Seminar „Relaxationen ganzzahliger Programme"
Über Arbeiten von Barahona zum Max-Cut-Problem

Matthias Köppe*

28. Januar 1998

Zusammenfassung

Einige ausgewählte Aspekte der Arbeiten [Bar83a, Bar83b, Bar86] von F. Barahona werden vorgestellt: Komplexität des Max-Cut-Problems für verschiedene Klassen von Graphen (Graphen ohne K_5- bzw. K_6-Minor sowie eine Klasse schwach bipartiter Graphen) und Reduktion quadratischer 0-1-Optimierungsprobleme auf das Max-Cut-Problem.

1 Das Max-Cut-Problem

Definition (Max-Cut-Problem) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtung $C \in \mathbb{R}_+^E$. Gesucht ist ein Schnitt maximalen Gewichts

$$C(\delta(U)) = \sum_{e \in \delta(U)} C_e.$$

Eine andere Formulierung dieses Problems lautet:

Gesucht ist ein gewichtsmaximaler bipartiter Teilgraph in G.

Aufgrund dieser Charakterisierung ist klar, daß das Max-Cut-Problem in *bipartiten* Graphen trivial ist. Außerdem ist das Max-Cut-Problem auf *planaren* Graphen polynomial lösbar [Bar83a]. Andererseits ist das Max-Cut-Problem auf allgemeinen Graphen $\mathcal{NP}$-vollständig. Es stellt sich die Frage nach größeren Klassen als den genannten, auf denen das Max-Cut-Problem noch polynomial lösbar ist.

*mkoeppe@cs.uni-magdeburg.de

2 Klassen von Graphen

Wir werden o. B. d. A. das Max-Cut-Problem nur auf *zusammenhängenden* Graphen betrachten (denn offensichtlich kann die Suche nach dem maximalen Schnitt auf jeder Zusammenhangskomponente einzeln ausgeführt werden).

2.1 Graphen ohne K_n-Minor (n fix)

Definition Ein Graph H heißt *Minor* eines Graphen G, wenn H aus G durch eine Folge von Kantenlöschungen, Kantenkontraktionen (d. i. Identifizierung adjazenter Knoten) und Knotenlöschungen hervorgeht [DL97]. – Ein Graph G heißt *kontrahierbar* zu H, wenn H aus G durch eine Folge von Kantenkontraktionen hervorgeht [Bar83a].

Ist G zusammenhängend und $H = K_n$, so stimmen beide Konzepte überein. Aus diesem Grund werden wir an den meisten Stellen die beiden Begriffe synonym verwenden können.

Definition Die Klasse $\mathcal{W}_n$ ist die Menge aller (zusammenhängenden) Graphen ohne K_n-Minor. Die Graphen in $\mathcal{W}_4$ heißen *serienparallel.*

Offensichtlich gilt

$$\mathcal{W}_n \subset \mathcal{W}_{n+1},$$

da ein Graph mit einem K_{n+1}-Minor auch einen K_n-Minor enthält. – Ein prominentes Strukturresultat aus der Graphentheorie ist der folgende

Satz 1 (Kuratowski–Wagner) *Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er keinen zu K_5 oder $K_{3,3}$ kontrahierbaren Untergraphen enthält [Jun94].*

Deshalb ist die Klasse der (zusammenhängenden) planaren Graphen enthalten in der Klasse $\mathcal{W}_5$. – Fernerhin bilden die Klassen der planaren, der bipartiten und der serienparallelen Graphen eine Antikette, wie man leicht durch entsprechende Beispiele bestätigt.

