Erzeugende Mengen für gemischt-ganzzahlige Programme

Matthias Köppe

13. September 1999

Programmtypen

Ganzzahlige Programme:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IP}:\ \max\ & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s. t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\
& \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \\
& \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n
\end{aligned}
$$

Gemischt-ganzzahlige Programme:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MIP}:\ \max\ & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{y} \\
\text{s. t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \\
& \mathbf{l} \leq (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{u}, \\
& \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n,\ \ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d
\end{aligned}
$$

Probleme

P – zulässiger Bereich

Optimierungsproblem (OPT):

Gegeben $\mathbf{c}^\top \in \mathbf{Z}^{(n)}$ und $\mathbf{x} \in P$,
finde eine optimale Lösung

$$\mathbf{x}^* \in \operatorname{Argmax} \{\, \mathbf{c}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P \,\}\,.$$

Augmentierungsproblem (AUG):

Gegeben $\mathbf{c}^\top \in \mathbf{Z}^{(n)}$ und $\mathbf{x} \in P$,
finde einen Vektor $\mathbf{t}$ mit $\mathbf{x} + \mathbf{t} \in P$
und $\mathbf{c}^\top \mathbf{t} > 0$, falls existent.

Für 0/1-Programme:

(OPT) polynomiell äquivalent zu (AUG)

[Schulz–Weismantel–Ziegler, 1995]

Testmengen

$\mathcal{F}$ – eine Familie von ganzzahligen Programmen in fester Dimension n

Universelle Testmenge für $\mathcal{F}$:

Endliche Menge, die für jedes $\mathrm{IP} \in \mathcal{F}$ und jeden zulässigen, nicht-optimalen Punkt einen augmentierenden Vektor enthält.

Erzeugende Menge für $\mathcal{F}$:

Endliche Menge, die für jedes $\mathrm{IP} \in \mathcal{F}$ und je zwei zulässige Punkte $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^n$ Vektoren $\mathbf{t}^1, \dots, \mathbf{t}^l$ enthält mit

$$\sum_{i=1}^{l} \mathbf{t}^i = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \qquad \mathbf{t}^i \preceq_{\mathbf{A}} \mathbf{x} - \mathbf{y}.$$

Jede erzeugende Menge ist eine universelle Testmenge.

Irreduzibilität

Für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$:

$\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$: $\mathbf{v}$ **reduziert** $\mathbf{w}$, d. h.,

- $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ liegen im gleichen Orthanten,
- $|v_i| \leq |w_i|$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$\mathbf{v} \preceq_{\mathbf{A}} \mathbf{w}$: $\mathbf{v}$ **reduziert** $\mathbf{w}$ **bezüglich** $\mathbf{A}$, d. h.,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}) \preceq (\mathbf{w}, \mathbf{A}\mathbf{w}).$$

$\mathbf{w} \in \mathbf{Z}^n$ **irreduzibel bezüglich** $\mathbf{A}$:

$$\nexists\, \mathbf{v} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{w}\} \text{ mit } \mathbf{v} \preceq_{\mathbf{A}} \mathbf{w}.$$

Endliche Zerlegung in Irreduzible:

Für jedes $\mathbf{w} \in \mathbf{Z}^n$ gibt es bezüglich $\mathbf{A}$ irreduzible $\mathbf{t}^1, \ldots, \mathbf{t}^k \in \mathbf{Z}^n$ mit

$$\sum_{i=1}^{l} \mathbf{t}^i = \mathbf{w}, \qquad \mathbf{t}^i \preceq_{\mathbf{A}} \mathbf{w}.$$

Gravermenge

$\mathrm{IP}_{\mathbf{A}}$ – die Familie der ganzzahligen
Programme mit fester Matrix $\mathbf{A}$

Gravermenge $G_{\mathbf{A}}$, d. i.

> die Menge der bezüglich $\mathbf{A}$ irreduziblen Vektoren aus $\mathbf{Z}^n \cap \ker \mathbf{A}$,

ist die eindeutige inklusionsminimale erzeugende Menge für $\mathrm{IP}_{\mathbf{A}}$.

Algorithmus H.

