $\mathbf{e}$  は (1.12) で与えられたオイラー元です。

**系 6.2** (ECO は 2D TQFT を導く). 任意の  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  によって

$$\omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n) = \omega_A(\gamma)(v_1, \dots, v_n)$$

と定義すれば、 $\{\omega_{g,n}\}$  は 2D TQFT を与えます。

**証明.** 写像 (6.3) の値は (4.17) と同じなので、 $\{\omega_{g,n}\}$  は 2D TQFT を与えるのです。□

それでは定理 6.1 の証明に移りましょう。まずグラフ不変性の三つの例を与えることから始めます。

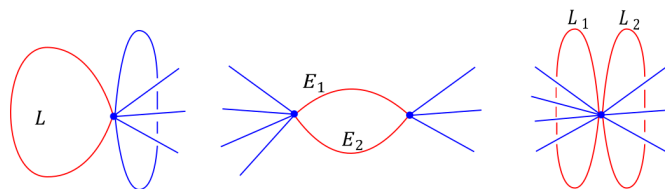


FIGURE 6.1. 円盤の境界に置かれた辺の除去。

**補助定理 6.3** (円盤の境界上の辺の除去). セルグラフ  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  を一つとります。

- **Case 1.** 円盤を囲むループ  $L$  が  $\gamma$  に含まれている場合。  $\gamma$  から単純にループ  $L$  を取り除いたグラフを  $\gamma' \in \Gamma_{g,n}$  で表します。私たちはループを縮約しているわけではないので、グラフのタイプは変わりません。
- **Case 2.** グラフ  $\gamma$  の相異なる 2 頂点  $p_i, p_j$  が円盤を囲む 2 辺  $E_1$  と  $E_2$  の境界を為す場合。 辺  $E_2$  を  $\gamma$  から消し去ったグラフを  $\gamma' \in \Gamma_{g,n}$  で表します。ここでも、 $E_2$  を縮約しているわけではありません。
- **Case 3.**  $\gamma$  内の互いにイソトープな二つのループ  $L_1, L_2$  が頂点  $p_i$  に繋がっている場合。ループ  $L_2$  を  $\gamma$  から取り除いたグラフを  $\gamma' \in \Gamma_{g,n}$  で表します。

図 6.1 を参照してください。上のどの場合でも、

$$(6.4) \quad \omega_A(\gamma)(v_1, \dots, v_n) = \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_n)$$

が成り立ちます。

証明. Case 1. 頂点  $p_i$  に繋がったループ  $L$  の縮約は、非連結なグラフ  $(\gamma_0, \gamma') \in \Gamma_{0,1} \times \Gamma_{g,n}$  を引き起こします。ここで、 $\gamma_0$  はただ 1 点のみからなるグラフです。ECO 1 に対応する自然変換から求める等式が導かれます。

$$\begin{aligned} \omega_A(\gamma)(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i, e_k e_\ell) \eta^{ka} \eta^{lb} \omega_A(\gamma_0)(e_a) \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, e_b, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i, e_k e_\ell) \eta^{ka} \eta^{lb} \eta(1, e_a) \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, e_b, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{b,k,\ell} \eta(v_i, e_k e_\ell) \delta_1^{ka} \eta^{lb} \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, e_b, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{b,\ell} \eta(v_i, e_\ell) \eta^{lb} \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, e_b, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &= \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Case 2.  $\gamma$  内で辺  $E_1$  を縮約すると、 $E_2$  は円盤を囲むループになるので、Case 1 を用いて取り除くことができます。縮約で得られた新しい頂点には変数  $v_i v_j$  が付与されています。ここで辺  $E_1$  を回復すれば、グラフは  $\gamma$  から  $E_2$  を取り除いたものと同じになります。したがって、(6.4) が成り立ちます。

Case 3. ループ  $L_1$  の縮約で  $L_2$  は円盤を囲むループになるので、また Case 1 を用いて取り除くことができます。そのあとで  $L_1$  を回復すれば、グラフは  $\gamma$  から  $L_2$  を取り除いたものと同じになり、(6.4) が成り立ちます。□

注意 6.4. この三つのケースは双対リボングラフの言葉では、まさに次数 1 と 2 の頂点を取り除くことに他なりません。([81] 参照。)

定義 6.5 (被約セルグラフ). どのループや三角形も円盤を囲まないとき、セルグラフを被約セルグラフと呼ぶことにします。その双対リボングラフは次数 1 と 2 の頂点を持ちません。

補助定理 6.3. Case 1 から  $\Gamma_{0,1}$  の全てのグラフ  $\gamma$  は同じ写像

$$(6.5) \quad \omega_A(\gamma)(v) = \epsilon(v)$$

を与えることが分かります。同様に Case 2 と 3 から  $\gamma \in \Gamma_{0,2}$  は常に

$$\omega_A(\gamma)(v_1, v_2) = \eta(v_1, v_2)$$

を与えます。これは、 $\gamma$  から 2 頂点をつなぐ辺一つ以外の全ての辺とループとを取り除くことができるからです。ECO 1 に対応する自然変換から、 $\omega_A(\gamma)$  の値が  $\epsilon(v_1 v_2) = \eta(v_1, v_2)$  であることが導かれます。

定理 6.1 の証明.  $m = 2g - 2 + n$  に関する数学的帰納法で証明を行います。初期命題は  $m = -1$ 、つまり  $(g, n) = (0, 1)$  の場合で、(6.5) により成立することがわかります。そこで、 $2g - 2 + n < m$  を充す全ての  $(g, n)$  について (6.3) が成立すると仮定しましょう。今、 $2g - 2 + n = m$  であるようなタイプ  $(g, n)$  を持つセルグラフ  $\gamma \in \Gamma_{g,n}$  を一つとります。もし  $\gamma$  が相異なる 2 頂点  $p_i$  と  $p_j$  を繋ぐ辺を持っているなら、その辺を縮約したものを  $\gamma'$  とすれば、帰納法の仮定から

$$\omega_A(\gamma)(v_1, \dots, v_n) = \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i v_j, v_{i+1}, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n) = \epsilon(v_1 \dots v_n e^g)$$

が従います。もしある頂点  $p_i$  に繋がったループを縮約するなら、ECO 2 に対応する自然変換はハンドルループか切断ループかによって二つの異なる結果を導きます。前者の場合は連結グラフ  $\gamma'$  が得られ、(1.9) と (1.13) とから

$$\begin{aligned} \omega_A(\gamma)(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i, e_k e_\ell) \eta^{ka} \eta^{lb} \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, e_a, e_b, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i e_k, e_\ell) \eta^{ka} \eta^{lb} \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, e_a, e_b, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a,k} \eta^{ka} \omega_A(\gamma')(v_1, \dots, v_{i-1}, e_a, v_i e_k, v_{i+1}, \dots, v_n) \\
&= \sum_{a,k} \eta^{ka} \epsilon(v_1 \cdots v_n \mathbf{e}^{g-1} e_a e_b) \\
&= \epsilon(v_1 \cdots v_n \mathbf{e}^g)
\end{aligned}$$

が従います。切断ループの場合には、ECO 2 はグラフの分割  $\gamma \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2)$  を誘導し、

$$\begin{aligned}
\omega_A(\gamma)(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i, e_k e_\ell) \eta^{ka} \eta^{\ell b} \omega_A(\gamma_1)(v_{I_-}, e_a, v_{I_+}) \omega_A(\gamma_2)(v_{J_-}, e_b, v_{J_+}) \\
&= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i, e_k e_\ell) \eta^{ka} \eta^{\ell b} \epsilon \left( e_a \prod_{c \in I} v_c \mathbf{e}^{g_1} \right) \epsilon \left( e_b \prod_{d \in J} v_d \mathbf{e}^{g_2} \right) \\
&= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i e_k, e_\ell) \eta^{ka} \eta^{\ell b} \eta \left( \prod_{c \in I} v_c, e_a \mathbf{e}^{g_1} \right) \epsilon \left( e_b \prod_{d \in J} v_d \mathbf{e}^{g_2} \right) \\
&= \sum_{a,k} \eta^{ka} \eta \left( \prod_{c \in I} v_c \mathbf{e}^{g_1}, e_a \right) \epsilon \left( v_i e_k \prod_{d \in J} v_d \mathbf{e}^{g_2} \right) \\
&= \epsilon \left( v_i \prod_{c \in I} v_c \mathbf{e}^{g_1} \prod_{d \in J} v_d \mathbf{e}^{g_2} \right) \\
&= \epsilon(v_1 \cdots v_n \mathbf{e}^{g_1+g_2})
\end{aligned}$$

が導かれます。従って、どのように ECO 1 や ECO 2 を作用させても常に同じ結果が得られます。これで証明が終わりました。□

## 7. TQFT-係数の位相的漸化式

フロベニウス代数  $A$  が多様体の大コホモロジー構造で与えられている時にはそれはグロモフ-ウィッテン理論と直接の繋がりを持っています。この場合、フロベニウス代数は基礎体上無限次元なので、第1部で考察している2D TQFTには対応しません。ただ、対象とする空間が0次元なら、グロモフ-ウィッテン理論は完全にTQFTで捉えられます。基本的な例の一つは空間が一点の場合、つまり  $A = \mathbb{Q}$  の場合で、それは  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  上のトートロジー類  $\psi$  の交叉数の関係式を与え、今の私たちの観点からは [32, 33] で扱われました。もう一つは有限群  $G$  の群環の中心  $A = ZC[G]$  の場合で、分類空間  $BG$  のグロモフ-ウィッテン不変量を与えます。これについては [36] で詳述します。

この節で扱いたいのは各頂点が  $v \in A$  で着色されたセルグラフの数え上げ問題です。私たちは辺縮約変換が組み合わせ論的關係式を与え、そのラプラス変換が位相的漸化式になることを見ます。フロベニウス代数による着色が定義 5.5 で与えられる辺縮約変換のもとで函手的であるという条件を課すと、前節で証明したように、色付けの過程がグラフと独立になるので、数え上げ問題は大幅に簡単化されます。答えは、タイプ  $(g, n)$  ごとにグラフの数を  $\epsilon(v_1 \cdots v_n \mathbf{e}^g)$  に掛けたものになります。

ところがここで問題が生じてしまいます。私たちは、重辺やループを許しているので、位相タイプを決めてもグラフの数は無限大なのです。数えているものが無限になってしまう時に用いる標準的手法がラプラス変換です。これはまさにラプラスによって、無限大を数えるために導入されたのでした。朝永の言う無限大のくりこみを、ファイマン図形で数え上げるのも同じ原理です。次数  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  の順序付けられた頂点を持つセルグラフの数を

$$(7.1) \quad \Gamma_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

で表しましょう。  $d = 0, 1, 2$  として、種数  $g$  の曲面の単体分割の  $d$  次元単体の数を  $c_d$  で表すと、オイラー標数の公式から、  $n = c_0$ 、  $\sum_{i=1}^n \mu_i = 2c_1$ 、  $2 - 2g = n - c_1 + c_2$  が成り立ちます。即ち、(7.1) が有限集合であることが従います。

数え上げの問題は、数えている対象が自明でない自己同型を持たない時の方が簡単です。同型なものが二つあれば、同型類は一つとして数えるのが自然です。従って、位数2の自己同型を持つ対象は、2分の1と数えることになります。どの対象の自己同型も一度に整理できればいちばん楽なわけです。ところで、自己同型を無くすにはいくつか方法があります。条件をなるべく少なくする方法もあれば、大量の条件を一律に課して如何なる自己同型の可能性をも抹殺することも可能でしょう。実際、パラメーターの数が大きければ、(7.1)に含まれるセルグラフのほとんどは自己同型を持ちません。前に述べたように、セルグラフの自己同型は各頂点の周りで繋がっている半辺の回転群の直積の部分群に含まれるので、自己同型を許さないようにするもっとも手っ取り早い方法は、各頂点の周りで、連結された半辺のどれか一つに外向きの矢印をつけることです。これは [37, 85] で採用された方法です。でも箆を考えているわけではありません。矢印付きのセルグラフの自己同型は、矢印のついた半辺をも保たねばならないので、頂点の周りでの回転はもはや許されません。

次数  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  の順序付けられた頂点を持ち、連結で、上に述べたように矢印がつけられたタイプ  $g, n$  のセルグラフの集合  $\widehat{\Gamma}_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  の元の数を

$$(7.2) \quad C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) := \left| \widehat{\Gamma}_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) \right|$$

と表します。これは常に非不正数で、例えば  $C_{0,1}(2m) = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$  は  $m$  次のカタラン数です。グラフ  $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  に対応する系 6.2 の写像を  $\omega_{g,n} = \omega_A(\gamma) : A^{\otimes n} \rightarrow K$  とするとき、重み  $C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  を持つ TQFT

$$(7.3) \quad C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot \omega_{g,n} : A^{\otimes n} \rightarrow K$$

が辺縮約変換のもとでどのように変化するかを調べてみましょう。まず、 $\gamma$  の第一頂点  $p_1$  から出る辺の中で、矢印を持ったもの  $E$  を選び、図 5.1 に従って縮約します。どこで辺を縮約したかを記憶しておくために、 $\gamma$  が描かれた曲面の向きで定まる巡回順序に従って次に来る半辺に  $E$  の矢印を移します。  $E$  が2頂点  $p_1$  と  $p_j$  を繋いでいたならば、 $p_j$  の周りの  $\mu_j$  個の半辺のどれかについていた矢印を消してしまいます。もし  $E$  がループなら、図 5.2 に従ってそれを縮約し、頂点  $p_1$  を二つに分離します。ここでも、新しい頂点それぞれの周りで、巡回順序に従って次に来る半辺に矢印を付けます。このプロセスから、次に述べる命題が得られます。

**命題 7.1.** 矢印付きセルグラフの数で重みづけられた 2D TQFT は方程式

$$(7.4) \quad \begin{aligned} & C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot \omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n) \\ &= \sum_{j=2}^n \mu_j C_{g,n-1}(\mu_1 + \mu_j - 2, \mu_2, \dots, \widehat{\mu_j}, \dots, \mu_n) \cdot \omega_{g,n-1}(v_1 v_j, v_2, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_n) \\ &+ \sum_{\alpha+\beta=\mu_1-2} C_{g-1,n+1}(\alpha, \beta, \mu_2, \dots, \mu_n) \cdot \omega_{g-1,n+2}(\delta(v_1), v_2, \dots, v_n) \\ &+ \sum_{\alpha+\beta=\mu_1-2} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{2, \dots, n\}}} \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_1, e_k e_\ell) \eta^{ka} \eta^{lb} \\ &\quad \times (C_{g_1,|I|+1}(\alpha, \mu_I) \cdot \omega_{g_1,|I|+1}(e_a, v_I)) (C_{g_2,|J|+1}(\beta, \mu_J) \cdot \omega_{g_2,|J|+1}(e_b, v_J)) \end{aligned}$$