2.2 Schwach bipartite Graphen

Bekanntlich ist ein (Unter-)Graph *bipartit* genau dann, wenn er keine *ungeraden Kreise* (d. i. Kreise ungerader Kantenanzahl) enthält. Wir betrachten die den beiden Eigenschaften zugeordneten Polytope:

Definition Das Polytop

$$P_B(G) := \text{conv}\,\left\{\chi^F \in \mathbb{R}^E \colon (V, F) \text{ bipartiter Untergraph von } G\right\}$$

heißt das *bipartite-subgraph polytope*. Definiere das durch die *odd-cycle inequalities* gegebene Polytop

$$Q(G) := \left\{ x \in \mathbb{R}^E \colon \begin{array}{ll} 0 \le x(e) \le 1 & \forall e \in E, \\ x(C) \le |C| - 1 & \forall \text{ungeraden Kreise } C \end{array} \right\}.$$

Offensichtlich gilt für bipartite Graphen die Gleichheit $P_B(G) = Q(G)$. Dies rechtfertigt die folgende

Definition Die Klasse $\mathcal{WB}$ der *schwach bipartiten* Graphen ist die Menge aller Graphen mit $P_B(G) = Q(G)$.

Auch die planaren Graphen gehören zu $\mathcal{WB}$ [Bar83b].

Das Max-Cut-Problem auf $\mathcal{WB}$-Graphen ist unter Verwendung der Ellipsoid-Methode polynomial lösbar. Es genügt dazu nämlich [GLS93], das dem Optimierungsproblem $\max\left\{c^\mathsf{T}x\colon x \in P_B(G) = Q(G)\right\}$ zugeordnete Separationsproblem (für das Polytop $Q(G)$) polynomial lösen zu können [Bar83b]. – Lösungsverfahren, die die Ellipsoid-Methode einsetzen, sind aber in der Praxis kaum anwendbar. Ein schneller kombinatorischer Algorithmus ist nicht bekannt.

Aus diesem Grund betrachten wir eine spezielle Klasse schwach bipartiter Graphen.

Definition Die Klasse $\mathcal{AB}$ ist die Menge aller Graphen G mit der Eigenschaft:

Es gibt zwei Knoten p_1, p_2 derart, daß $G - \{p_1, p_2\}$ bipartit ist.

Mit anderen Worten: *Es gibt zwei Knoten, die alle ungeraden Kreise überdecken.* Daß die Klasse $\mathcal{AB}$ in $\mathcal{WB}$ enthalten ist, wird in einem späteren Abschnitt gezeigt werden.

3 Komplexitätsresultate für das Max-Cut-Problem

3.1 Das Max-Cut-Problem in Graphen ohne K_5-Minor ist polynomial lösbar

Definition Ein Graph $G \in \mathcal{W} = \mathcal{W}_5$ heißt $\mathcal{W}$-*maximal*, wenn er ein kanteninklusionsmaximaler Graph aus $\mathcal{W}$ ist. Die Klasse aller $\mathcal{W}$-maximalen Graphen wird mit $\hat{\mathcal{W}}$ bezeichnet.

In $O(n^5)$ Zeit läßt sich ein $\mathcal{W}$-Graph durch Einfügen von nullgewichteten Kanten zu einem $\mathcal{W}$-maximalen Graphen vervollständigen [Bar83a]. Deshalb genügt es, die Klasse $\hat{\mathcal{W}}$ zu betrachten. Für diese gibt es ein wichtiges Dekompositionstheorem; wir benötigen dazu die folgende

Definition Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $Y \subseteq V$ eine minimale trennende Knotenmenge. Sei $T_1 \dot\cup Y \dot\cup T_2$ eine echte Partition der Knotenmenge derart, daß Knoten aus T_1 und T_2 nicht adjazent in G sind. Seien G_1 und G_2 die induzierten Untergraphen von G bezüglich $T_1 \cup Y$ bzw. $T_2 \cup Y$.

Ist $Y = K_n$ für $1 \leq n \leq 3$, so heißt G die *strikte k-Summe* der Graphen G_1 und G_2 [Bar83a].