$G \leftarrow \{\pm \mathbf{e}_i : i = 1, \dots, n\}$
for all $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \subseteq G$ **do**
  $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{v} + \mathbf{w}$;
  if $\nexists\, \tilde{\mathbf{z}} \in G$ mit $\tilde{\mathbf{z}} \preceq_{\hat{\mathbf{A}}} \mathbf{z}$ **then**
    $G \leftarrow G \cup \{\mathbf{z}\}$;
Lösche alle Vektoren $\mathbf{z}$ mit $\mathbf{A}\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ aus G;
Lösche alle reduziblen Vektoren aus G;
$G_{\mathbf{A}} \leftarrow G$.

Rucksackprobleme

Betrachten die Familie $\mathrm{IP}_{\mathbf{A}}$ für

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}^\top = (1, \dots, n)^\top.$$

Gravermenge $G_{\mathbf{A}} \leftrightarrow$ **primitive Partitions-identitäten** (PPI) P_n

Berechnung mit Alg. H oder Iteration von:

Algorithmus U.

Konstruktion von P_{n+1} aus P_n durch wiederholte Addition von Vektoren der Gestalt

$$\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{(n+1)-i}$$

und Reduktion der Summe mit bekannten Irreduziblen.

Bedingungen für Irreduzibilität

$$\mathbf{w} := \mathbf{v} + \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{(n+1)-i}$$

Lemma. Sei $\mathbf{v} \in P^t_{n+1}$.

a. Sind v_i, $v_{(n+1)-i} > 0$, so ist $\mathbf{w} \in P^{t+1}_{n+1}$.

b. Sind v_i, $v_{(n+1)-i} \leq 0$, so ist $\mathbf{w} \notin P^{t+1}_{n+1}$.

Satz. Sei $\mathbf{v} \in P^t_{n+1}$ mit $v_i \leq 0$ und $v_{(n+1)-i} > 0$. Dann ist

- entweder $\mathbf{w}$ irreduzibel bezüglich $\hat{\mathbf{n}}^\top$,
- oder $\mathbf{w}$ zerfällt in zwei bezüglich $\hat{\mathbf{n}}^\top$ irreduzible Vektoren $\mathbf{w}^1$, $\mathbf{w}^2$ mit

$$\begin{aligned} w^1_i &= w_i, & w^2_i &= 0, \\ w^1_{n+1} &= 0, & w^2_{n+1} &= w_{n+1}, \end{aligned}$$

  wobei $\mathbf{w}^2$ aus einem Vektor $\mathbf{u} \in P^t_{n+1}$ wie in Teil a des Lemmas entsteht.

MIP-Irreduzibilität

Für $(\mathbf{x},\mathbf{y}), (\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^d$
und $\mathbf{A} \in \mathbf{Q}^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{Q}^{m\times d}$:

$(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}) \preceq_{\mathbf{A}|\mathbf{C}} (\mathbf{x},\mathbf{y})$**:** $(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}})$ **reduziert** $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ **bezüglich $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$**, d. h.,

$$(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}},\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{C}\tilde{\mathbf{y}},\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}+\mathbf{C}\tilde{\mathbf{y}}) \preceq (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{C}\mathbf{y},\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{C}\mathbf{y}).$$

$(\mathbf{x},\mathbf{y})$ **nicht wesentlich reduzibel bezüglich $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$**:

$\nexists\ (\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2,\mathbf{y}^2) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^d$ mit

- $(\mathbf{x}^i,\mathbf{y}^i) \preceq_{\mathbf{A}|\mathbf{C}} (\mathbf{x},\mathbf{y})$,
- $(\mathbf{x}^i,\mathbf{y}^i) \notin \{\mathbf{0}\} \times \ker \mathbf{C}$,
- $(\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^1) + (\mathbf{x}^2,\mathbf{y}^2) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Y-Polyeder

Zu $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n$ und $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^d$:

$$P_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) := \{\, \mathbf{y} \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{0} \,\},$$

ein spitzes konvexes Polyeder. Betrachten die eindeutig bestimmte **Weyl-Dekomposition**

$$P_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = P'_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) + \mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$$

in

- inklusionsminimales Polytop $P'_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$ und
- polyedrischen Kegel $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \ker \mathbf{C} \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$,

Für $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n$ und $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^d$:

- Ist $\mathbf{y} \in P_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$, so gibt es ein $\mathbf{y}' \in P'_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$ mit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \preceq_{\mathbf{A}|\mathbf{C}} (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
- Ist $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nicht wesentlich reduzibel bezüglich $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$, so auch $(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$.

