Seminar zur Graphentheorie und Scheduling-Theorie
Verkleinerung der chromatischen Zahl durch Knotensplitting

Matthias Köppe*

3. Juni 1997

Unter einem *Graphen* wollen wir stets einen ungerichteten schlichten Graphen verstehen. – Die angegebenen englischsprachigen Begriffe beziehen sich auf den Artikel von Selim [1].

1 Knotenfärbungen. Definitionen und Sätze

Definition Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Abbildung h: $V \to \{1, \ldots, q\}$ heißt *q-Knotenfärbung* von G. Gilt $h(x) \neq h(y)$ für alle adjazenten $x, y \in V$, so heißt h eine *echte Knotenfärbung.*

Definition Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ eines Graphen G ist die kleinste Zahl q, für die G eine echte q-Knotenfärbung besitzt.

Eigenschaft 1 *Der Graph G enthalte einen vollständigen Teilgraphen H der Ordnung m. Dann gilt $\chi(G) \geq m$.*

Beweis. Die m Knoten von H müssen verschieden gefärbt werden. □

Eigenschaft 2 *Sei G ein Graph und $\Delta(G)$ der Maximalgrad von G. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Der einfache, konstruktive Beweis findet sich zum Beispiel in [2].

Definition Ein Teilgraph H eines Graphen G heißt *(chromatisch) kritischer Teilgraph*, wenn $\chi(H) = \chi(G)$ und für jeden echten Teilgraphen $\tilde{H} \subset H$ gilt: $\chi(\tilde{H}) < \chi(H)$. Ein Graph H heißt *q-kritisch*, wenn $\chi(H) = q$ und für jeden echten Teilgraphen $\tilde{H} \subset H$ gilt: $\chi(\tilde{H}) < \chi(H)$.

Eigenschaft 3 *Sei G ein q-kritischer Graph und $\delta(G)$ der Minimalgrad von G. Dann gilt $q - 1 \leq \delta(G)$.*

*mkoeppe@csmd.cs.uni-magdeburg.de

Beweis. Angenommen, es gilt $\delta = \delta(G) < q-1$. Sei v ein Knoten von G mit Grad δ. Da G ein q-kritischer Graph ist, besitzt der Teilgraph $G - v$ eine echte $(q-1)$-Färbung. Da der Grad von v kleiner als $q-1$ ist, gibt es eine Farbe k, die bei keinem der Nachbarknoten von v auftritt. Färben wir den Knoten v in der Farbe k, so erhalten wir eine echte $(q-1)$-Färbung von G; das ist ein Widerspruch zu $\chi(G) = q$. □

Eigenschaft 4 *Ein vollständiger Graph G der Ordnung q ist q-kritisch.*

Beweis. Zunächst ist $\chi(G) = q$. Wird nun aus G eine Kante $\{u, v\}$ entfernt, so kann u die gleiche Farbe wie der Knoten v erhalten. □

2 Knotensplitting

Definition Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $v \in V$ ein Knoten von G und $N = N(v)$ die Menge der Nachbarknoten von v in G. Sei $N_1 \dot{\cup} N_2$ eine Zerlegung von N. Der Graph $G^* := (V^*, E^*)$ entstehe aus G durch Ersetzen des Knotens v durch neue Knoten v_1, v_2 und Verteilen der mit v inzidenten Kanten auf v_1 und v_2:

$$\begin{array}{rcl} V^* & := & (V \setminus \{v\}) \cup \{v_1, v_2\} \\ E^* & := & (E \setminus \{\{v, u\} \mid u \in V\}) \\ & & \cup \{\{v_1, u_1\} \mid u_1 \in N_1\} \\ & & \cup \{\{v_2, u_2\} \mid u_2 \in N_2\} \end{array}$$

Dann sagen wir: *Der Graph G^* entsteht aus G durch Splitting des Knotens $v \in V$.*

Wir betrachten nun die Aufgabe, in einem Graphen solche Knoten zu finden, deren Splitting eine Verringerung der chromatischen Zahl bewirkt. Im nächsten Abschnitt wird ein spezielles Stundenplanproblem vorgestellt, dessen Lösung diese Aufgabe als Teilaufgabe enthält.