Satz 2 (Wagner) *Jeder Graph der Klasse $\hat{\mathcal{W}}$ ist darstellbar als (iterierte) strikte k-Summe* primer triangulierter planarer *Graphen, Kopien von K_n (mit $n = 1, 2$) und von V_8 (Abbildung 1) [GGL95, Bar83a, Wag70]*

Dieses Dekompositionstheorem erlaubt nun folgendes:

1. Eine vollständige Beschreibung des Cut-Polytops

$$P_C(G) = \mathrm{conv}\ \left\{\chi^C\colon C \text{ Cut}\right\}$$

ist berechenbar; eine solche Beschreibung ist in allgemeinen Graphen nicht bekannt. – Es gilt nämlich der folgende

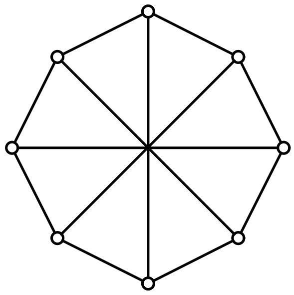

Abbildung 1: Der Graph V_8

Satz 3 *Sei G die strikte k-Summe der Graphen G_1 und G_2. Dann ist $P_C(G)$ genau durch die Ungleichungen von $P_C(G_1)$ und $P_C(G_2)$ bestimmt, wobei die zu den Kanten in $G_1 \cap G_2$ gehörigen Variablen identifiziert werden.*

Beweisandeutung. Das erhaltene Polytop sei Q. Ist C ein Schnitt in G, so sind $C \cap E_1$ und $C \cap E_2$ Schnitte in G_1 bzw. G_2. Daraus folgt $P_C(G) \subseteq Q$. Dann wird gezeigt, daß jedes $x \in Q$ die Konvexkombination von Vektoren aus $P_C(G)$ ist: Schnitte in G_1 und G_2 mit der gleichen Auswahl von Knoten in $G_1 \cap G_2$ sind miteinander „verträglich" und können so durch Konvexkombinationen von Schnitten in G dargestellt werden. Einen ausführlicheren Beweis findet man in [Bar83a]. $\square$

Eine Beschreibung der Cut-Polytope auf den einzelnen k-Summanden ist bekannt [OD75, Bar83a]. Auf diese Weise ist es nun möglich, das Separationsproblem für $P_C(G)$ in polynomialer Zeit zu lösen. Dies impliziert die polynomiale Lösbarkeit des Max-Cut-Problems mit Hilfe der Ellipsoid-Methode [GLS93].

2. Es kann ein kombinatorischer Algorithmus angegeben werden, welcher den Eingabegraphen rekursiv in k-Summanden zerlegt und auf diesen unter Ausnutzung der speziellen Struktur das Max-Cut-Problem löst. Dieser Algorithmus läuft in $O(n^4)$ Zeit [Bar83a].

   Gibt es einen Knoten v in G derart, daß $G - v \in \mathcal{W}_4$ (also serienparallel) ist, so läuft eine Variante sogar in $O(n)$ Zeit [Bar86].

3.2 Das Max-Cut-Problem in Graphen ohne K_6-Minor ist $\mathcal{NP}$-hart. Zurückführung eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Spin-Glass-Optimierungsproblems

Das folgende, einem Spin-Glass-Optimierungsproblem[1] zugeordnete Entscheidungsproblem ist $\mathcal{NP}$-vollständig:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gegeben sei ein planarer kubischer Graph } G=(V,E) \text{ und eine} \\ \text{Schranke } k\in\mathbb{Z}\text{. Gibt es eine Konfiguration } \{S_i\}\in\{-1,+1\}^V \\ \text{mit} \\ \displaystyle\sum_{\{i,j\}\in E} S_iS_j + \sum_{i\in V} S_i \le k? \end{array}\right\} \quad (SG)$$

Gezeigt wird: Das Max-Cut-Problem für Graphen ohne K_6-Minor ist $\mathcal{NP}$-hart. Dazu wird das folgende Entscheidungsproblem für eine (inklusions-)kleinere Klasse von Graphen betrachtet:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gegegeben sei ein Graph } G=(V,E) \text{ mit einem Knoten } v_0 \\ \text{derart, daß } G-v_0 \text{ ein planarer kubischer Graph ist, sowie eine} \\ \text{Schranke } k\in\mathbb{Z}\text{. Gibt es eine Teilmenge } U\subseteq V \text{ mit} \\ |\delta(U)|\ge k? \end{array}\right\} \quad (RMC)$$

(Planare Graphen haben nach Kuratowski–Wagner keinen K_5-Minor; deshalb kann durch Hinzufügen nur eines Knotens kein Graph mit K_6-Minor entstehen.)