を充します。

この式は、[37, 85, 100] で得られた一般カタラン数  $C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  の関係式に

$$\omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n) = \epsilon(v_1 \dots v_n \mathbf{e}^g)$$

を掛けたものと同じ形をしています。序節で述べたように、一般カタラン数はラプラス変換をすると位相的漸化式を充たすので、フロベニウス代数係数の位相的漸化式を考えることができます。式の煩雑さを解消ために、 $f, h : A \rightarrow K$  がフロベニウス代数  $A$  上の線型写像のとき、

$$(7.5) \quad (f \otimes h) \circ \delta = \sum_{a,b,k,\ell} \eta(\bullet, e_k e_\ell) \eta^{ka} \eta^{lb} f(e_a) h(e_b)$$

と書くことにします。

初めに、[42]に従って最も簡単な場合の位相的漸化式を概観しましょう。スペクトル曲線として、複素2次元 $xy$ 空間内の種数0の開リーマン面 $\Sigma$ を取り、そのグローバル座標 $z$ を一つ定めます。射影 $x: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ は単純分岐写像であると仮定し、その単純分岐点を $\{p_1, \dots, p_r\} \subset \Sigma$ で表します。もう一つの射影 $y(z)$ は各 $p_\alpha$ の近傍で1対1であるとし、さらに、 $\Sigma$ 上のコーシー核の役割を果たすものとして、

$$(7.6) \quad \omega^{a-b}(z) = \frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z-b} + \omega(z)$$

を一つ定めます。ここで、 $a, b \in \Sigma$ は任意の2点、 $\omega(z)$ は $\Sigma$ 上の正則1形式です。各分岐点 $p_\alpha$ の周りの開円盤 $U_\alpha$ を、正則函数 $x: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ が2:1写像となるように選びます。そうすれば、 $U_\alpha$ の位数2の正則自己同型で $x$ の値を保つもの

$$(7.7) \quad \sigma_\alpha: U_\alpha \rightarrow U_\alpha, \quad x(\sigma_\alpha(z)) = x(z)$$

が存在します。 $\Sigma^n$ 上の有理型対称 $n$ 重1次微分形式

$$W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = w_{g,n}(z_1, \dots, z_n) dz_1 \otimes \cdots \otimes dz_n, \quad 2g - 2 + n > 0$$

が位相的漸化式を充たす、とは方程式

$$(7.8) \quad W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha=1}^r \oint_{\partial U_\alpha} \frac{\omega^{\sigma_\alpha(z)-z}(z_1)}{(y(\sigma_\alpha(z)) - y(z)) dx(z)} \\ \times \left[ W_{g-1, n+1}(z, \sigma_\alpha(z), z_2, \dots, z_n) + \sum_{\substack{\text{No}(0,1) \\ g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{2, \dots, n\}}} W_{g_1, |I|+1}(z, z_I) W_{g_2, |J|+1}(\sigma_\alpha(z), z_J) \right]$$

が成り立つことを意味します。ここで、 $z_I = (z_i)_{i \in I}$ で、「No(0,1)」は和をとるときに、種数の分割 $g = g_1 + g_2$ と添字集合の分割 $I \sqcup J = \{2, \dots, n\}$ が $g_1 = 0$ かつ $I = \emptyset$ の場合も $g_2 = 0$ かつ $J = \emptyset$ の場合も含まないことを要請します。積分変数は $z \in \partial U_\alpha$ です。式(7.8)の括弧[ ]内の微分形式は、 $z$ の対称2重1次微分(2次微分とも呼ばれることもあります)で、それに $1/dx_\alpha(z)$ が掛け算されます。この普段用いられない正則1形式の逆数の掛け算は、正則ベクトル場の為す層 $K_\Sigma^{-1}$ の有理型切断 $1/dx_\alpha(z)$ を対称2重1次微分、即ち $K_\Sigma^{\otimes 2}$ の有理型切断に掛けて、 $K_\Sigma$ の有理型切断、即ち有理型1形式を作る操作を表します。その有理型1形式の各分岐点での留数をとる、と言うのが漸化式の右辺の意味です。1形式 $W_{0,1}$ は

$$(7.9) \quad W_{0,1}(z) := y(z) dx(z)$$

で与えます。式(7.8)の中で $W_{0,1}$ は分母に現れています。2形式 $W_{0,2}$ は

$$(7.10) \quad W_{0,2}(z_1, z_2) := dz_1 \omega^{z_1-b}(z_2)$$

で定めます。定数 $b \in \Sigma$ は何でもよく、結果には影響しません。漸化式の[ ]内の和の中に $W_{0,2}$ が露わに現れています。

**注意 7.2.** 位相的漸化式は、 $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ が対称 $n$ 重1次微分だと仮定しているのですが、式(7.8)の右辺が対称式でなければ意味を為しません。[42]の付録で実際幾つかの仮定のもとで右辺が自動的に対称になることが示されています。位相的漸化式が対称式であることを初めから明白に分かるように定式化するべきだと言うのが[70]の動機の一つです。

**定義 7.3.** 上記の記号を踏襲し、さらにフロベニウス代数  $A$  を一つ固定します。フロベニウス代数係数位相的漸化式とは対称写像  $\mathcal{W}_{g,n} = \mathcal{W}_{g,n}(z_1, \dots, z_n) : A^{\otimes n} \longrightarrow K$  の関係式

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}_{g,n}(z_1, \dots, z_n; v_1, \dots, v_n) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha=1}^r \oint_{\partial U_\alpha} \sum_{a,b,k,\ell} \mathcal{K}(z, \sigma_\alpha(z), z_1; e_k, e_\ell, v_1) \\ &\times \left[ \mathcal{W}_{g-1,n+1}(z, \sigma_\alpha(z), z_2, \dots, z_n; e_a, e_b, v_2, \dots, v_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{\text{No}(0,1) \\ g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{2, \dots, n\}}} \mathcal{W}_{g_1,|I|+1}(z, z_I; e_a, v_I) \mathcal{W}_{g_2,|J|+1}(\sigma_\alpha(z), z_J; e_b, v_J) \right] \end{aligned}$$

のことでありと定義します。積分核はフロベニウス形式を用いて

$$(7.12) \quad \mathcal{K}(z, \sigma_\alpha(z), z_1; e_k, e_\ell, v_1) = \frac{\omega^{\sigma_\alpha(z)-z}(z_1) \eta(e_k e_\ell, v_1) \eta^{ka} \eta^{lb}}{(y(\sigma_\alpha(z)) - y(z)) dx(z)}$$

で与えられます。形式的に簡単化して (7.11) を

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}_{g,n} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha=1}^r \oint_{\partial U_\alpha} K(z, \sigma_\alpha(z), z_1) \\ &\times \left[ \mathcal{W}_{g-1,n+1} \circ \delta + \sum_{\substack{\text{No}(0,1) \\ g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{2, \dots, n\}}} (\mathcal{W}_{g_1,|I|+1} \otimes \mathcal{W}_{g_2,|J|+1}) \circ \delta \right] \end{aligned}$$

と表すこともできます。この場合、積分核は通常のもと同じです。

$$K(z, \sigma_\alpha(z), z_1) := \frac{\omega^{\sigma_\alpha(z)-z}(z_1)}{(y(\sigma_\alpha(z)) - y(z)) dx(z)}.$$

**定理 7.4.**  $(A^{\otimes n})^*$  に値を持つ対称  $n$  重 1 次形式  $\mathcal{W}_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$  がフロベニウス代数係数位相的漸化式 (7.11) を充すとします。もし (7.10) の 2 形式  $W_{0,2}$  によって初期値が

$$W_{0,2}(z_1, z_2; v_1, v_2) = W_{0,2}(z_1, z_2) \cdot \eta(v_1, v_2)$$

で与えられているならば、位相的漸化式 (7.8) の解  $\{\mathcal{W}_{g,n}\}$  と  $2D$  TQFT  $\{\omega_{g,n}\}$  が存在して、

$$(7.14) \quad \mathcal{W}_{g,n}(z_1, \dots, z_n; v_1, \dots, v_n) = \mathcal{W}_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \cdot \omega_{g,n}(v_1, \dots, v_n)$$

が全ての  $2g - 2 + n > 0$  を充す  $g, n$  について成立します。

**証明.**  $m = 2g - 2 + n$  に関する数学的帰納法で証明を与えます。初期条件は  $m = 0$  の場合です。今、 $2g - 2 + n < m$  の範囲の全ての  $(g, n)$  について、(4.17) で与えた  $\omega_{g,n} = \epsilon(v_1 \cdots v_n e^g)$  によって (7.14) が成り立つとしましょう。この時、漸化式 (7.11) と ECO 2 のもとの函手性から、 $2g - 2 + n = m$  であるような全ての  $(g, n)$  について (7.14) が成立することが従います。  $\square$

**注意 7.5.** 余積に対応する ECO 2 は上で見たように位相的漸化式の中に現れていますが、積に対応する ECO 1 は出てきていないように見受けられます。実はそれは (1.14) の積を余積に変える操作を通して、分割の和の中の  $g_1 = 0, |I| = 1$  か  $g_2 = 0, |J| = 1$  を含む項の中に現れているのです。  $I = \{i\}$  の場合を見て見ましょう。帰納法の仮定からそれは

$$\begin{aligned} &W_{0,2}(z, z_i; e_a, v_i) \mathcal{W}_{g,n-1}(\sigma_\alpha(z), z_2, \dots, \widehat{z_i}, \dots, z_n; e_b, v_2, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \\ &= W_{0,2}(z, z_i) \mathcal{W}_{g,n-1}(\sigma_\alpha(z), z_2, \dots, \widehat{z_i}, \dots, z_n) \\ &\quad \cdot \omega_{0,2}(e_a, v_i) \omega_{g,n-1}(e_b, v_2, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \end{aligned}$$



として和の中に含まれていますが、同時に

$$\begin{aligned}
& \sum_{a,b,k,\ell} \eta(e_k e_\ell, v_1) \eta^{ka} \eta^{\ell b} \omega_{0,2}(e_a, v_i) \omega_{g,n-1}(e_b, v_2, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n) \\
&= \sum_{b,\ell} \eta^{\ell b} \omega_{0,2}(v_1 e_\ell, v_i) \omega_{g,n-1}(e_b, v_2, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n) \\
&= \sum_{b,\ell} \eta^{\ell b} \eta(v_1 v_i, e_\ell) \omega_{g,n-1}(e_b, v_2, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n) \\
&= \omega_{g,n-1}(v_1 v_i, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)
\end{aligned}$$

が成り立ち、積に対応した項となっているのです。

セルグラフの数え上げ問題に戻りましょう。[37, 85] で展開された手法を用いて、組み合わせ論的方程式 (7.4) のラプラス変換を求めることができます。その結果として、フロベニウス代数係数位相的漸化式 (7.11) の解

$$\mathcal{W}_{g,n} = W_{g,n}^D(z_1, \dots, z_n) \cdot \omega_{g,n}$$

が得られます。ここで、 $W_{g,n}^D$  はスペクトル曲線 (0.1) [37, Theorem 4.3] に対応する位相的漸化式の解 [37, (4.14)] で、 $\omega_{g,n}$  はフロベニウス代数  $A$  に対応する TQFT です。



で与えられます。第2部の量子曲線論はこの調和振動子の量子化と完全な調和を保ちます。私たちは、複素シンプレクティック曲面として  $(\mathbb{C}^2, dx \wedge dy)$  を用います。平面2次曲線

$$(8.2) \quad \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$$

がラグランジアンとしてのスペクトル曲線の例です。複素座標では虚数単位は不要なので、 $y = d/dx$  と同一視します。2次曲線 (8.2) の量子化はシュレーディンガー方程式

$$(8.3) \quad \left( \left( \hbar \frac{d}{dx} \right)^2 + 1 - \frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{4}x^2 \right) \psi(x, \hbar) = 0$$

で、本質的には量子調和振動子 (8.1) と同じものです。これはエルミート-ウエーバー方程式で、その解もよく知られています。

**問い 8.3.** なぜ私たちはよく知られた古典微分方程式を問題にしているのでしょうか？

この問いの [31, 33, 37, 85] で展開された驚くべき答えは、解の漸近展開を通して  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  上のコホモロジー交叉数が得られる、というものでした。まず方程式にゲージ変換

$$(8.4) \quad \begin{aligned} e^{-\frac{1}{4\hbar}x^2} \left( \left( \hbar \frac{d}{dx} \right)^2 + 1 - \frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{4}x^2 \right) e^{\frac{1}{4\hbar}x^2} Z(x, \hbar) \\ = \left( \hbar \frac{d^2}{dx^2} + \hbar x \frac{d}{dx} + 1 \right) Z(x, \hbar) = 0 \end{aligned}$$

を施してみましょう。ここで、 $Z(x, \hbar) = e^{-\frac{1}{4\hbar}x^2} \psi(x, \hbar)$  です。前節 (7.2) で調べた整数値関数  $C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  の母関数 (ラプラス変換) を

$$(8.5) \quad F_{g,n}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n > 0} \frac{C_{g,n}(\mu_1, \dots, \mu_n)}{\mu_1 \cdots \mu_n} x_1^{-\mu_1} \cdots x_n^{-\mu_n}$$

とします。その微分  $W_{g,n} = d_1 \cdots d_n F_{g,n}$  がスペクトル曲線 (0.1) に基づく位相的漸化式を充たし、それが量子曲線 (8.4) の準古典極限であることが [37, 85] で見出されました。 $(g, n) = (0, 1)$  と  $(0, 2)$  の値をしかるべく与えれば、無限次完全 WKB 展開

$$(8.6) \quad Z(x, \hbar) = \exp \left( \sum_{g,n} \frac{1}{n!} \hbar^{2g-2+n} F_{g,n}(x, \dots, x) \right)$$

