Diplomarbeit

Erzeugende Mengen für gemischt-ganzzahlige Programme

Matthias Köppe*

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit einem primalen Verfahren zur Lösung von ganzzahligen und gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblemen. Dieses basiert auf der wiederholten Lösung des folgenden sog. *Augmentierungsproblems*:

> Gegeben ein zulässiger Punkt $\mathbf{x}$, finde einen verbessernden Vektor $\mathbf{t}$ oder versichere, daß ein solcher nicht existiert.

Das Verfahren besitzt eine komplexitätstheoretische Begründung: Nach einem Satz von Schulz–Weismantel–Ziegler (1995) sind Optimieren und Augmentieren für den Fall von 0-1-Programmen polynomiell äquivalent; für allgemeine ganzzahlige Programme läßt sich das Optimierungsproblem auf eine stärkere Fassung des Augmentierungsproblems polynomiell reduzieren.

In der Literatur sind für Familien von ganzzahligen Optimierungsproblemen verschiedene Klassen von sog. *universellen Testmengen* untersucht worden; dies sind endliche Mengen von Vektoren, die für jeden nicht-optimalen Punkt eine verbessernde Richtung enthalten. Ist eine universelle Testmenge bekannt, so kann mit ihr das Augmentierungsproblem gelöst werden. *Minimale erzeugende Mengen* sind eine spezielle Klasse von universellen Testmengen; sie erlauben die Lösung von stärkeren Augmentierungsproblemen.

Die Berechnung von minimalen erzeugenden Mengen ist als ein $\mathcal{NP}$-schweres Problem identifiziert worden. *General-purpose*-Algorithmen für deren Berechnung sind daher nur für sehr geringe Problemgrößen einsetzbar. In der Dissertation von Urbaniak (1998) wurde ein spezielles kombinatorisches Verfahren vorgeschlagen, welches für die Berechnung der minimalen erzeugenden Menge einer Familie von Rucksackproblemen besser geeignet ist. In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Implementierungstechniken und Verfeinerungen für dieses Verfahren diskutiert, welche die Behandlung größerer Probleme erlauben. Weiterhin wird eine Technik entwickelt, die es ermöglicht, diesen Algorithmus auf eine erweiterte Klasse von Problemen anzuwenden.

Für gemischt-ganzzahlige Programme wird in der vorliegenden Arbeit ein primaler Zugang entwickelt. Nach dem Vorbild der erzeugenden Mengen für ganzzahlige Programme wird ei-

*Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Optimierung, E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`.

ne Menge eingeführt, welche eine endliche Beschreibung besitzt und eine endliche, verträgliche Zerlegung von Differenzvektoren zulässiger Punkte gestattet. Ist die Menge berechnet, so lassen sich verschiedene Augmentierungsprobleme lösen; dazu wird ein Algorithmus angegeben, in dessen Verlauf eine Folge von linearen Programmen gelöst wird.

Thesen

1. Mit einem kombinatorischen Verfahren, das auf R. Urbaniak zurückgeht, können die primitiven Partitionsidentitäten rechnerisch bestimmt werden. Eine genaue theoretische Untersuchung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Irreduzibilität der im Verfahren erzeugten Vektoren führt zu einer Variante des Verfahrens mit verbesserter Laufzeit.

2. Die Aufgabe, zu einem gegebenen Vektor einen Reduzierer zu finden, läßt sich mit einer Datenstruktur für orthogonale Bereichssuche in Punktmengen effizient lösen, sobald alle irreduziblen Vektoren berechnet und in der Datenstruktur gespeichert sind. Für diese Aufgabe geeignete Datenstrukturen werden vorgestellt.

3. Auf der Menge der irreduziblen Vektoren wird eine Halbordnung, die Vergröberungsrelation, eingeführt; unter einer Vergröberung bleibt die Irreduzibilität eines Tupels erhalten. Der Aufwand zur Speicherung der irreduziblen Vektoren kann auf Kosten einer erhöhten Anfragezeit verringert werden, indem nur die minimalen Elemente gespeichert werden.

4. Mit den genannten und weiteren Techniken wird das Verfahren von Urbaniak implementiert, so daß die primitiven Partitionsidentitäten mit größtem Teil höchstens gleich 27 berechnet werden können. Zuvor war es nur möglich, die primitiven Partitionsidentitäten mit größtem Teil höchstens gleich 22 zu berechnen, da die Laufzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße viel stärker wuchs.

5. Die primitiven Partitionsidentitäten sind eng mit der minimalen erzeugenden Menge einer Familie von Rucksackproblemen verbunden. Eine Modifikation des Verfahrens von Urbaniak kann als Prozedur in einem rekursiven Berechnungsschema verwendet werden, welches die minimale erzeugende Menge von beliebigen Familien von Rucksackproblemen bestimmt. Dieser Algorithmus ist für Probleminstanzen mit genügend dichten Gewichtmengen schneller als ein *General-purpose*-Verfahren zur Berechnung der minimalen erzeugenden Menge.

6. Für die Differenzvektoren zulässiger Punkte von gemischt-ganzzahligen Programmen wird ein Reduktionsbegriff eingeführt. Dieser erlaubt die Zerlegung eines Differenzvektors in endlich viele Summanden, die nicht weiter zerlegt werden können.

7. Es wird eine endliche Beschreibung einer Menge angegeben, die für jeden Differenzvektor einen Reduzierer enthält; dazu werden die Polyeder des kontinuierlichen Anteils untersucht. Offen bleibt die Frage nach einem kombinatorischen Verfahren zur Berechnung der Beschreibung dieser Menge.

8. Ist diese Beschreibung berechnet, so kann das gewöhnliche und das gerichtete Augmentierungsproblem für gemischt-ganzzahlige Programme gelöst werden. Dazu wird ein Algorithmus angegeben, in dessen Verlauf eine Folge von linearen Programmen gelöst wird. Es bleibt offen, ob sich das Optimierungsproblem für gemischt-ganzzahlige Programme polynomiell auf ein geeignetes Augmentierungsproblem reduzieren läßt.