Satz 4 *Das Problem RMC ist $\mathcal{NP}$-vollständig.*

Beweis. Zunächst ist RMC offensichtlich ein $\mathcal{NP}$-Problem. Gezeigt wird nun, daß sich das $\mathcal{NP}$-vollständige Problem SG (und damit jedes $\mathcal{NP}$-Problem) polynomial auf RMC reduzieren läßt.

Sei dazu $G=(V,E)$ ein Eingabegraph für das Problem SG. Füge einen universellen Knoten v_0 hinzu:

$$V' = V\cup\{v_0\}\,,\quad E' = E\cup\{\{i,v_0\} : i\in V\}$$

[1] Spin Glasses sind Einbettungen von Eisenatomen in ein nichtmagnetisches Gitter (z.B. von Goldatomen). Jedem Eisenatom i kann ein magnetischer Spin $S_i\in\{-1,+1\}$ zugeschrieben werden. Benachbarte Eisenatome i,j wechselwirken magnetisch; die Stärke und Richtung der Wechselwirkung wird durch $-J_{ij}S_iS_j$ beschrieben, wobei J_{ij} ein Systemparameter ist. Außerdem erfolgt eine Wechselwirkung mit einem äußeren Magnetfeld h. Jeder Spinkonfiguration $\{S_i\}$ läßt sich somit eine innere Energie

$$H(\{S_i\}) = \sum_{\langle i,j\rangle} -J_{ij}S_iS_j - h\sum_i S_i$$

zuordnen. Gesucht wird nun nach den Zuständen niedrigster Energie ('ground states'), da diese die höchste Stabilität aufweisen.

Modelle von Spin Glasses werden in der Statistischen Mechanik untersucht; sie stehen in einem engen Zusammenhang mit probabilistischen Lösungsverfahren für diskrete Optimierungsprobleme. Viele Spin-Glass-Optimierungsprobleme sind als $\mathcal{NP}$-hart identifiziert worden. Details findet man in dem Buch [MPV87] von Mézard et al.

Dann gilt: *Es gibt eine Konfiguration* $\{S_i\}$ *mit*

$$\sum_{ij\in E} S_i S_j + \sum_{i\in V} S_i \leq k$$

genau dann, wenn es eine Menge $U \subseteq V'$ *gibt mit*

$$|\delta U| \geq \frac{1}{2}\left(|E'| - k\right).$$

„$\Rightarrow$". Sei $\{S_i\}$ eine solche Konfiguration. Setze $U = \{i: S_i = +1\} \cup \{v_0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
k &\geq \sum_{ij\in E} S_i S_j + \sum_{i\in V} S_i \\
&= |\{ij \in E: S_i = S_j\}| - |\{ij \in E: S_i \neq S_j\}| \\
&\quad + |\{i \in V: S_i = +1\}| - |\{i \in V: S_i = -1\}| \\
&= |E| - 2\,|\{ij \in E: S_i \neq S_j\}| + |V| - 2\,|\{i \in V: S_i = -1\}| \\
&= |E| + |V| - 2\,|\{ij \in E': S_i \neq S_j\}| \\
&= |E'| - 2\,|\delta(U)|,
\end{aligned}$$

also $|\delta(U)| \geq \frac{1}{2}\left(|E'| - k\right)$.