Y-Polyeder #2

Endliche Zerlegung für $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \ker(\mathbf{A}|\mathbf{C})$ in

- $(\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^1),\dots,(\mathbf{x}^k,\mathbf{y}^k) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^d$ nicht wesentlich reduzibel mit $\mathbf{y}^i \in P'_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}^i)$ und $(\mathbf{x}^i,\mathbf{y}^i) \preceq_{\mathbf{A}|\mathbf{C}} (\mathbf{x},\mathbf{y})$,
- $(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0) \in \{\mathbf{0}\} \times (\ker \mathbf{C} \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$.

Im allgemeinen:

$$P'_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}^1) + P'_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}^2) \subseteq P'_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}^1+\mathbf{x}^2).$$

Analyse von Bedingungen für Gleichheit liefert die Existenz einer endlichen Menge $S_0 \subseteq \mathbf{Z}^n$ mit:

> Ist $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n$ mit $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \operatorname{im}\mathbf{C}$ und $\mathbf{x} \notin S_0$, so sind alle Tupel $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ mit $\mathbf{y} \in P_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$ für beliebige $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^d$ wesentlich reduzibel bezüglich $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$.

Augmentieren

$\mathrm{MIP}_{\mathbf{A}|\mathbf{C}}$ – die Familie der gemischt-ganzzahligen Programme mit festen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$

Algorithmus A

1: **for all** $\mathbf{s} \in S_0$, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^d$ **do**
2: **if** $\mathbf{l}_X \leq \mathbf{x} + \mathbf{s} \leq \mathbf{u}_X$ **then**
3: Löse das LP:

$$\max \left\{ \mathbf{d}^\top \mathbf{t} : \mathbf{t} \in P'_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}), \right. \\ \left. \mathbf{l}_Y - \mathbf{y} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{u}_Y - \mathbf{y} \right\}$$

4: **if** Programm lösbar **then**
5: **if** $\mathbf{c}^\top \mathbf{s} + \mathbf{d}^\top \mathbf{t} > 0$ **then**
6: **return** $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$
7: Sei $\mathbf{t}$ eine Lösung des LP:

$$\max \left\{ \mathbf{d}^\top \mathbf{t} : \mathbf{C}\mathbf{t} = \mathbf{0}, \right. \\ \left. \mathbf{l}_Y - \mathbf{y} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{u}_Y - \mathbf{y} \right\}$$

8: **return** $(\mathbf{0}, \mathbf{t})$.

n	$\#P_n$	**Laufzeit für PPI-Berechnung** Alg. H	Alg. U
2	1		
3	5		
4	15		
5	47		
6	102		
7	276		
8	578		
9	1 261	1 s	
10	2 465	5 s	
11	5 362	23 s	2 s
12	9 285	1 min 24 s	5 s
13	18 900	6 min 18 s	23 s
14	33 269	22 min 32 s	1 min 08 s
15	58 171	1 h 19 min	3 min 39 s
16	99 328	4 h 23 min	12 min 06 s
17	181 514	15 h 25 min	49 min 23 s
18	287 239		2 h 03 min
19	502 116		7 h 01 min
20	775 710		16 h 03 min
21	1 239 710		42 h 44 min
22	1 956 334		101 h 25 min

Laufzeit #2			
Alg. U	Alg. U′	$\#P_n$	n
		2 465	10
2 s		5 362	11
5 s		9 285	12
23 s	2 s	18 900	13
1 min 08 s	5 s	33 269	14
3 min 39 s	12 s	58 171	15
12 min 06 s	24 s	99 328	16
49 min 23 s	51 s	181 514	17
2 h 03 min	1 min 45 s	287 239	18
7 h 01 min	3 min 31 s	502 116	19
16 h 03 min	7 min 00 s	775 710	20
42 h 44 min	13 min 27 s	1 239 710	21
101 h 25 min	25 min 18 s	1 956 334	22
	49 min 48 s	3 210 736	23
	1 h 40 min	4 660 786	24
	3 h 13 min	7 297 823	25
	6 h 16 min	10 997 235	26
	12 h 06 min	16 536 803	27