がえられます [33, 37, 85]。さらに [37] で著者たちは座標変換

$$(8.7) \quad x = x(t) = \frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1}$$

のもので、 $2g-2+n > 0$  の範囲の  $(g, n)$  については  $F_{g,n}(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$  がローラン多項式であることを発見しました。[37] ではミステリーだった座標変換 (8.7) はそのあと [31] でヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{P}(K_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  内の特異曲線 (0.1) のブローアップによる特異点解消であることが明らかにされました。このローラン多項式の最高次項は  $6g-6+3n$  同次多項式

$$(8.8) \quad F_{g,n}^{\text{highest}}(t_1, \dots, t_n) = \frac{(-1)^n}{2^{2g-2+n}} \sum_{\substack{d_1+\dots+d_n \\ =3g-3+n}} \langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \prod_{i=1}^n \left( |2d_i - 1|!! \left( \frac{t_i}{2} \right)^{2d_i+1} \right)$$

で、その係数がモジュライ空間  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  上の交叉係数

$$(8.9) \quad \langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{g,n} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n}$$

で与えられるのです。位相的漸化式は単独の方程式 (8.3) から全ての  $F_{g,n}(x_1, \dots, x_n)$  を計算する方法と見ることができます。つまり、量子曲線 (8.3) はあらゆる交叉数 (8.9) の情報

を含んでいるのです！こういったトピックは著者たちの以前のレクチャーノート [33] に詳しく描かれています。

本稿では深入りしませんが、量子曲線を話題にする時に述べるべき重要な概念の一つに [16] で導入された組紐理論の  $A$  多項式があります。 $A$  多項式  $A_K(x, y)$  はその  $0$  点集合として複素シンプレクティック曲面  $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, d \log x \wedge d \log y)$  内にやはり同じ名前と呼ばれる代数曲線を定めます。それを私たちはスペクトル曲線と捉えるのです。もう少し詳しく見てみましょう。与えられた組紐  $K \subset S^3$  の補集合の基本群の  $SL_2(\mathbb{C})$  指標多様体から、 $3$ 次元球面内の組紐  $K$  の開近傍の補集合の境界として現れるトーラス  $T^2 = S^1 \times S^1$  の基本群の  $SL_2(\mathbb{C})$  指標多様体への自然な制限写像

$$(8.10) \quad \begin{aligned} \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL_2(\mathbb{C})) // SL_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(T^2), SL_2(\mathbb{C})) // SL_2(\mathbb{C}) \\ &\cong (\mathbb{C}^*)^2 / (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

を考えましょう。私たちは GIT (幾何学的不変式論) 商を取っているのです、値域は安定開集合を  $SL_2(\mathbb{C})$  の共役作用で割ったものですから、 $SL_2(\mathbb{C})$  内の二つの対角行列の組の同値類の集合になります。写像 (8.10) の像で  $1$  次元のものを集め、 $(\mathbb{C}^*)^2$  に引き戻せば、アフィン代数曲線  $\Sigma$  が得られます。その定義方程式  $A_K(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  は整数環上定義されており、それを [16] の著者たちはアフィン曲線に因んで  $A$  多項式と呼んだのでした。さらに、この曲線そのものが組紐  $K$  の位相不変量であること、また、その射影コンパクト化の函数体  $\mathbb{C}(\Sigma)$  の  $2$  次代数的  $K$  群  $K_2(\mathbb{C}(\Sigma))$  の元としてスタインバーグシンボル  $\{x, y\}$  が捻れ元となっていること、など様々な深い性質が [16] で証明されています。

$A$  多項式の量子化はワイルの量子化を通して行われます。文献 [46, 49] に従って、 $2$  変数  $(q, n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}_+$  の函数  $f(q, n)$  に作用する掛け算作用素と差分作用素を

$$(8.11) \quad \begin{cases} (\hat{x}f)(q, n) := q^n f(q, n) \\ (\hat{y}f)(q, n) := f(q, n+1) \end{cases}$$

で定めると、それらの間には交換関係

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = q \hat{y} \cdot \hat{x}$$

が成立します。置換え  $x \mapsto \hat{x}, y \mapsto \hat{y}$  がワイル量子化と呼ばれるものです。さて、今組紐  $K$  の色付きジョーンズ多項式  $J_K(q, n)$  を考えましょう。色  $n$  は  $SL_2(\mathbb{C})$  の既約表現の次元です。ガルフアリディス [49] は  $A$  多項式の量子化が存在して、

$$(8.12) \quad \hat{A}_K(\hat{x}, \hat{y}; q) J_K(q, n) = 0$$

が成り立つであろうという驚くべき予想 (AJ 予想と呼ばれる) をたてました。ここで言う量子化とは、差分作用素  $\hat{A}_K(\hat{x}, \hat{y}; q)$  で、

$$\hat{A}_K(x, y; 1) = A_K(x, y)$$

を充すもののことを指します。この関係式は準古典極限そのもので、WKB 近似の初項を与えるものです。グーコフとスウコフスキー [55] は、スペクトル曲線  $\Sigma$  の (8.12) を充すような量子化が存在することと、上で述べたスタインバーグシンボル  $\{x, y\}$  が  $2$  次代数的  $K$  群  $K_2(\mathbb{C}(\Sigma))$  の捻れ元となっていることの間、ブロック調節子 [8] を通して深い繋がりがあることを指摘しました。この状況を  $\Sigma$  は  $K_2$  ラグランジアンであると言い表すことにします。プランクの量子化が連続であるはずのエネルギーがとびとびの値を取ることを、即ち整数性にあることを思い起こせば、 $K_2$  ラグランジアン条件と量子化の間の関係は、コンツェヴィッチの  $K_2$  条件と整数性の関連と呼応しているようです。

ジョーンズ多項式を圏化したホヴァノフは、予想 (8.12) の事をまだ知らなかった時に著者の一人の説明を喜んで聞いていました。説明の後、彼は著者に、「おそらく  $A$  多項式の圏化をする必要があるんだと思うなあ。(8.12) は二つの圏の間の直交関係のようなものとして、捉えられるんだと思う。」と話してくれました。 $A$  多項式が整数係数なのは、組紐群の生成関係式の自然な帰結なので、彼の言っていることは生成関係式そのものの圏化です。差分方程式 (8.12) には  $A$  多項式の量子化が必要ですから、圏の量子化を考える事になります。圏の量子化というのは寧ろ良く知られた対象ですから、こういった観点から AJ

予想の解決が進むのかもしれませんが。量子曲線の理論はこうしたケースからも示唆されるように、深い内容を含んでいると考えられています。

ヒッチンスペクトル曲線の量子化に由来する量子曲線の幾何学的定義は、ガイオットのある予想を解決した論文 [29] に基づいて、[34] で与えられました。量子曲線の WKB 解析は、位相的漸化式 [42] の応用や類似物を用いて、[30, 31, 33, 62, 63] などで扱われました。上に述べたエルミートウエーバー方程式も、この幾何学的理論の例を与えます。文献 [55] は位相的漸化式の、(8.12) を含む低次元トポロジーへの応用を示唆しています。一方で、[25, 65, 103] に現れたモジュラー性が位相的漸化式に関係しているのかもしれないというような話も聞こえてきます。方程式 (8.4) はヒッチンの幾何の範囲で捉えられますが、今のところ (8.12) をヒッチンスペクトル曲線の量子化として理解する事はまだ為されていません。

以下の数節で私たちは趣きの違った量子曲線の物語を展開しようと思います。スペクトル曲線 (0.1) から量子曲線 (8.4) への移行と全く同じ道筋が幾何学の中に実はあるのです。そのプロセスは、著者の一人の講演 [28] で、ヒッチンスペクトル曲線のモジュライ空間から、オパーの為にモジュライ空間への旅立ちとして紹介されました。(8.4) に現れるプランク定数  $\hbar$  は、その過程で変形パラメーターとして幾何学的意味 (9.31) を獲得します。私たちはこの旅立ちの物語を、コンパクトリーマン面上で座標に依らない 2 階の複素解析的線型常微分方程式を大域的に与えるにはどうしたらよいか、という問いから始める事にします。

## 9. 射影構造・オパー・ヒッグズ束

文献 [30] で、著者たちはヒッチンスペクトル曲線の場合に適合する位相的漸化式の偏微分方程式版を提唱しました。そして、スペクトル曲線が 2 重被覆の時には、WKB 漸近展開を用いて PDE 版位相的漸化式が局所的に量子曲線を決めることを示しました。ミルザハニ漸化式や辺短縮変換と同じ構造を持つ PDE 版位相的漸化式が次数毎に WKB 展開を決めて行くのを発見して驚いた事を思い起こします。そのメカニズムは [31, 33] に詳しく述べられています。

WKB 展開は量子力学の発展時に開発された量子化の方法です。漸近展開の方法である以上、それは局所的な結果しか与えません。それに対して、ヒッチンスペクトル曲線の量子化は純粋に幾何学的なプロセスで、大域的に行えるはずのものです。著者たちはこの観点を、ガイオットの予想 [47] を解決した論文 [29] に基づいて、[34] で採用しました。そこで得られた結果は、量子化のプロセスとはヒッチンスペクトル曲線のモジュライ空間からオパー [6] のモジュライ空間への双正則写像である、というものでした。この節では、オパーの概念を導入し、量子化としての双正則写像を構成します。理論展開の過程で、プランク定数  $\hbar$  が実はコホモロジーの元であって、リーマン面上のベクトル束や接続形式の変形パラメーターとして解釈される、という視点が得られます。解説の簡潔さを保つ為に、本稿では  $SL_2(\mathbb{C})$  オパーだけを扱います。一般の場合については [29, 34] を参照して下さい。

コンパクトリーマン面  $C$  上で 2 階以上の常微分方程式を大域的に扱う為に、私たちは射影座標系を導入します。もちろん微分概念は座標には依りませんが、微分作用素の座標表示形を簡単にする為に射影座標を使うのです。1 階微分の場合は話は簡単です。 $C$  上の有理型 1 形式  $\omega$  で定まる 1 階線型常微分方程式

$$(9.1) \quad (d + \omega)f = 0$$

は大域的に定義されています。なぜなら、微分作用素  $d + \omega$  は  $\mathcal{O}_C$  から  $K_C$  への (特異点を許す) 準同型だからです。ここで、 $K_C$  は  $C$  上の正則 1 形式の為に層を表わします。次に、局所座標  $z$  を用いて与えられる 2 階方程式

$$(9.2) \quad \left( \frac{d^2}{dz^2} - q(z) \right) f(z) = 0$$

を考えましょう。2 階微分  $\frac{d^2}{dz^2}$  は (9.1) に現れる外微分  $d$  のような大域的な意味を持ってはいません。方程式 (9.2) の形が別の座標系でも同じに保たれる為の条件とは何なのでしょ

うか？この問いに答える為に、次の条件を課してみましょう。

$$(9.3) \quad dz^2 \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^2 - q(z) \right] f(z) = 0 \iff dw^2 \left[ \left( \frac{d}{dw} \right)^2 - q(w) \right] f(w) = 0.$$

1 階の場合 (9.1) のアナロジーから、係数  $q \in H^0(C, K_C^{\otimes 2})$  は  $C$  上大域的に与えられた 2 次微分だとします。つまり、 $q$  は座標変換  $w = w(z)$  で  $q(z)dz^2 = q(w)dw^2$  と変化します。

2 階方程式 (9.2) の解  $f$  とは一体何なのでしょう？ 1 階の場合には  $\omega = -d \log f$  なので、 $f \in \mathcal{O}_C$  です。一般には  $f$  が属する  $C$  上の複素直線束  $L$  を決める必要があります。今、座標変換  $w = w(z)$  に対応する直線束  $L$  の推移関数を  $e^{-g(w(z))}$  で表すことにします。方程式の解  $f$  は座標条件

$$(9.4) \quad e^{-g(w(z))} f(w(z)) = f(z)$$

を充します。実際に条件 (9.3) を計算してみましょう。

$$\begin{aligned} 0 &= dz^2 \cdot e^{g(w(z))} \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^2 - q(z) \right] f(z) \\ &= dz^2 \cdot e^{g(w(z))} \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^2 - q(z) \right] e^{-g(w(z))} f(w(z)) \\ &= dz^2 \cdot \left( e^{g(w(z))} \frac{d}{dz} e^{-g(w(z))} \right)^2 f(w(z)) - dw^2 q(w) f(w) \\ &= dz^2 \cdot \left( \frac{d}{dz} - g_w(w) w' \right)^2 f(w(z)) - dw^2 q(w) f(w) \\ &= dz^2 \cdot \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^2 - 2g_w(w) w' \frac{d}{dz} - \left( (g_w(w) w')' - (g_w(w) w')^2 \right) \right] f(w(z)) - dw^2 q(w) f(w) \\ &= dz^2 \cdot \left[ (f_w(w) w')' - 2g_w(w) w' f_w(w) w' - \left( (g_w(w) w')' - (g_w(w) w')^2 \right) f(w) \right] \\ &\quad - dw^2 q(w) f(w) \\ &= f_{ww}(w) \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz^2 + f_w(w) w'' dz^2 - 2g_w(w) f_w(w) dw^2 \\ &\quad - \left( (g_w(w) w')' - (g_w(w) w')^2 \right) f(w) dz^2 - dw^2 q(w) f(w) \\ &= dw^2 \cdot \left[ \left( \frac{d}{dw} \right)^2 - q(w) \right] f(w) + f_w(w) (w'' - 2g_w(w) (w')^2) dz^2 \\ &\quad - \left( (g_w(w) w')' - (g_w(w) w')^2 \right) f(w) dz^2. \end{aligned}$$

ここで、 $w' = dw/dz$  と略記しました。従って、(9.3) の必要十分条件は

$$(9.5) \quad w'' - 2g_w(w) (w')^2 = 0$$

$$(9.6) \quad (g_w(w) w')' - (g_w(w) w')^2 = 0$$

です。(9.5) から

$$(9.7) \quad g_w(w) w' = \frac{1}{2} \frac{w''}{w'}$$

が従います。それを (9.6) に代入すると

$$(9.8) \quad s_z(w) := \left( \frac{w''(z)}{w'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2 = 0$$