„$\Leftarrow$". Sei andererseits $U \subseteq V'$ eine solche Knotenmenge. Setze

$$S_i = \begin{cases} +1, & i \in V \cap U \\ -1, & i \in V \setminus U \end{cases}.$$

Eine ähnliche Rechnung wie in „$\Rightarrow$" liefert dann die Behauptung. □

3.3 Das Max-Cut-Problem in Graphen der Klasse $\mathcal{AB}$ ist mit einem kombinatorischen Algorithmus polynomial lösbar

Sei $G = (V, E)$ ein Graph der Klasse $\mathcal{AB}$. Seien p_1, p_2 zwei Knoten von G derart, daß $G' = G \setminus p_1, p_2$ bipartit ist (mit Knotenpartition $V = U \dot\cup W$). Für $i = 1, 2$ wird nun p_i in je eine „Quelle" s_i und eine „Senke" t_i aufgeteilt; die Kanten zu Knoten in U werden dabei der Quelle s_i, die zu Knoten in W der Senke t_i zugeschlagen [Bar83b]. Der entstehende Graph wird mit $\bar{G}$ bezeichnet.

In $\bar{G}$ wird nun nach einem *minimum two-commodity cut* gesucht. Zunächst deshalb einige Bemerkungen zu Multi-Commodity-Flüssen:

Typischerweise werden nur Flußprobleme mit einer „Sorte" (*commodity*) Fluß betrachtet. Eine natürliche Erweiterung ist es, in einem Netzwerk mehrere Sorten von Fluß (zwischen *commodity pairs*, d.i. Paare von Quellen und Senken) gleichzeitig zu betrachten [Hu63]. Definiert man die Kapazität eines Schnittes und den Wert eines Flusses geeignet, so gilt im allgemeinen [DL97]

$$\text{max-flow} \leq \text{min-cut}.$$

Nur in den Fällen einer und zweier Commodities gilt die Gleichheit. Im ersten Fall ist das die Aussage des wohlbekannten Max-Flow–Min-Cut–Theorems; im zweiten Fall die der folgenden Verallgemeinerung von Hu [Hu63] (in dessen Notation):

Satz 5 (Max Bi-Flows Min-Cut Theorem) *Zwei Flüsse $F(1;1')$, $F(2;2')$ sind zulässig genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\begin{aligned} f(1;1') &\le c(1;1') \qquad (1)\\ f(2;2') &\le c(2;2') \qquad (2)\\ f(1;1')+f(2;2') &\le c(1,2;1',2') \qquad (3) \end{aligned}$$

Die maximale Summe der Flußwerte ist gleich der minimalen Kapazität aller Schnitte, die beide Paare von Knoten separieren:

$$\max[f(1;1')+f(2;2')] = \min[c(1,2;1',2')]$$

Es steht ein einfaches Verfahren zur Verfügung, welches einen Max-Bi-Flow in polynomialer Zeit ermittelt [Hu63]; es verwendet den Labeling-Algorithmus von Ford–Fulkerson, welcher durch eine FIFO-Implementierung in polynomialer Zeit läuft [Jun94]. Genau wie im Single-Commodity-Fall gibt es auch eine Ganzzahligkeitsaussage: Sind alle Problemdaten ganzzahlig, so werden die Flüsse *halbzahlig* sein.

Sei nun A die Inzidenzmatrix aller $s_i \to t_i$-Wege, $i = 1,2$ (d. h., ihre Zeilen sind die Inzidenzvektoren $\chi^W \in \mathbb{R}^E$ der Wege W). Aus der Konstruktion von $\bar{G}$ ist klar, daß alle $s_i \to t_i$-Wege eine ungerade Länge haben; deshalb kann A auch als Inzidenzmatrix aller ungeraden Kreise in G aufgefaßt werden.

Wir betrachten dann die folgenden (linear dualen) Probleme:

$$\min\left\{w^\top x : Ax \ge \mathbf{1},\ x \ge \mathbf{0}\right\} \qquad (CUT)$$

$$\max\left\{y^\top \mathbf{1} : A^\top y \le w,\ y \ge \mathbf{0}\right\} \qquad (FLOW)$$

Das Problem (CUT) hat die folgende Interpretation: x ist eine Schnittinzidenz; w sind Kantenkapazitäten; $w^\top x$ ist die Schnittkapazität; $Ax \ge \mathbf{1}$ heißt, daß auf jedem Weg eine Kante im Schnitt ist. Damit ist (CUT) das Min-Cut-Problem.