Satz 1 *Es sei G ein Graph mit der chromatischen Zahl $\chi(G) \geq 2$, welcher einen* eindeutigen *chromatisch kritischen Teilgraphen $G_1 \subseteq G$ enthält. Sei v ein beliebiger Knoten von G_1. Dann gibt es einen Graphen G' mit der chromatischen Zahl $\chi(G') = \chi(G) - 1$, der durch Splitting des Knotens v aus G entsteht.*

Beweis. Sei $e = \{u, v\}$ eine Kante von G_1. Der Graph $\bar{G} = G - e$ entstehe aus G durch Löschen der Kante e. Da G_1 ein kritischer Teilgraph von G ist, besitzt $G_1 - e$ eine echte $(\chi(G)-1)$-Knotenfärbung. Da G_1 *eindeutiger* kritischer Teilgraph von G ist, besitzt auch $\bar{G} = G - e$ eine echte $(\chi(G)-1)$-Knotenfärbung.

Der Graph $\bar{\bar{G}}$ entstehe aus $\bar{G}$ durch Einfügen eines neuen Knotens w und der Kante (u, w). Da der Knoten w in $\bar{\bar{G}}$ nur den Nachbarn u hat, läßt sich eine echte $(\chi(G)-1)$-Knotenfärbung $\bar{\bar{h}}$ von $\bar{\bar{G}}$ aus einer echten $(\chi(G)-1)$-Knotenfärbung $\bar{h}$ von $\bar{G}$ konstruieren, indem $\bar{\bar{h}}(t) := \bar{h}(t)$ für $t \neq w$ und $\bar{\bar{h}}(w)$ beliebig $(\bar{\bar{h}}(w) \neq \bar{\bar{h}}(u))$ gewählt werden. $\bar{\bar{G}}$ ist aus G durch Splitting des Knotens v entstanden. □

Folgerung 1 *Es sei G ein Graph mit der chromatischen Zahl $\chi(G) \geq 2$, welcher genau m chromatisch kritische Teilgraphen G_i enthält, die zudem paarweise knotenfremd seien. Dann müssen m Knotensplittings erfolgen, damit der Graph $(\chi(G)-1)$-färbbar ist.* □

Folgerung 2 *Es sei G ein Graph. In G gebe es einen Knoten v, der nicht in allen maximalen vollständigen Teilgraphen (Ordnung m) enthalten ist. Durch Splitting von v in G möge ein Graph G' mit $\chi(G') < \chi(G)$ entstehen. Dann gilt $\chi(G) > m$.*

Beweis. Da es einen maximalen vollständigen Teilgraphen der Ordnung m gibt, welcher den Knoten v nicht enthält, besitzt auch der durch Knotensplitting entstandene Graph G' einen vollständigen Teilgraphen der Ordnung m. Deshalb gilt $(\chi(G) >)\chi(G') \geq m$. □

Folgerung 3 *Es sei G ein Graph, welcher $m(< \chi(G)-1)$ chromatisch kritische Teilgraphen G_i enthält, die einen Knoten v gemeinsam haben. Dann läßt sich der Knoten v so splitten, daß der entstehende Graph $(\chi(G) - 1)$-färbbar ist.*

Beweis. Wir führen einen neuen Knoten w ein und ersetzen *eine* Kante $\{u_i, v\}$ eines jeden Teilgraphen G_i durch eine Kante $\{u_i, w\}$. Dadurch werden die Teilgraphen $(\chi(G) - 1)$-färbbar. Der neue Knoten w hat weniger als $(\chi(G) - 1)$ Nachbarn. Deshalb ist der gesamte Graph $(\chi(G) - 1)$-färbbar. □

3 Das Fakultätsstundenplanproblem

Es sei eine Menge von n Fächern bzw. Veranstaltungen ('subjects') vorgegeben, aus welchen die Studenten genau $r < n$ Veranstaltungen wählen sollen. Es seien nur gewisse Kombinationen ('groups') von Fächern *zulässig*. Das Fakultätsstundenplanproblem ('faculty time table problem') besteht nun darin, einen Stundenplan aufzustellen, der es den Studenten ermöglicht, eine beliebige zulässige Kombination zu belegen. Die Verfügbarkeit von Dozenten wird beim dem Problem nicht berücksichtigt.

Eine triviale Lösung des Problems ist es, jede Veranstaltung an einem eigenen Termin ('period') stattfinden zu lassen. Ist n genügend groß, so ist diese Lösung jedoch nicht praktikabel; allgemein ist es wünschenswert, mit möglichst wenigen Terminen auszukommen.