が得られます。こうして私たちは思いもかけず古典的なシュワルツ微分  $s_z(w)$  に遭遇するのです。(9.7) は

$$g(w)' = \frac{1}{2}(\log(w'))'$$

と同値ですから、 $g(w) = \frac{1}{2} \log w'$  が分かります。積分定数が0なのは  $w = z$  の時  $g(z) = 0$  だからです。従って直線束  $L$  の推移条件 (9.4) は

$$f(z) = e^{-\frac{1}{2} \log w'} f(w) \iff f(z) = \sqrt{\frac{dz}{dw}} f(w)$$

となり、 $f(z)$  が属する複素直線束は逆標準束の平方根

$$(9.9) \quad L \cong K_C^{-\frac{1}{2}}$$

であることが従います。また、シュワルツ微分が  $C$  上恒等的に消えることを保証するためには、複素射影座標を採用すればよい、というわけです。

逆標準束の平方根は計算から出てきたのですが、もちろんそれには幾何学的な理由があります。その理由を調べてみましょう。局所的には単独高階線型常微分方程式はベクトル値関数についての1階線型常微分方程式で表すことが出来ます。1階微分を外微分を使って大域化すれば、この対応で大域高階微分が定義できないもののでしょうか？こうして私たちは  $C$  上の  $D$  加群、即ち複素解析的接続の概念に行き当たります。

$C$  上の正則ベクトル束  $E$  に作用する  $\mathbb{C}$  線型写像  $\nabla: E \rightarrow K_C \otimes E$  でライプニッツ則  $\nabla(fs) = f\nabla(s) + df \otimes s$  を充すものを複素解析的接続と定義します。ここで、 $f \in \mathcal{O}_C$ 、 $s \in E$  です。 $C$  は複素1次元なので、 $C$  上の複素接続は自動的に平坦です。それゆえ  $\nabla$  は基本群  $\pi_1(C)$  からベクトル束  $E$  の構造群  $G$  へのホロノミー表現

$$(9.10) \quad \rho: \pi_1(C) \rightarrow G$$

を与えます。接続  $\nabla$  はホロノミー表現 (9.10) の像が代数群  $G$  の中でザリスキー稠密の時、既約であると定義します。私たちは  $G = SL_2(\mathbb{C})$  の場合だけを考えているので、既約性は  $Im(\rho)$  が  $G$  の可換でない二つの元を含むことと同値です。 $G$  ベクトル束  $E$  とそれに作用する既約接続  $(E, \nabla)$  の為すモジュライ空間  $\mathcal{M}_{\text{deR}}$  を構成することが出来ます ([98] 参照)。

**定義 9.1** ( $SL_2(\mathbb{C})$  オパー). ベクトル束  $E$  の部分直線束  $F \subset E$  が存在して、正則  $SL_2(\mathbb{C})$  接続  $\nabla: E \rightarrow E \otimes K_C$  が  $\mathcal{O}_C$  加群の同型

$$(9.11) \quad \bar{\nabla}: F \xrightarrow{\sim} (E/F) \otimes K_C$$

を引き起こすとき、 $(E, \nabla) \in \mathcal{M}_{\text{deR}}$  は  $SL_2(\mathbb{C})$  オパーである、と定義します。

オパーの概念はリーマン面上の射影構造の拡張になっています。コンパクトであってもなくてもリーマン面上にはその複素構造と整合する射影構造が入ります ([56] 参照)。以下で、正則ヒッグズ束に対応するヒッチンスペクトル曲線を扱うので、 $g(C) \geq 2$  と仮定して話を進めます。(ヒッグズ場が特異点を持つ場合には種数0や1の場合を考えることが出来ます。)  $C$  の複素射影座標系を、局所座標  $z_\alpha$  を持った座標近傍  $U_\alpha$  による  $C$  の覆い尽く

$$C = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$$

で、各共通部分  $U_\alpha \cap U_\beta$  で1次分数変換

$$(9.12) \quad z_\alpha = \frac{a_{\alpha\beta} z_\beta + b_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta} z_\beta + d_{\alpha\beta}}, \quad f_{\alpha\beta} := \begin{bmatrix} a_{\alpha\beta} & b_{\alpha\beta} \\ c_{\alpha\beta} & d_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

が成り立ち、コサイクル条件  $[f_{\alpha\beta}][f_{\beta\gamma}] = [f_{\alpha\gamma}]$  を充たすもの、として定義します。(後の議論を簡単にするため、各  $U_\alpha$  は  $C$  上の小さな開円盤であるとしします。) ここで、 $[f_{\alpha\beta}]$  は行列  $f_{\alpha\beta}$  の

$$(9.13) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C}) \rightarrow 0$$

による射影像で、1次分数変換を決める同値類を表します。各  $U_\alpha \cap U_\beta$  上で符号  $\pm$  の選択は  $H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$  の元を定めるので、 $[f_{\alpha\beta}]$  から  $f_{\alpha\beta}$  への引き揚げは  $2^{2g}$  個ある

ことが分かります。私たちは、引き揚げを  $f_{\alpha\beta}$  を一つ決め、 $SL_2(\mathbb{C})$  値の 1 コサイクルと見做します。

$$dz_\alpha = \frac{1}{(c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta})^2} dz_\beta$$

なので、 $K_C$  の推移関数は 1 コサイクル  $\{(c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta})^2\}$  で与えられます。テータ指標、或いはスピン構造と呼ばれるものは、1 コサイクル

$$(9.14) \quad \xi_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta}$$

で定まる  $K_C$  の平方根  $K_C^{\frac{1}{2}}$  の選択の事です。ここでも、 $K_C^{\frac{1}{2}}$  の推移関数として、 $2^{2g}$  個の選択  $\{\pm\xi_{\alpha\beta}\}$  が可能です。私たちは既に  $f_{\alpha\beta}$  を取るときに符号の選択をしたので、以下に述べるように (9.14) を唯一整合的に選ぶことができます。従って、引き揚げ (9.13) は  $K_C^{\frac{1}{2}}$  で決まることが分かります。(9.14) から

$$(9.15) \quad \partial_\beta^2 \xi_{\alpha\beta} = 0$$

が従います。この性質は後で  $C$  上に大域接続を構成するときに本質的役割を果たします。まず、(9.15) が (9.12) を導くことを見ましょう。

**命題 9.2** (射影座標であること条件).  $C$  の座標系は  $K_C^{\frac{1}{2}}$  の推移関数の 2 階微分が消滅するならば、射影座標系を与えます。

**証明.** 条件 (9.15) は  $K_C^{\frac{1}{2}}$  の推移関数が 1 コサイクル条件を充す 1 次式  $c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta}$  で与えられることを意味します。従って

$$\frac{dz_\alpha}{dz_\beta} = \frac{1}{(c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta})^2}$$

が成り立ちます。これを微分方程式と見て解けば、

$$(9.16) \quad z_a = \frac{m_{\alpha\beta}(c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta}) - 1/c_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta}}$$

が得られます。ここで、 $m_{\alpha\beta}$  は積分定数です。こうして、各  $U_\alpha \cap U_\beta$  上で  $SL_2(\mathbb{C})$  の元

$$\begin{bmatrix} m_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} & m_{\alpha\beta}d_{\alpha\beta} - 1/c_{\alpha\beta} \\ c_{\alpha\beta} & d_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

が構成できました。(9.16) はコサイクル条件を充すので、(9.12) が得られたことになりま  
す。□

行列  $f_{\alpha\beta}$  は  $SL_2(\mathbb{C})$  を構造群とする  $C$  上の 2 次元ベクトル束  $E$  を定めます。各  $f_{\alpha\beta}$  は定数行列なので、座標近傍に依らない  $E$  の定数切断が意味を成します。従って、各  $U_\alpha$  上で  $\nabla_\alpha = d$  と定めれば、 $\nabla$  は  $E$  の大域接続になります。ここで、 $C$  の射影座標系を一つ取り、 $E$  を上で与えたベクトル束とします。その射影化  $\mathbb{P}(E)$  は  $E$  に付随する  $\mathbb{P}^1$  束です。 $\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = PSL_2(\mathbb{C})$  であることに注意すれば、(9.12) の局所座標系  $\{z_\alpha\}$  は  $\mathbb{P}(E)$  の大域切断を与えることが分かります。この切断は写像

$$(9.17) \quad z_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

を与え、 $\mathbb{P}^1$  の射影構造を  $U_\alpha$  に引き戻します。有理型函数と見たとき (9.17) は定数函数ではありません。というのは、 $dz_\alpha$  が  $U_\alpha \cap U_\beta$  上で決して 0 にならないからです。 $\mathbb{P}(E)$  の大域切断は部分直線束  $F \subset E$  に対応し、それは直線束の拡大

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$$

を定めます。恒等式

$$(9.18) \quad \begin{bmatrix} z_a \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta}} \begin{bmatrix} a_{\alpha\beta} & b_{\alpha\beta} \\ c_{\alpha\beta} & d_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\beta \\ 1 \end{bmatrix}$$



は  $\begin{bmatrix} z_\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$  がベクトル束  $K_C^{-\frac{1}{2}} \otimes E$  の大域切断を与え、その射影化像が  $F$  に対応する  $\mathbb{P}(E)$  の大域切断  $\{z_\alpha\}$  であることを示しています。ここで、(9.14) の符号の不定性と1次元変換の  $f_{\alpha\beta} \in SL_2(\mathbb{C})$  への引き揚げの不定性がうまく消し合うようにテータ指標を取る必要が有ります。大域切断 (9.18) は決して0にならないので、自明な部分直線束

$$\mathcal{O}_C = K_C^{-\frac{1}{2}} \otimes F \subset K_C^{-\frac{1}{2}} \otimes E$$

を生成します。故に  $F = K_C^{\frac{1}{2}}$  が従います。  $\det E = \mathcal{O}_C$  なので、  $E/F = K_C^{-\frac{1}{2}}$  となり、  $E$  は拡大

$$(9.19) \quad 0 \longrightarrow K_C^{\frac{1}{2}} \longrightarrow E \longrightarrow K_C^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

で与えられ、コホモロジー  $\text{Ext}^1(K_C^{-\frac{1}{2}}, K_C^{\frac{1}{2}}) \cong H^1(C, K_C) \cong \mathbb{C}$  の元を定めます。この拡大 (9.19) はオパーに直接繋がっています。

**定理 9.3** (射影座標系とオパー). 各射影座標系 (9.12) は定義 9.1 で  $F = K_C^{\frac{1}{2}}$  とした場合のオパー  $(E, \nabla)$  を定めます。

**証明.** (9.14) の  $\xi_{\alpha\beta}$  を用いて、  $\sigma_{\alpha\beta} = -(d/dz_\beta)\xi_{\alpha\beta} = -c_{\alpha\beta}$  と置きましょう。簡単な計算

$$a_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}z_\alpha = \frac{a_{\alpha\beta}(c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta}) - c_{\alpha\beta}(a_{\alpha\beta}z_\beta + b_{\alpha\beta})}{(c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta})} = \frac{1}{(c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta})}$$

から

$$(9.20) \quad \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &:= \begin{bmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha\beta}^{-1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta} & -c_{\alpha\beta} \\ & (c_{\alpha\beta}z_\beta + d_{\alpha\beta})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & z_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\alpha\beta} & b_{\alpha\beta} \\ c_{\alpha\beta} & d_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\beta & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られるので、  $f_{\alpha\beta}$  と  $g_{\alpha\beta}$  とは同じベクトル束  $E$  を決める事が分かります。行列  $g_{\alpha\beta}$  の形から直ちに (9.19) が従います。  $E$  の接続  $\nabla$  は推移函数  $f_{\alpha\beta}$  に関しては各  $U_\alpha$  上で単に外微分  $d$  なので、推移函数  $g_{\alpha\beta}$  に関する  $U_\alpha$  上の微分作用素としては

$$(9.21) \quad \nabla_\alpha := \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & z_\alpha \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} z_\alpha & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} = d - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} dz_\alpha$$

で与えられます。接続行列の (2,1) 成分  $dz_\alpha$  は決して0にならないので、写像の合成

$$(9.22) \quad F = K_C^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\nabla} E \otimes K_C \longrightarrow (E/F) \otimes K_C \cong K_C^{\frac{1}{2}}$$

は同型を与えます。こうして、  $(E, \nabla)$  が  $SL_2(\mathbb{C})$  オパーであることが従います。  $\square$

**注意 9.4.** この証明の最終段階で  $(E, \nabla)$  がオパーであることを示すには、(9.22) が  $\mathcal{O}_C$  加群としての準同型を与えることを言わねばなりません。それが成り立つのは、(9.22) で部分直線束の商を取るときに、  $E$  に作用する二つの接続  $\nabla$  と  $\nabla|_F$  の差を使うからなのです。より一般に、与えられたベクトル束  $E$  に作用する二つの接続  $\nabla_1$  と  $\nabla_2$  があれば、  $f \in \mathcal{O}_C$  と  $s \in E$  に対してライプニッツ則から

$$\nabla_1(fs) - \nabla_2(fs) = f\nabla_1(s) - f\nabla_2(s)$$

が従い、  $\nabla_1 - \nabla_2 : E \longrightarrow E \otimes K_C$  が  $\mathcal{O}_C$  加群準同型になることが分かります。

**注意 9.5.** 層としての拡大類 (9.19) は  $H^1(C, K_C) = \mathbb{C}$  の元で決まりますが、拡大  $E$  のベクトル束としての複素構造は  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$  であるかどうかだけに依ります。これは、推移函数をゲージ変換

$$(9.23) \quad \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha\beta}^{-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \\ & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \lambda^2 \sigma_{\alpha\beta} \\ & \xi_{\alpha\beta}^{-1} \end{bmatrix}$$

によって  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$  か  $\sigma_{\alpha\beta} = 1$  の場合に標準化出来るからです。前者の場合は自明な拡大  $E = K_C^{\frac{1}{2}} \oplus K_C^{-\frac{1}{2}}$  が得られます。この場合、 $\sigma_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} = 0$  なので、射影座標系 (9.12) はアフィン座標系に退化します。私たちは  $g(C) > 1$  と仮定しているので、 $C$  はアフィン構造を持ち得ません。ということは、後者の場合のみが起こっているわけです。そして、 $\sigma_{\alpha\beta} = 1$  の場合には自明拡大の場合と比べて実際に複素構造が違うことを後で示します。