Das Problem $(FLOW)$ hat die folgende Interpretation: y ist ein entlang Wegen dekomponierter Fluß (d. h., y_i ist der Fluß entlang Weg W_i); $y^\top \mathbf{1}$ ist der Gesamtflußwert; $A^\top y \le w$ sind die durch die Kapazitäten der Kanten auferlegten Flußschranken. Damit ist $(FLOW)$ das Max-Cut-Problem.

Die ganz- bzw. halbzahligen optimalen Lösungen der beiden Probleme seien als x^* bzw. y^* angesprochen. Dann gilt: *$\bar{x}^* = \mathbf{1} - x^*$ ist die Optimallösung des folgenden Problems:*

$$\max\left\{w^\top \bar{x} : \bar{x} \in Q(G)\right\} \qquad (Q)$$

Dies ist unmittelbar aus dem dualen Problem von (Q) ablesbar [Bar83b].

Es gilt deshalb: *Ein maximaler Schnitt in G ist das Komplement der Kantenmenge, die dem minimalen Two-Commodity-Cut in $\bar{G}$ entspricht. Er kann in $O(n^3)$ Zeit berechnet werden.* Außerdem folgt der

Satz 6 *Graphen der Klasse $\mathcal{AB}$ sind schwach bipartit [Bar83b].*

4 Quadratische 0-1-Optimierung

Definition Eine *pseudo-boolesche quadratische Funktion* $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung der Gestalt

$$f(x) = x^\top Q x + c^\top x,$$

wobei Q eine symmetrische Matrix mit Nulldiagonale ist [Bar86].

Die Minimierung von f auf $\{0,1\}^n$ ist ein $\mathcal{NP}$-hartes Problem. Ist die Matrix Q jedoch in einem gewissen Sinn genügend 'sparse', so läßt sich das Problem effizient lösen:

Definition Definiere den der Form Q zugeordneten Graphen $G(Q) = (V, E)$ durch

$$V = \{1, \ldots, n\}, \quad ij \in E \Leftrightarrow q_{ij} \neq 0.$$

Satz 7 *Die Minimierung einer pseudo-booleschen quadratischen Funktion $f(x) = x^\mathsf{T} Qx + c^\mathsf{T} x$ ist in $O(n)$ Zeit ausführbar, wenn $G(Q)$ serien-parallel ist.*

Der *Beweis* erfolgt durch Reduktion auf das Max-Cut-Problem. – Dazu sei das Problem in der folgenden Gestalt gegeben:

$$\min \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \colon x \in \{0,1\}^n \right\}. \tag{4}$$

Mit den Substitutionen

$$s_i = 2x_i - 1, \quad q'_{ij} = \frac{1}{4} q_{ij}, \quad c'_i = \frac{1}{2} c_i + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$$

erhalten wir eine äquivalente Formulierung als Spin-Glass-Optimierungsproblem:

$$\min \left\{ g(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} q'_{ij} s_i s_j + \sum_{i=1}^{n} c'_i s_i \colon s \in \{-1,+1\}^n \right\} \tag{5}$$

Durch Einführung einer zusätzlichen Variablen s_0 erhalten wir ein äquivalentes Problem mit gerader Zielfunktion ($h(-s) = h(s)$):

$$\min \left\{ h(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} q'_{ij} s_i s_j + \sum_{i=1}^{n} c'_i s_0 s_i \colon s \in \{-1,+1\}^n_0 \right\} \tag{6}$$

Setzen wir nun

$$\begin{array}{rcll} w_{ij} & = & q'_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ w_{0j} & = & c'_j, & 1 \leq j \leq n, \end{array}$$

so können wir die Zielfunktion in der folgenden Gestalt schreiben:

$$h(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij} s_i s_j \tag{7}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} h(s) &= \sum \{w_{ij} \colon i < j,\ s_i = s_j\} - \sum \{w_{ij} \colon i < j,\ s_i = -s_j\} \\ &= \underbrace{\sum \{w_{ij} \colon i < j\}}_{=const} - 2 \cdot \sum \{w_{ij} \colon i < j,\ s_i = -s_j\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt den Graphen $H = (U, F)$ mit Knoten $U = \{0, \ldots, n\}$ und Kanten $\{i, j\} \in F \Leftrightarrow w_{ij} \neq 0$, ausgestattet mit Kantengewichten w_{ij}. Mit der Interpretation der Variablen s_i als

$$s_i = \begin{cases} -1, & i \notin W \\ +1, & i \in W \end{cases}$$

entspricht jede Konfiguration s einem Schnitt $\delta(W)$ in H; dessen Gewicht ist gegeben durch

$$\sum \{w_{ij} \colon i < j,\ s_i = -s_j\}\,.$$

Die Minimierung von $h(\cdot)$ ist somit wegen (8) äquivalent dem Max-Cut-Problem in H.

Den Graphen H erhält man aus $G(Q)$ durch Hinzufügen eines Knotens. Da $G(Q)$ als serienparallel, also $\in \mathcal{W}_4$, vorausgesetzt wurde, wird der kombinatorische Algorithmus (zur Lösung des Max-Cut-Problems auf $\mathcal{W}_5$-Graphen) in linearer Zeit laufen, wie bereits in einem früheren Abschnitt angemerkt [Bar86].

Literatur

[Bar83a] Barahona, F.: *The max-cut problem on graphs not contractible to K_5.* Operations Research Letters, 2(3):107–111, 1983.

[Bar83b] Barahona, F.: *On some weakly bipartite graphs.* Operations Research Letters, 2(5):239–242, 1983.

[Bar86] Barahona, F.: *A solvable case of quadratic 0–1 programming.* Discrete Applied Mathematics, 13:23–26, 1986.

[DL97] Deza, M. M. und M. Laurent: *Geometry of Cuts and Metrics*, Band 15 der Reihe *Algorithms and Combinatorics.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1997.

[Ful71] Fulkerson, D. R.: *Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra.* Mathematical Programming, 1:168–194, 1971.

[GGL95] Graham, R. L., M. Grötschel und L. Lovász (Herausgeber): *Handbook of Combinatorics*, Band 1. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1995.

[GLS93] Grötschel, M., L. Lovász und A. Schrijver: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Band 2 der Reihe *Algorithms and Combinatorics.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, Zweite Auflage, 1993.

[Hu63] Hu, T. C.: *Multi-commodity network flows.* Operations Research, 11:344–360, 1963.

[Jun94] Jungnickel, D.: *Graphen, Netzwerke und Algorithmen.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim–Wien–Zürich, 1994.

[MPV87] Mézard, M., G. Parisi und M. A. Virasoro: *Spin Glass Theory and Beyond.* World Scientific, Singapore, 1987.

[OD75] Orlova, G. I. und Ya. G. Dorfman: *O svodimosti zadach poiska optimal'nogo razbiyeniya mnozhestva vershin grafa k zadache o maksimal'nom razreze*. Tekhnicheskaya Kibernetika, 3:59–65, 1975.

[Sch86] Schrijver, A.: *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley–Interscience series in discrete mathematics. John Wiley & Sons, Chichester–New York–Brisbane–Toronto–Singapore, 1986.

[Sey77] Seymour, P. D.: *The matroids with the max-flow min-cut property*. Journal of Combinatorial Theory, B 23:189–222, 1977.

[Wag70] Wagner, K.: *Graphentheorie*. Hochschultaschenbücherverlag, 1970.

[WB90] Wagner, K. und R. Bodendiek: *Graphentheorie*, Band 2. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim–Wien–Zürich, 1990.