さて、今  $C$  の複素構造と整合的な別の射影構造があったとしましょう。(9.13) の引き揚げで生ずる符号  $\pm$  と (9.14) の平方根の取り方を調節することによって (9.19) を充す全く同じベクトル束  $E$  を構成する事が出来ます。ただ、私たちは  $C$  の同じ複素構造を表す二つの違った座標系を扱っているので、 $E$  の局所定数切断の概念は変化します。ということは、座標系の取り方が正則接続  $\nabla$  の取り方に反映されている。つまり、同じベクトル束  $E$  に作用する二つの正則接続が得られるのです。上で注意したように、これら二つの正則接続の差として  $\mathcal{O}_C$  加群準同型  $E \rightarrow E \otimes K_C$  が一つ定まります。こうして私たちはヒッチンの定義 [57, 58] に導かれます。

**定義 9.6** (ヒッグズ束 [57, 58]).  $C$  上で定義された  $r$  次元正則ベクトル束  $E$  と、ヒッグズ場と呼ばれる  $\mathcal{O}_C$  加群準同型

$$\phi : E \rightarrow E \otimes K_C$$

とからなる組  $(E, \phi)$  を  $r$  次元ヒッグズ束と呼びます。特に、 $SL_2(\mathbb{C})$  ヒッグズ束  $(E, \phi)$  とは、2次元ベクトル束  $E$  が  $\det E = \mathcal{O}_C$  を充し、ヒッグズ場が  $\text{tr} \phi = 0$  となっている場合をいいます。2次元ヒッグズ束の安定性を、 $\phi$  不変なあらゆる部分直線束  $F \subset E$ 、つまり、 $\phi : F \rightarrow F \otimes K_C$  を充すような直線束、の次数が必ず負であること ( $\deg F < 0$ ) として定義します。

安定ヒッグズ束のモジュライ空間は [98] で構成されました。記号  $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  で  $C$  上の安定正則  $SL_2(\mathbb{C})$  ヒッグズ束のモジュライ空間を表すことにしましょう。この空間は、既約正則  $SL_2(\mathbb{C})$  接続  $(E, \nabla)$  の為すモジュライ空間  $\mathcal{M}_{\text{deR}}$  と微分同相である事が知られていません [26, 57, 98]。第 11 節で非アーベル的ホッジ対応と呼ばれる特別な微分同相

$$(9.24) \quad \nu : \mathcal{M}_{\text{Dol}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\text{deR}}$$

を構成します。

標準直線束  $K_C$  の全空間は  $C$  の余接束  $\pi : T^*C \rightarrow C$  です。記号  $\eta \in H^0(T^*C, \pi^*K_C)$  でトートロジー切断

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi^*K_C & & K_C \\ & \nearrow \eta & \downarrow & & \downarrow \\ T^*C & \xrightarrow{=} & T^*C & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

を表します。それは  $T^*C$  上の正則 1 形式です。ヒッグズ場  $\phi$  は  $\text{End}(E)$  に値を持つ正則 1 形式なので、その固有値は  $C$  上の正則 1 形式です。したがって、 $\phi$  の固有値の集合は射影  $\pi : T^*C \rightarrow C$  の多価切断を定めます。この多価切断の像  $\Sigma \subset T^*C$  がヒッチンスペクトル曲線で、 $C$  上の分岐被覆曲線となっています。より正確には、 $\Sigma$  は特性多項式

$$\det(\eta - \pi^*\phi) \in \pi^*K_C^{\otimes 2}$$

の 0 点からなる  $T^*C$  の因子として定義されます。正則写像

$$(9.25) \quad \mu_H : \mathcal{M}_{\text{Dol}} \ni (E, \phi) \mapsto \det(\eta - \pi^*\phi) \in B, \quad B := H^0(C, K_C^{\otimes 2})$$

をヒッチンファイバー空間 [57]、 $B$  をヒッチン底空間といいます。それは代数的完全積分可能ハミルトニアン系を  $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  上に定めます。ヒッチンは [57] でスピ構造  $K_C^{\frac{1}{2}}$  を選べば自然な切断  $\kappa : B \hookrightarrow \mathcal{M}_{\text{Dol}}$  が構成できることを示しました。今、

$$(9.26) \quad X_- := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_+ := X_-^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H := [X_+, X_-] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と置きましょう。これは 3 次元リー環  $\langle X_+, X_-, H \rangle \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  を生成します。

**補助定理 9.7.** ヒッチン底空間  $B$  の任意の点  $q \in B = H^0(C, K_C^{\otimes 2})$  に対して、安定  $SL_2(\mathbb{C})$  ヒッグズ束  $(E_0, \phi(q))$  を次のように構成する事が出来ます。

$$(9.27) \quad E_0 := \left( K_C^{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes H} = K_C^{\frac{1}{2}} \oplus K_C^{-\frac{1}{2}},$$

$$(9.28) \quad \phi(q) := X_- + qX_+ = \begin{bmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**証明.** まず、 $X_- : E_0 \rightarrow E_0 \otimes K_C$  が大域的に定義された  $\text{End}(E_0)$  値 1 形式であることに注意します。それは恒等写像

$$(9.29) \quad 1 : K_C^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{=} K_C^{-\frac{1}{2}} \otimes K_C$$

で与えられているからです。また、2次微分の掛け算は大域的写像

$$q : K_C^{-\frac{1}{2}} \rightarrow K_C^{\frac{3}{2}} = K_C^{\frac{1}{2}} \otimes K_C$$

を与えます。従って、 $\phi(q) : E_0 \rightarrow E_0 \otimes K_C$  は  $E_0$  に作用する大域的ヒッグズ場です。ヒッグズ束が安定なのは、 $q = 0$  でない限り  $E_0$  には  $\phi(q)$  不変な部分直線束が存在しないことに因ります。そして、もし  $q = 0$  ならば、不変部分直線束は  $K_C^{-\frac{1}{2}}$  であり、その次数  $-g+1$  は  $g \geq 2$  と仮定しているので常に負の値をとります。□

ヒッチン-コストANT切断を

$$(9.30) \quad \kappa : B \ni q \mapsto (E_0, \phi(q)) \in \mathcal{M}_{\text{Dol}}$$

と定義します。これは  $B$  と  $\kappa(B) \subset \mathcal{M}_{\text{Dol}}$  の間の双正則同型を与えます。

**注意 9.8.** より一般に、 $G$  を任意の複素単純代数群とする時、安定  $G$  ヒッグズ束のモジュライ空間、即ち  $G$  ヒッチンファイバー空間に、ヒッチン-コストANT切断を構成する事ができます。その構成にはコストANT [71] に依る主要3次元部分群 (TDS) の概念を用います。TDS が量子化の過程で重要な役割を果たすことが [29, 34] で指摘されました。

ヒッチン-コストANT切断  $\kappa(B)$  は正則シンプレクティック多様体  $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  のラグランジアン部分空間です。  $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  の正則シンプレクティック構造はその開稠密部分集合  $T^*SU(2, C)$  の自然な正則シンプレクティック構造に由来します。ここで、 $SU(2, C)$  は  $C$  上の2次元ベクトル束で、行列式の自明化を固定したもののモジュライ空間です。開集合  $T^*SU(2, C)$  の  $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  での余次元は2なので、余接束の自然な正則シンプレクティック形式は  $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  に必然的に拡張されます。

ヒッチンスペクトル曲線  $\Sigma$  の量子化の構成の第一段階は  $\hbar$  に解析的に依存する  $C$  の  $\hbar$  接続を定義する事です。私たちは、ベクトル束の1パラメーター変形族  $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{ccc} E_{\hbar} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \times \{\hbar\} & \longrightarrow & C \times H^1(C, K_C) \end{array}$$

と、0でない  $\hbar \in H^1(C, K_C) \cong \mathbb{C}$  に正則に依存する  $\mathbb{C}$  線形1階微分作用素  $\hbar \nabla^{\hbar} : E_{\hbar} \rightarrow E_{\hbar} \otimes K_C$  を用います。量子論のプランク定数  $\hbar$  は幾何学的に

$$(9.31) \quad \hbar \in H^1(C, K_C) = \text{Ext}^1 \left( K_C^{-\frac{1}{2}}, K_C^{\frac{1}{2}} \right) \cong \mathbb{C}$$

と解釈され、それは拡大

$$(9.32) \quad 0 \rightarrow K_C^{\frac{1}{2}} \rightarrow E_{\hbar} \rightarrow K_C^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

をただ一つ定めます。これは (9.19) と同じ物です。拡大  $E_{\hbar}$  は各  $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$  上の推移函数

$$(9.33) \quad E_{\hbar} \longleftarrow \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \xi_{\alpha\beta} & \hbar \sigma_{\alpha\beta} \\ 0 & \xi_{\alpha\beta}^{-1} \end{array} \right] \right\}$$

で与えられます。推移函数のコサイクル条件から

$$(9.34) \quad \sigma_{\alpha\gamma} = \xi_{\alpha\beta}\sigma_{\beta\gamma} + \sigma_{\alpha\beta}\xi_{\beta\gamma}^{-1}$$

が従います。 $K_C^{\frac{1}{2}}$  のコサイクル条件  $\xi_{\alpha\gamma} = \xi_{\alpha\beta}\xi_{\beta\gamma}$  を微分すると、

$$\frac{d\xi_{\alpha\gamma}}{dz_\gamma} dz_\gamma = \frac{d\xi_{\alpha\beta}}{dz_\beta} dz_\beta \xi_{\beta\gamma} + \xi_{\alpha\beta} \frac{d\xi_{\beta\gamma}}{dz_\gamma} dz_\gamma$$

が得られます。 $\xi_{\alpha\beta}^2 = \frac{dz_\beta}{dz_\alpha}$  に注意して

$$(9.35) \quad \sigma_{\alpha\beta} := -\frac{d\xi_{\alpha\beta}}{dz_\beta} = -\partial_\beta \xi_{\alpha\beta}$$

と定めれば、それは (9.34) の解を与えます。(9.23) から

$$E_\hbar \cong \begin{cases} E_1 & \hbar \neq 0, \\ E_0 = K_C^{\frac{1}{2}} \oplus K_C^{-\frac{1}{2}} & \hbar = 0. \end{cases}$$

である事が分かります。推移函数は

$$(9.36) \quad \begin{bmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \hbar\sigma_{\alpha\beta} \\ & \xi_{\alpha\beta}^{-1} \end{bmatrix} = \exp\left(\log \xi_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \exp\left(-\hbar\partial_\beta \log \xi_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

とも表されます。従って、拡大類は  $\partial_\beta \log \xi_{\alpha\beta}$  で決まっていると考えることもできます。

**補助定理 9.9.** (9.35) の拡大類  $\sigma_{\alpha\beta}$  は非自明な拡大 (9.32) を与えます。

**証明.** 層の完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \xrightarrow{d} & K_C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^* & \xrightarrow{d \log} & K_C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

から誘導されるコホモロジー完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(C, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(C, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & H^1(C, K_C) & \xrightarrow{\sim} & H^2(C, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \parallel & & \\ H^1(C, \mathbb{C}^*) & \longrightarrow & H^1(C, \mathcal{O}_C^*) & \xrightarrow{d \log} & H^1(C, K_C) & & \\ \downarrow 0 & & \downarrow c_1 & & & & \\ H^2(C, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{=} & H^2(C, \mathbb{Z}) & & & & \end{array}$$

はコサイクル  $\{\sigma_{\alpha\beta}\}$  が  $\{\xi_{\alpha\beta}\}$  の写像  $H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \xrightarrow{d \log} H^1(C, K_C)$  による像であることを示しています。もし  $d \log \{\xi_{\alpha\beta}\} = 0 \in H^1(C, K_C)$  ならば、 $\{\xi_{\alpha\beta}\}$  は  $H^1(C, \mathbb{C}^*)$  に属するコサイクルの像なので、前節でも引用したブロックの論文 [8] で説明されているように、正則

接続を伴った正則直線束を決めます。如何なる正則接続も  $C$  上平坦ですからその曲率形式は消滅し、 $g(C) \geq 2$  だとするとチャーニーヴェイユ公式から矛盾

$$0 = c_1(K_C^{\frac{1}{2}}) = g - 1 > 0$$

を生じます。従ってコサイクル  $\{\sigma_{\alpha\beta}\}$  は非自明な拡大を定めます。  $\square$

(9.35) のコサイクル  $\{\sigma_{\alpha\beta}\}$  を用いて同型  $H^1(C, K_C) \cong \mathbb{C}$  を一つ定め、変形のパラメーター  $\hbar \in \mathbb{C}$  とコホモロジー類  $\{\hbar\sigma_{\alpha\beta}\} \in H^1(C, K_C) = \mathbb{C}$  とを同一視します。直線束  $K_C^{\otimes 2}$  を座標系  $C = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  に従って局所的に自明化し、2次微分  $q \in H^0(C, K_C^{\otimes 2})$  を推移関係式

$$(9.37) \quad (q)_{\alpha} = (q)_{\beta} \xi_{\alpha\beta}^4$$

を充す局所表示の類  $\{(q)_{\alpha}\}$  で表わします。自明拡大  $E_0$  の推移関数は

$$(9.38) \quad \xi_{\alpha\beta}^H = \exp(H \log \xi_{\alpha\beta})$$

で与えられます。大域的ヒッグズ場  $X_- : E_0 \rightarrow E_0 \otimes K_C$  の局所表示  $\{X_- dz_{\alpha}\}$  は各  $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$  上で推移関係式

$$(9.39) \quad X_- dz_{\alpha} = \exp(H \log \xi_{\alpha\beta}) X_- dz_{\beta} \exp(-H \log \xi_{\alpha\beta})$$

を充します。同じ関係式がヒッグズ場  $\phi(q)$  についても成立します。

$$(9.40) \quad \phi_{\alpha}(q) dz_{\alpha} = \exp(H \log \xi_{\alpha\beta}) \phi_{\beta}(q) dz_{\beta} \exp(-H \log \xi_{\alpha\beta}).$$

**定理 9.10** ( $SL_2(\mathbb{C})$  オペーの構成). 各  $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$  上で推移関数

$$(9.41) \quad g_{\alpha\beta}^{\hbar} := \exp(H \log \xi_{\alpha\beta}) \exp(-\hbar \partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta} X_+) = \begin{bmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \\ & \xi_{\alpha\beta}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\hbar \partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta} \\ & 1 \end{bmatrix}$$

を定義します。ここで、 $\partial_{\beta} = \frac{d}{dz_{\beta}}$  と表わし、 $\hbar \partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta} \in H^1(C, K_C)$  です。この時、次に述べる諸性質が成立します。

- 推移関数  $\{g_{\alpha\beta}^{\hbar}\}$  はコサイクル条件

$$(9.42) \quad g_{\alpha\beta}^{\hbar} g_{\beta\gamma}^{\hbar} = g_{\alpha\gamma}^{\hbar}$$

を充し、(9.32) の正則ベクトル束  $E_{\hbar}$  を決めます。

- $\hbar \neq 0$  の時、各  $U_{\alpha}$  上の局所表示

$$(9.43) \quad \nabla_{\alpha}^{\hbar}(0) := d - \frac{1}{\hbar} X_- dz_{\alpha}$$

は  $E_{\hbar}$  に作用する大域正則接続を定めます。特に、射影座標系を一つ固定すると、

$$(9.44) \quad d - \frac{1}{\hbar} X_- dz_{\alpha} = g_{\alpha\beta}^{\hbar} \left( d - \frac{1}{\hbar} X_- dz_{\beta} \right) \left( g_{\alpha\beta}^{\hbar} \right)^{-1}$$

が成り立ちます。

- (9.30) のヒッチンコスタント切断の各点  $(E_0, \phi(q)) \in \kappa(B) \subset \mathcal{M}_{\text{Dol}}$  は、1パラメーター  $SL_2(\mathbb{C})$  オペーの族  $(E_{\hbar}, \nabla^{\hbar}(q)) \in \mathcal{M}_{\text{deR}}$  を誘導します。つまり、上で固定された射影座標を用いれば、各  $U_{\alpha}$  上の局所表示

$$(9.45) \quad \nabla_{\alpha}^{\hbar}(q) := d - \frac{1}{\hbar} \phi_{\alpha}(q) dz_{\alpha}$$

は  $\hbar \neq 0$  の時  $E_{\hbar}$  の大域正則接続

$$(9.46) \quad \nabla_{\alpha}^{\hbar}(q) = g_{\alpha\beta}^{\hbar} \nabla_{\beta}^{\hbar}(q) \left( g_{\alpha\beta}^{\hbar} \right)^{-1}$$

を与え、それがオペーの定義条件を充すのです。

- ドリーニュの  $\hbar$  接続

$$(9.47) \quad \hbar \nabla^{\hbar}(q) : E_{\hbar} \longrightarrow E_{\hbar} \otimes K_C$$

はヒッグズ束とオパーとを補間します。つまり、 $\hbar = 0$  の時族 (9.47) はヒッグズ束  $(E, -\phi(q)) \in \mathcal{M}_{\text{Dol}}$  を与え、 $\hbar = 1$  の時それは  $SL_2(\mathbb{C})$  オパー  $(E_1, \nabla^1(q)) \in \mathcal{M}_{\text{deR}}$  を与えるのです。

- $\hbar$  に依存するあるゲージ変換の下で、オパー  $\nabla^{\hbar}(q)$  の  $\hbar \rightarrow \infty$  での極限が存在し、それは  $\nabla^{\hbar=1}(0)$  と同じになります。これはヒッチン-コスタント切断の  $\mathbb{C}^*$  作用による不動点に対応します。

証明.  $g_{\alpha\beta}$  のコサイクル条件は既に (9.35) と (9.36) で示されました。(9.44) の証明は次の共役作用のベキ展開を用いた直接計算で得られます。

$$(9.48) \quad e^{\hbar A} B e^{-\hbar A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hbar^n (\text{ad}_A)^n(B) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hbar^n \overbrace{[A, [A, [\dots, [A, B] \dots]]}^n.$$

ベキ展開を用いて

$$\begin{aligned} & g_{\alpha\beta}^{\hbar} X_- \left( g_{\alpha\beta}^{\hbar} \right)^{-1} \\ &= \exp(H \log \xi_{\alpha\beta}) \exp(-\hbar \partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta} X_+) X_- \exp(\hbar \partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta} X_+) \exp(-H \log \xi_{\alpha\beta}) \\ &= \exp(H \log \xi_{\alpha\beta}) X_- \exp(-H \log \xi_{\alpha\beta} - \hbar \partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta} H \\ &\quad - \hbar^2 (\partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta})^2 \exp(H \log \xi_{\alpha\beta}) X_+ \exp(-H \log \xi_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

が従います。(9.15) は

$$\partial_{\beta} \partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta} = \partial_{\beta} \left( \xi_{\alpha\beta}^{-1} \partial_{\beta} \xi_{\alpha\beta} \right) = -\xi_{\alpha\beta}^{-2} (\partial_{\beta} \xi_{\alpha\beta})^2 = -(\partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta})^2$$

と同値です。従って、それは

$$\partial_{\beta} g_{\alpha\beta}^{\hbar} \left( g_{\alpha\beta}^{\hbar} \right)^{-1} = \partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta} H + \hbar (\partial_{\beta} \log \xi_{\alpha\beta})^2 \exp(H \log \xi_{\alpha\beta}) X_+ \exp(-H \log \xi_{\alpha\beta})$$

とも同値となります。(9.39) に注意すれば、(9.15) が

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\hbar} g_{\alpha\beta}^{\hbar} X_- \left( g_{\alpha\beta}^{\hbar} \right)^{-1} + \partial_{\beta} g_{\alpha\beta}^{\hbar} \left( g_{\alpha\beta}^{\hbar} \right)^{-1} \right) dz_{\beta} &= \frac{1}{\hbar} \exp(H \log \xi_{\alpha\beta}) X_- dz_{\beta} \exp(-H \log \xi_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{\hbar} X_- dz_{\alpha} \end{aligned}$$

を与えます。(9.44) が射影座標での関係式であることは命題 9.2 から分かります。

(9.46) の証明には (9.44) に加えて

$$(9.49) \quad (q)_{\alpha} X_+ dz_{\alpha} = g_{\alpha\beta}^{\hbar}(q)_{\beta} X_+ dz_{\beta} \left( g_{\alpha\beta}^{\hbar} \right)^{-1}$$

を示さねばなりません、(9.49) は (9.40) と (9.41) から明らかです。

$SL_2(\mathbb{C})$  オパーの定義に必要な部分直線束  $F$  は、単純に  $K_C^{\frac{1}{2}}$  を取れば済みます。要請される同型 (9.11) は (9.29) の帰結です。

最後に、各座標近傍  $U_{\alpha}$  上で与えられたベクトル束自己同型

$$(9.50) \quad \hbar^{-\frac{H}{2}} = \begin{bmatrix} \hbar^{-\frac{1}{2}} & \\ & \hbar^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

による接続  $\nabla^{\hbar}(q)$  のゲージ変換は

$$(9.51) \quad d - \frac{1}{\hbar} \phi(q) \longmapsto \hbar^{-\frac{H}{2}} \left( d - \frac{1}{\hbar} \phi(q) \right) \hbar^{\frac{H}{2}} = d - \left( X_- + \frac{q}{\hbar^2} X_+ \right)$$

となります。これは、共役公式 (9.48) から直ちに従う

$$\hbar^{-\frac{H}{2}} X_- \hbar^{\frac{H}{2}} = \hbar X_- \quad \text{と} \quad \hbar^{-\frac{H}{2}} X_+^2 \hbar^{\frac{H}{2}} = \hbar^{-2} X_+^2$$

の帰結です。故に

$$\lim_{\hbar \rightarrow \infty} \nabla^{\hbar}(q) \sim d - X_- = \nabla^{\hbar=1}(0)$$

である事が分かります。ここで、記号 $\sim$ はゲージ同値であることを意味します。こうして定理の証明がことごとく完了しました。□

この構成定理からさらに次の定理が得られます。

**定理 9.11** (ヒッチンスペクトル曲線の双正則量子化).  $C$  を種数 2 以上のコンパクトリーマン面とし、その複素構造に整合的な射影座標系を一つ固定します。 $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  で  $C$  上の安定正則  $SL_2(\mathbb{C})$  ヒッグズ束のモジュライ空間を表し、 $\mathcal{M}_{\text{deR}}$  で既約正則  $SL_2(\mathbb{C})$  接続のモジュライ空間を表わします。テータ指標  $K_C^{\frac{1}{2}}$  を固定し、(9.30) で与えたようにヒッチンーコストANT切断  $\kappa(B) \subset \mathcal{M}_{\text{Dol}}$  を選びます。定義に必要な直線束として  $F = K_C^{\frac{1}{2}}$  を選んだ  $SL_2(\mathbb{C})$  オパーのモジュライ空間を  $Op \subset \mathcal{M}_{\text{deR}}$  で表します。このとき、 $\hbar = 1$  での写像

$$(9.52) \quad \mathcal{M}_{\text{Dol}} \supset \kappa(B) \ni (E_0, \phi(q)) \xrightarrow{\gamma} (E_{\hbar}, \nabla^{\hbar}(q)) \in Op \subset \mathcal{M}_{\text{deR}}$$

は、 $\kappa(B)$  から  $Op$  への双正則写像を与えます。定義域と値域の複素構造はそれぞれ  $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  と  $\mathcal{M}_{\text{deR}}$  とから誘導されたものです。

双正則量子化写像 (9.52) は、さらに  $\mathbb{C}^*$  同変です。 $\lambda \in \mathbb{C}^*$  の  $\kappa(B)$  への作用は  $\phi \mapsto \lambda\phi$  で与えられます。 $(E_0, \lambda\phi(q)) \in \kappa(B)$  に対応するオパーは  $d - \frac{\lambda}{\hbar}\phi(q)$  です。

**証明.**  $\mathbb{C}^*$  同変性はゲージ変換 (9.50)、(9.51) と同じ議論から従います。ヒッチンーコストANT切断への作用  $\phi \mapsto \lambda\phi$  は写像  $\mu_H$  を通してヒッチン底空間の重み付き作用

$$B \ni q \mapsto \lambda^2 q \in B$$

を誘導します。こうして、ゲージ変換  $(\frac{\lambda}{\hbar})^{\frac{H}{2}}$  によるゲージ同値

$$d - \frac{\lambda}{\hbar}\phi(q) \sim \left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^{\frac{H}{2}} \left(d - \frac{\lambda}{\hbar}\phi(q)\right) \left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^{-\frac{H}{2}} = d - \left(X_- + \frac{\lambda^2 q}{\hbar^2} X_+\right)$$

が得られます。□

**注意 9.12.** 構成定理の中で射影座標系を用いたことは本質的です。この座標系でのみ定義式 (9.45) が意味を為すのです。これは (9.14) によって  $\xi_{\alpha\beta}$  の 2 次微分が消滅することによって来します。また、上で見たように射影座標系はオパーのモジュライ空間  $Op$  の原点  $\nabla^1(0)$  を決めます。他のオパー  $\nabla^1(q)$  は、単に原点の  $q \in H^0(C, K_C^{\otimes 2})$  による平行移動で与えられるのです。

## 10. $SL_2(\mathbb{C})$ オパーの準古典 (WKB) 近似

繰り返しになりますが、コンパクトリーマン面  $C$  上の正則接続は平坦です。従って、それは  $C$  上に  $\mathcal{D}$  加群を定めます。前節の議論を踏襲し、 $C$  の射影座標系を一つ固定します。ヒッチンーコストANT切断 (9.30) の点  $(E_0, \phi(q)) = \kappa(q)$  はオパーの  $\hbar$  変形族  $(E_{\hbar}, \nabla^{\hbar}(q))$  を一つ決めます。この節では、ドリーニユの  $\hbar$  接続  $\hbar\nabla^{\hbar}(q)$  が  $B$  をパラメーター空間とする  $C$  上の  $\mathcal{D}$  加群の変形族を与えること、そして、その準古典極限が  $B$  上定義されるスペクトル曲線の普遍変形族と一致すること、を示します。

準古典極限を計算するために、ベクトル束  $E_{\hbar}$  を各座標近傍  $U_{\alpha}$  上で自明化し、そこで射影座標を  $z_{\alpha}$  とします。 $E_{\hbar}|_{U_{\alpha}}$  の平坦切断  $\Psi_{\alpha}$  は微分方程式

$$(10.1) \quad \hbar\nabla_{\alpha}^{\hbar}(q)\Psi_{\alpha} := (\hbar d - \phi_{\alpha}(q)) \begin{bmatrix} \hbar\psi \\ \psi \end{bmatrix}_{\alpha} = 0$$

の解です。ここで、 $\psi$  は未知函数を表します。 $\Psi_{\alpha} = g_{\alpha\beta}^{\hbar}\Psi_{\beta}$  なので、 $U_{\alpha}$  上の函数  $\psi$  は推移関係  $(\psi)_{\alpha} = \xi_{\alpha\beta}^{-1}(\psi)_{\beta}$  を充します。つまり、 $\psi$  は実は直線束  $K_C^{-\frac{1}{2}}$  の局所切断であったわ

けです。\$q\$ は \$U\_\alpha\$ 上正則関数で表されるので、(10.1) は二つの 1 次独立解を持ちます。\$\phi(q)\$ は \$\hbar\$ によらず

$$(10.2) \quad \phi(q) = \begin{bmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

という形を取るので、(10.1) は未知関数 \$\psi \in K\_C^{-\frac{1}{2}}\$ の 2 階微分方程式

$$(10.3) \quad \hbar^2 \psi'' - q\psi = 0$$

と同値です。私たちは射影座標を用いているので、接続 \$\nabla^{\hbar}(q)\$ はどの座標近傍 \$U\_\alpha\$ でも同じ形をしています。ということは、\$\psi\$ の方程式 (10.3) もどこでも同じ形を取る、ということになります。これはまさに (9.2) で実現したかった事です。こうして、私たちはスペクトル曲線に対応する量子曲線と呼ぶに相応しい微分方程式を得ることができました。ここまで来れば、\$\hbar \nabla^{\hbar}(q)\$ の決める \$D\$ 加群の準古典極限を求めることは容易です。

**定理 10.1** (オパーの準古典極限). 定理 9.11 と同じ設定のもとで、(9.52) で与えられたオパーの族に対応する \$D\$ 加群の族 \$(E\_{\hbar}, \hbar \nabla^{\hbar}(q))\$ を \$\mathcal{E}(q, \hbar)\$ で表します。その準古典極限は特性方程式 \$\det(\eta - \phi(q)) = 0\$ で定まるスペクトル曲線 \$\Sigma \subset T^\*C\$ で与えられます。

\$U\_\alpha\$ 上の正則関数 \$S\_0(z\_\alpha)\$ を \$dS\_0 = y dz\_\alpha\$ となるように選び、\$T^\*C|\_{U\_\alpha}\$ の自明化を与えます。この関数を用いて、(10.3) の準古典極限を求めると、結果は

$$(10.4) \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{\hbar} S_0(z_\alpha)} \left[ \hbar^2 \left( \frac{d}{dz_\alpha} \right)^2 - q \right] e^{\frac{1}{\hbar} S_0(z_\alpha)} = y^2 - q$$

となります。準古典極限の計算は対角行列 \$e^{-\frac{1}{\hbar} S\_0(z\_\alpha)} I\_{2 \times 2}\$ での共役を接続 \$\hbar \nabla^{\hbar}(q)\$ に施した後その行列式を取り、さらに \$\hbar\$ を 0 にする極限操作を行うことと全く同じです。

スペクトル曲線の普遍変形族 \$\mathcal{S}\_C \rightarrow C \times B\$ は

$$(10.5) \quad \begin{array}{ccccc} T^*C \times B & \longleftarrow & \mathcal{S}_C & \longleftarrow & (\det(\eta - \phi(q)))_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C \times B & \longleftarrow & C \times B & \longleftarrow & C \times \{q\} \end{array}$$

で定義されます。任意の \$\hbar \in H^1(C, K\_C)\$ に対応して、(9.47) で与えた \$\hbar\$ 接続 \$(E\_{\hbar}, \hbar \nabla^{\hbar}(q))\$ は \$E\_{\hbar}\$ に大域的 \$D\_C\$ 加群の構造を定めます。\$C\$ にスピン構造と射影構造とを与えれば、このようにして \$D\_C\$ 加群の族 \$\mathcal{E}\_C\$ が

$$(10.6) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_C & \longleftarrow & (E_{\hbar}, \nabla^{\hbar}(q)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \times B \times H^1(C, K_C) & \longleftarrow & C \times \{q\} \times \{\hbar\}. \end{array}$$

として決まります。準古典極限は可換図式

$$(10.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_C & \longrightarrow & \mathcal{S}_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \times B \times H^1(C, K_C) & \longrightarrow & C \times B \end{array}$$

に他なりません。



## 11. 異なるヒッチンモジュライ空間の間の非アーベル的ホッジ対応

双正則写像 (9.52) は底曲線  $C$  の射影構造を固定して得られました。ガイアウト [47] はこの対応が、非アーベル的ホッジ対応のスケール極限として自動的に構成されるだろうと予想しました。この予想は [29] で、任意の複素単純単連結リー群  $G$  を用いた正則  $G$  ヒッグズ束のモジュライ  $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  のヒッチン-コスタントラグランジアン部分多様体と、既約正則  $G$  接続のモジュライ  $\mathcal{M}_{\text{deR}}$  内のオパーの空間との間の同型として解決されました。この節では、[29] の主要結果を  $G = SL_2(\mathbb{C})$  の場合に解説し、今まで述べてきた量子化との関連を明らかにします。

記号  $E^{\text{top}}$  で種数 2 以上のコンパクトリーマン面  $C$  上の位相的に自明な複素 2 次元ベクトル束を表わします。  $C$  上の代数的ベクトル束の安定性条件と微分幾何的関数が充す偏微分方程式との同値対応は、ナラシムハン-セシャドリ [89] によって安定ベクトル束のモジュライ空間の位相不変量の導出に有効に使われました ([5, 88] も参照)。この古典的結果に倣い、 $SL_2(\mathbb{C})$  ヒッグズ束  $(E, \phi)$  の安定性をヒッチンの方程式と呼ばれる偏微分方程式系で定義することが出来ます [26, 57, 98]。方程式の未知関数は、 $E^{\text{top}}$  のエルミートファイバー計量  $h$  とその計量に関するユニタリ接続  $D$ 、そして  $C$  上の可微分  $sl_2(\mathbb{C})$  値 1 形式  $\phi$  です。ヒッチンの方程式は次の式で与えられます。

$$(11.1) \quad \begin{cases} F_D + [\phi, \phi^\dagger] = 0 \\ D^{0,1}\phi = 0. \end{cases}$$

ここで、 $F_D$  はユニタリ接続  $D$  の曲率 2 形式、 $\phi^\dagger$  は  $\phi$  の  $h$  についてのエルミート共役、そして  $D^{0,1}$  は底曲線  $C$  の複素構造で定まる  $D$  のコーシー-リーマン成分を表わします。 $D^{0,1}$  は  $E^{\text{top}}$  に複素構造を誘導します。それを単に  $E$  で表すことにします。(11.1) の第 2 式は  $\phi$  のコーシー-リーマン方程式ですから、 $\phi$  は  $E$  の正則ヒッグズ場になります。ヒッチンの方程式の解からこうして構成された  $(E, \phi)$  は安定ヒッグズ束です。逆に、安定ヒッグズ束  $(E, \phi)$  はヒッチンの方程式を充す調和エルミート計量  $h$  と、それに伴ったチャーン接続  $D$  とを与えます [98]。正則ヒッグズ束  $(E, \phi)$  の安定性はこうして (11.1) に翻訳される訳です。

可微分接続の 1 パラメーター族を次の式で定義しましょう。

$$(11.2) \quad D(\zeta) := \frac{1}{\zeta} \cdot \phi + D + \zeta \cdot \phi^\dagger, \quad \zeta \in \mathbb{C}^*.$$

$D(\zeta)$  が全ての  $\zeta$  で平坦であることと (11.1) とは同値です。非アーベル的ホッジ対応 [26, 57, 78, 98] とは微分同相写像

$$\nu: \mathcal{M}_{\text{Dol}} \ni (E, \phi) \longmapsto (\tilde{E}, \tilde{\nabla}) \in \mathcal{M}_{\text{deR}}$$

を指します。この二つのモジュライ空間の微分同相を示す事は本稿の範囲を遥かに超えてしまうので、ここでは写像  $\nu$  の定義を与えるだけに留めます。まず、安定ヒッグズ束  $(E, \phi)$  に対応するヒッチンの方程式の解を  $(D, \phi, h)$  としましょう。それは平坦接続の族  $D(\zeta)$  を誘導します。その  $\zeta = 1$  での値のコーシー-リーマン成分  $D(\zeta = 1)^{0,1}$  を使って  $E^{\text{top}}$  に複素構造を与え、 $\tilde{E}$  と表します。接続  $D(\zeta)$  は平坦ですから、 $\tilde{\nabla} := D(\zeta = 1)^{1,0}$  は自動的に  $\tilde{E}$  に作用する正則接続になります。 $(E, \phi)$  の安定性はこの接続が既約であることを保証するので、 $(\tilde{E}, \tilde{\nabla}) \in \mathcal{M}_{\text{deR}}$  が得られました。この対応は実ユニタリ接続  $D$  を経由するので、複素構造  $E$  から  $\tilde{E}$  への移行は複素解析的変形ではありません。

リーマン-ヒルベルト対応は、接続にそのホロノミー表現を対応させることによって複素解析的同型

$$(11.3) \quad \mathcal{M}_{\text{deR}} \cong \text{Hom}(\pi_1(C), SL_2(\mathbb{C})) // SL_2(\mathbb{C})$$

を与えます。 $\pi_1(C)$  は簡単な有限表示を持つ群ですから、(11.3) の右辺はアフィン代数多様体です。ところで、 $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  はヒッチンファイバー空間ですから、非特異なスペクトル曲線  $\Sigma \rightarrow C$  に対応するコンパクトなプリム多様体  $\text{Prym}(\Sigma \rightarrow C)$  がファイバーとして含まれています。アフィン代数多様体はコンパクト複素部分多様体を持ち得ないので、非アーベル的ホッジ対応 (9.24) は複素解析同型ではありません。複素構造が違うという点が本質

的で、 $\mathcal{M}_{\text{Dol}}$  はハイパーケーラー多様体として扱われるべきものなのです。この方面での近年の爆発的発展の一つのきっかけはカプスティンとウィッテンによる物理学からの影響 [64] でした。

物理学者ガイオットは、1パラメーター族 (11.2) を拡張して次に述べる予想を立てました。

**予想 11.1** (ガイオット [47]). 安定ヒッグズ束  $(E_0, \phi(q))$  がヒッチン-コスタント切断上の点であるとし、それに対応するヒッチンの方程式 (11.1) の解を  $(D, \phi, h)$  で表わします。平坦接続の 2パラメーター族

$$(11.4) \quad D(\zeta, R) := \frac{1}{\zeta} \cdot R\phi + D + \zeta \cdot R\phi^\dagger, \quad \zeta \in \mathbb{C}^*, R \in \mathbb{R}_+$$

を考えましょう。このとき、任意の  $\hbar \in \mathbb{C}^*$  に対してスケール極限

$$(11.5) \quad \lim_{\substack{R \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0 \\ \zeta/R = \hbar}} D(\zeta, R)$$

は収束し、その極限はオパーの  $\hbar$  変形族を為します。

**注意 11.2.** (1)  $R \rightarrow 0$  の極限でエルミート計量  $h$  は発散するので、スケール極限の存在は自明ではありません。また、非アーベル的ホッジ対応と違って、ガイオット極限はヒッチン-コスタント切断上の点のみに有効です。

(2) 元々の予想は  $\phi$  が特異点を持った場合に定式化されました。

**定理 11.3** ([29]). 任意の複素単純単連結代数群  $G$  で定義される正則ヒッグズ束の場合にガイオットの予想は成立します。

表現 (3.2) が忠実ならば  $C$  を普遍被覆面  $\mathbb{H}$  の商空間 (3.3) として実現することを思い起しましょう。

$$C \cong \mathbb{H}/\rho(\pi_1(C)).$$

忠実表現  $\rho$  は埋め込み  $SL_2(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{C})$  によって  $\mathbb{H}$  から誘導された  $C$  上の射影構造を引き起こします。これがフックス型モデルと呼ばれるものです。

**系 11.4** (ガイオット対応と量子化 [29]).  $C$  上のフックス型射影構造をひとつ固定します。予想 11.1 の設定のもとで、極限オパー (11.5) は

$$(11.6) \quad \lim_{\substack{R \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0 \\ \zeta/R = \hbar}} D(\zeta, R) = d - \frac{1}{\hbar} \phi(q) = \nabla^{\hbar}(q), \quad \hbar \neq 0,$$

で与えられます。対応

$$(E_0, \phi(q)) \xrightarrow{\gamma} (E_{\hbar}, \nabla^{\hbar}(q))$$

は、 $\hbar \neq 0$  を固定したとき双正則写像になります。

**定理の証明.** 基本的なアイデアは、ベクトル束  $E_0$  が  $K_C$  を用いて構成されているので、ファイバー計量  $h$  が自然に  $C$  自体の計量で与えられる、という点です。  $q = 0$  の場合のヒッチンの方程式 (11.1) は  $C$  のケーラー計量に対する調和方程式になります。その解はもちろん負定曲率双極計量に他なりません。さらに、この調和計量が  $C$  のフックス型射影構造を定めます。定曲率双極計量から決まるファイバー計量を背景計量として、一般の場合を摂動展開で解析し、スケール極限の挙動を調べるのです。詳しくは、原論文 [28, 29] を参照してください。  $\square$

**注意 11.5.** 第2部で展開したお話は、より一般の単純単連結代数群  $G$  で成立します [29, 34]。鍵となるのはコスタントの 3次元部分群 [71] です。TDS を用いて  $SL_2(\mathbb{C})$  の場合の構成を  $G$  に拡張するというアイデアがうまく働くのです。

## REFERENCES

- [1] L. Abrams, *Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras*, Journal of Knot Theory and Ramifications **5**, 335–352 (2000).
- [2] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Mariño, and C. Vafa, *Topological Strings and Integrable Hierarchies*, [arXiv:hep-th/0312085], Commun. Math. Phys. **261**, 451–516 (2006).
- [3] J.E. Andersen, S. Gukov, and D. Pei, *The Verlinde formula for Higgs bundles*, arXiv:1608.01761 (2016).
- [4] M.F. Atiyah, *Topological quantum field theory*, [arXiv:hep-th/0312085], Publications Mathématiques de l’I.H.É.S., **68**, 175–186 (1988).
- [5] M.F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. Royal Soc. London A **308**, 523–615 (1982).
- [6] A. Beilinson and V. Drinfeld, *Opers*, arXiv:math/0501398v1 [math.AG] (2005).
- [7] A. Beauville, M. S. Narasimhan, and S. Ramanan, *Spectral curves and the generalized theta divisor*, J. reine angew. Math. **398**, 169–179 (1989).
- [8] S. Bloch, *The dilogarithm and extensions of Lie algebras*, in “Algebraic K-theory Evanston 1980,” 23 pages (1981).
- [9] G. Borot, *Lecture notes on topological recursion and geometry*, arXiv:1705.09986 (2017).
- [10] V. Bouchard, D. Hernández Serrano, X. Liu, and M. Mulase, *Mirror symmetry for orbifold Hurwitz numbers*, arXiv:1301.4871 [math.AG] (2013).
- [11] V. Bouchard, A. Klemm, M. Mariño, and S. Pasquetti, *Remodeling the B-model*, Commun. Math. Phys. **287**, 117–178 (2009).
- [12] V. Bouchard, A. Klemm, M. Mariño, and S. Pasquetti, *Topological open strings on orbifolds*, Commun. Math. Phys. **296**, 589–623 (2010).
- [13] V. Bouchard and M. Mariño, *Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry*, Proc. Symposia Pure Math. **78**, 263–283 (2008).
- [14] K. Chapman, M. Mulase, and B. Safnuk, *The Kontsevich constants for the volume of the moduli of curves and topological recursion*, Communications in Number Theory and Physics **5**, 643–698 (2011).
- [15] R. Cohen and P. Norbury, *Morse field theory*, Asian Journal of Mathematics **16**, 661–712 (2012).
- [16] D. Cooper, D.M. Culler, H. Gillet, D. Long, and P. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118**, 47–84 (1994).
- [17] D. Cox and S. Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs **68**, 469 pps, American Mathematical Society (1999).
- [18] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publications Mathématiques de l’I.H.É.S. **36**, 75–109 (1969).
- [19] R. Dijkgraaf, *A geometrical approach to two-dimensional Conformal Field Theory*, Ph.D. Thesis, Universiteit Utrecht (1989).
- [20] R. Dijkgraaf, H. Fuji, and M. Manabe, *The Volume Conjecture, Perturbative Knot Invariants, and Recursion Relations for Topological Strings*, Nucl. Phys. **B849**, 166–211 (2011).
- [21] R. Dijkgraaf, L. Hollands, and P. Sulkowski, *Quantum curves and D-modules*, Journal of High Energy Physics **0810.4157**, 1–58 (2009).
- [22] R. Dijkgraaf, L. Hollands P. Sulkowski, and C. Vafa, *Supersymmetric gauge theories, intersecting branes and free Fermions*, Journal of High Energy Physics **0802.106**, (2008).
- [23] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde, *Loop equations and Virasoro constraints in non-perturbative two-dimensional quantum gravity*, Nucl. Phys. **B348**, 435–456 (1991).
- [24] T. Dimofte, D. Gaiotto, and S. Gukov, *3-manifolds and 3d indices*, Adv. Theor. Math. Phys. **17**, 975–1076 (2013).
- [25] T. Dimofte and S. Garoufalidis, *Quantum modularity and complex Chern-Simons theory* arXiv:1511.05628 [math.GT] (2015).
- [26] S.K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, Journal of Differential Geometry, **18** (2): 269–277, (1983).
- [27] B. Dubrovin and Y. Zhang, *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants*, arxiv:math/0108160 [math.DG] (2001).
- [28] O. Dumitrescu, *A journey from the Hitchin section to opers*, To appear in “Proceedings of the String-Math 2016,” American Mathematical Society (2018).
- [29] O. Dumitrescu, L. Fredrickson, G. Kydonakis, R. Mazzeo, M. Mulase, and A. Neitzke, *Opers versus non-abelian Hodge*, arXiv:1608.03994 (2016).
- [30] O. Dumitrescu and M. Mulase, *Quantum curves for Hitchin fibrations and the Eynard-Orantin theory*, Lett. Math. Phys. **104**, 635–671 (2014).
- [31] O. Dumitrescu and M. Mulase, *Quantization of spectral curves for meromorphic Higgs bundles through topological recursion*, arXiv:1411.1023 (2014).
- [32] O. Dumitrescu and M. Mulase, *Edge-contraction operations on cell graphs and 2D TQFT*, to appear in Journal of Algebra (2018).
- [33] O. Dumitrescu and M. Mulase, *Lectures on the topological recursion for Higgs bundles and quantum curves*, to appear in IMS Lecture Notes Series, National University of Singapore. arXiv:1509.09007 (2015).
- [34] O. Dumitrescu and M. Mulase, *Interplay between opers, quantum curves, WKB analysis, and Higgs bundles*, arXiv:1702.00511 (2017).
- [35] O. Dumitrescu and M. Mulase, *Mirror of orbifold Hurwitz numbers as a spectral curve*, preprint (2017).
- [36] O. Dumitrescu and M. Mulase, *Category of cell graphs and cohomological field theory*, in preparation.

- [37] O. Dumitrescu, M. Mulase, A. Sorkin and B. Safnuk, *The spectral curve of the Eynard-Orantin recursion via the Laplace transform*, in “Algebraic and Geometric Aspects of Integrable Systems and Random Matrices,” Dzhamay, Maruno and Pierce, Eds. Contemporary Mathematics **593**, 263–315 (2013).
- [38] P. Dunin-Barkowski, M. Mulase, P. Norbury, A. Popolitov, and S. Shadrin, *Quantum spectral curve for the Gromov-Witten theory of the complex projective line*, arXiv:1312.5336 [math-ph] (2013).
- [39] P. Dunin-Barkowski, N. Orantin, S. Shadrin, and L. Spitz, *Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure*, arXiv:1211.4021 [physics.math-ph (math.AG, physics.hep-th)] (2012).
- [40] B. Eynard, *A short overview of the “Topological recursion”*, arXiv:1412.3286 (2014).
- [41] B. Eynard, M. Mulase and B. Safnuk, *The Laplace transform of the cut-and-join equation and the Bouchard-Mariño conjecture on Hurwitz numbers*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **47**, 629–670 (2011).
- [42] B. Eynard and N. Orantin, *Invariants of algebraic curves and topological expansion*, Communications in Number Theory and Physics **1**, 347–452 (2007).
- [43] C. Faber and R. Pandharipande, *Hodge integrals, partition matrices, and the  $\lambda_g$  conjecture*, Ann. of Math. **157**, 97–124 (2003).
- [44] B. Fang, C.-C. M. Liu, and Z. Zong, *All genus open-closed mirror symmetry for affine toric Calabi-Yau 3-orbifolds*, arXiv:1310.4818 [math.AG] (2013).
- [45] B. Fang, C.-C. M. Liu, and Z. Zong, *On the Remodeling Conjecture for Toric Calabi-Yau 3-Orbifolds*, arXiv:1604.07123 (2016).
- [46] C. Frohman, R. Gelca, and W. Lofaro, *The A-polynomial from the noncommutative viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, 735–747 (2002).
- [47] D. Gaiotto, *Opers and TBA*, arXiv:1403.6137 [hep-th] (2014).
- [48] D. Gaiotto, G.W. Moore, and A. Neitzke, *Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation*, arXiv:0907.3987 [hep-th] (2009).
- [49] S. Garoufalidis, *On the characteristic and deformation varieties of a knot*, Geometry & Topology Monographs **7**, 291–309 (2004).
- [50] S. Garoufalidis and T.T.Q. Lê, *The colored Jones function is  $q$   $\mathfrak{D}$  holonomic*, Geometry and Topology **9**, 1253–1293 (2005).
- [51] S. Garoufalidis and R. Kashaev, *From state integrals to  $q$ -series*, arXiv:1304.2705 (2013).
- [52] S. Garoufalidis and R. Kashaev, *Evaluation of state integrals at rational points*, Commun. Number Theory Phys. **7**, (2015).
- [53] A. Givental, *Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians*, Moscow Mathematical Journal **1**, 551–568 (2001).
- [54] A. Grassi, Y. Hatsuda, and M. Mariño, *Topological strings from Quantum Mechanics*, arXiv:1410.3382. (2014).
- [55] S. Gukov and P. Sułkowski, *A-polynomial, B-model, and quantization*, arXiv:1108.0002v1 [hep-th] (2011).
- [56] R.C. Gunning, *Special coordinate coverings of Riemann surfaces*, Math. Annalen **170**, 67–86 (1967).
- [57] N.J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (Ser. 3) **55**, 59–126 (1987).
- [58] N.J. Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, Duke Math. J. **54**, 91–114 (1987).
- [59] A. Hodge and M. Mulase, *Hitchin integrable systems, deformations of spectral curves, and KP-type equations*, Advanced Studies in Pure Mathematics **59**, 31–77 (2010).
- [60] L. Hollands, *Topological strings and quantum curves*, Ph.D. Thesis, University of Amsterdam arXiv:0911.3413 [hep-th] (2009).
- [61] D. Huybrechts and M. Lehn, *Stable pairs on curves and surfaces*, arXiv:alg-geom/9211001 (1992).
- [62] K. Iwaki, O. Marchal, and A. Saens-Rodriguez, *Painlevé equations, topological type property and reconstruction by the topological recursion*, arXiv:1601.02517 (2016).
- [63] K. Iwaki and A. Saens-Rodriguez, *Quantum Curve and the First Painlevé Equation*, arXiv:1507.06557 (2015).
- [64] A. Kapustin and E. Witten, *Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program*, Communications in Number Theory and Physics **1**, 1–236 (2007).
- [65] R. Kashaev and M. Mariño, *Operators from mirror curves and the quantum dilogarithm*, arXiv:1501.01014 [hep-th], (2015).
- [66] M. Kazarian and S. Lando, *An algebro-geometric proof of Witten’s conjecture*, Journal of the American Mathematical Society **20**, 1079–1089 (2007).
- [67] M. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Communications in Mathematical Physics **147**, 1–23 (1992).
- [68] M. Kontsevich and Y.I. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Communications in Mathematical Physics **164**, 525–562 (1994).
- [69] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Wall-crossing structures in Donaldson-Thomas invariants, integrable systems and Mirror Symmetry*, arXiv:1303.3253 [math.AG] (2013).
- [70] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Airy structures and symplectic geometry of topological recursion*, arXiv:1701.09137 [math.AG] (2017).
- [71] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math., **81**, 973–1032 (1959).
- [72] J. Lurie, *On the classification of topological field theories*, Current Developments in Mathematics **2008**, 129–280 (2009).

- [73] A. Marian, D. Oprea, R. Pandharipande, A. Pixton, and D. Zvonkine, *The Chern character of the Verlinde bundle over  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$* , arXiv:1311.3028 (2013).
- [74] M. Mariño, *Open string amplitudes and large order behavior in topological string theory*, J. High Energy Physics **0803-060**, 1–33 (2008).
- [75] M. Mariño, *Spectral Theory and Mirror Symmetry*, arXiv:1506.07757 (2015).
- [76] M. Mirzakhani, *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*, Invent. Math. **167**, 179–222 (2007).
- [77] M. Mirzakhani, *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves*, J. Amer. Math. Soc. **20**, 1–23 (2007).
- [78] T. Mochizuki, *Wild harmonic bundles and wild pure twistor  $D$ -modules*, arXiv:0803.1344, 621 pages (2010).
- [79] M. Mulase, *Cohomological structures in soliton equations and Jacobian varieties*, Journal of Differential Geometry **19**, 403–430 (1984).
- [80] M. Mulase, *Algebraic theory of the KP equations*, in “Perspectives in Mathematical Physics,” R. Penner and S.-T. Yau, Editors, International Press Company, 157–223 (1994).
- [81] M. Mulase and M. Penkava, *Ribbon graphs, quadratic differentials on Riemann surfaces, and algebraic curves defined over  $\overline{\mathbb{Q}}$* , The Asian Journal of Mathematics **2** (4), 875–920 (1998).
- [82] M. Mulase and M. Penkava, *Topological recursion for the Poincaré polynomial of the combinatorial moduli space of curves*, Advances in Mathematics **230**, 1322–1339 (2012).
- [83] M. Mulase and B. Safnuk, *Mirzakhani’s Recursion Relations, Virasoro Constraints and the KdV Hierarchy*, Indian Journal of Mathematics **50**, 189–228 (2008).
- [84] M. Mulase, S. Shadrin, and L. Spitz, *The spectral curve and the Schrödinger equation of double Hurwitz numbers and higher spin structures*, Communications in Number Theory and Physics **7**, 1–19 (2013).
- [85] M. Mulase and P. Sułkowski, *Spectral curves and the Schrödinger equations for the Eynard-Orantin recursion*, arXiv:1210.3006 (2012).
- [86] M. Mulase and N. Zhang, *Polynomial recursion formula for linear Hodge integrals*, Communications in Number Theory and Physics **4**, 267–294 (2010).
- [87] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, in “Arithmetic and Geometry,” M. Artin and J. Tate, eds., Part II, 271–328, Birkhäuser, 1983.
- [88] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 294 pages, Springer-Verlag (1994).
- [89] M.S. Narasimhan and C.S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Annals of Mathematics, Second Series, **82**, 540–567 (1965).
- [90] T. Nakatsu and K. Takasaki, *Open string amplitudes of closed topological vertex*, arXiv:1507.07053 [math-ph] (2015).
- [91] A. Okounkov and R. Pandharipande, *Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models, I*, Proc. Symposia Pure Math. **80**, 325–414 (2009).
- [92] H. Ooguri, P. Sułkowski, M. Yamazaki, *Wall Crossing As Seen By Matrix Models*, arXiv:1005.1293 (2010).
- [93] M. Ossendrijver, *Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter’s position from the area under a time-velocity graph*, Science **351**, Issue 6272, 482–484 (2016).
- [94] A. Pixton, *The tautological ring of the moduli space of curves*, Princeton Ph.D. Thesis, June 2013.
- [95] B. Riemann, *Theorie der Abel’schen Functionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **54**, 101–155 (1857).
- [96] E. Robson, *Words and pictures: New light on Plimpton 322*, Mathematical Association of America Monthly **109**, 105–120 (2002).
- [97] G. Segal, *Geometric aspect of quantum field theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto, Japan 1990, 1387–1396 (1991).
- [98] C.T. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Publications Mathématiques de l’I.H.E.S. **75**, 5–95 (1992).
- [99] C. Teleman, *The structure of 2D semi-simple field theories*, Inventiones Mathematicae **188**, 525–588 (2012).
- [100] T.R.S. Walsh and A.B. Lehman, *Counting rooted maps by genus. I*, Journal of Combinatorial Theory **B-13**, 192–218 (1972).
- [101] E. Witten, *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in Differential Geometry **1**, 243–310 (1991).
- [102] E. Witten, *Mirror symmetry, Hitchin’s equations, and Langlands duality*, arXiv:0802.0999 (2008).
- [103] D. Zagier, *Quantum modular forms*, in “Quanta of maths,” Clay Math. Proc., vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 659–675 (2010).
- [104] J. Zhou, *Quantum Mirror Curves for  $\mathbb{C}^3$  and the Resolved Conifold*, arXiv:1207.0598v1 [math.AG] (2012).

OLIVIA DUMITRESCU: DEPARTMENT OF MATHEMATICS, CENTRAL MICHIGAN UNIVERSITY, MOUNT PLEASANT, MI 48859, U.S.A., AND SIMION STOILOW INSTITUTE OF MATHEMATICS, ROMANIAN ACADEMY, 21 CALEA GRIVITEI STREET, 010702 BUCHAREST, ROMANIA

*E-mail address:* dumit1om@cmich.edu

MOTOHICO MULASE: DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF CALIFORNIA, DAVIS, CA 95616–8633, U.S.A., AND KAVLI INSTITUTE FOR PHYSICS AND MATHEMATICS OF THE UNIVERSE, THE UNIVERSITY OF TOKYO, KASHIWA, JAPAN

*E-mail address:* mulase@math.ucdavis.edu