Die Graphenrepräsentation des Problems führt auf ein Knotenfärbungsproblem. Für jede Veranstaltung wird ein *Knoten* eingeführt. Zwei Knoten werden durch eine (ungerichtete) *Kante* verbunden, wenn es einen Konflikt zwischen den zugeordneten Veranstaltungen gibt, d. h., wenn es eine zulässige Kombination gibt, welche beide Veranstaltungen enthält, und somit verschiedene Termine gewählt werden müssen. Eine *Färbung* h dieses Veranstaltungsgraphen G entspricht der Zuweisung der Termine an die Veranstaltungen. Aufgrund der Konstruktion des Graphen G sind die Lösungen des Fakultätsstundenplanproblems gerade die *echten Färbungen* des Graphen G. Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist somit die Anzahl der benötigten Termine.

4 Kombinatorische Ergebnisse

Satz 2 *Aus n Fächern seien r Fächer zu wählen, wobei alle Kombinationen zulässig seien. Um mit m Terminen ($r \leq m \leq n$) auszukommen, müssen $N_m(n, r) = (n - m)(r - 1)$ zusätzliche Veranstaltungen eingeführt werden.*

Beweis. Schritt 1. Wir ermitteln die Anzahl der zusätzlich einzuführenden Veranstaltungen, um mit r Terminen auszukommen. Diese Anzahl sei mit $N(n,r)$ bezeichnet.

Jede Veranstaltung kann höchstens $(r-1)$-mal gesplittet werden, da es nur r verschiedene Termine gibt.

Wir wählen eine Kombination $C = \{u_1, \ldots, u_r\}$ fest und weisen jedem der r Fächer von C einen eigenen Termin zu. Diese Fächer werden auch für die anderen Kombinationen nicht gesplittet. Die verbleibenden $n-r$ Fächer splitten wir $(r-1)$-mal, so daß sie an jedem Termin stattfinden; dadurch liegen die Fächer jeder Kombination an verschiedenen Terminen. Somit ist

$$N(n,r) \le (r-1)(n-r).$$

Sei andererseits C eine beliebige Kombination von Fächern; deren Termine sehen wir als fest an. Sei $\bar{u} \in V \setminus C$ ein Fach, das nicht in der Kombination C auftritt. Dann gibt es $\binom{r}{r-1} = r$ Kombinationen von $\bar{u} \notin C$ mit $r-1$ Fächern aus C. Für jede dieser Kombinationen gilt: Die $r-1$ Fächer aus C haben bereits feste Termine, und das Fach $\bar{u}$ muß an dem freien Termin stattfinden. Also muß das Fach $\bar{u}$ an jedem der r Termine stattfinden, und dies gilt für jedes der $n-r$ Fächer $\bar{u} \notin C$. Somit ist $N(n,r) \ge (r-1)(n-r)$, und zusammen folgt

$$N(n,r) = (r-1)(n-r).$$

Schritt 2. Stehen $m > r$ Termine zur Verfügung, so läßt sich die im ersten Schritt angegebene Konstruktion vergröbern. Sei u eines der $n-r$ Fächer, die $(r-1)$-mal gesplittet wurden. Steht ein zusätzlicher Termin zur Verfügung, so braucht u nicht gesplittet zu werden, und die Anzahl der benötigten Splittings verringert sich um $r-1$. Die $(m-r)$-malige Anwendung liefert eine Anzahl von

$$N_m(n,r) = (r-1)(n-r) - (m-r)(r-1) = (r-1)(n-m)$$

benötigten Splittings. □

Satz 3 *Aus n Fächern seien r Fächer zu wählen, wobei eine Kombination nicht zulässig sei. Um mit m Terminen $(r \le m \le n)$ auszukommen, müssen genau $(n-m)(r-1)-1$ zusätzliche Veranstaltungen eingeführt werden.*

Der Beweis dieses Satzes ist in [1] zu finden; er enthält keinen neuen Gedanken. – Die beiden Resultate können Abschätzungen für die benötigten zusätzlichen Veranstaltungen liefern, wenn mehrere Kombinationen nicht zulässig sind. Eine solche Abschätzung ist in dem folgenden Satz formuliert.

Satz 4 *Sei H der Veranstaltungsgraph und m die Anzahl der zur Verfügung stehenden Termine. H enthalte einen* eindeutigen *maximalen vollständigen Teilgraphen (maximale Clique) H_1 mit $n_1 > m$ Knoten. Der Komplementärgraph $\overline{H_1}$ von H_1 enthalte einen eindeutigen maximalen vollständigen Teilgraphen H_2 mit $n_2 > m$ Knoten. Die Definition der Teilgraphen H_i sei entsprechend fortgesetzt, bis ein Teilgraph H_k mit $n_k \le m$ Knoten entsteht. In den H_i seien jeweils alle Kombinationen zulässig. Dann gilt für die Anzahl N der zusätzlich einzuführenden Veranstaltungen die Abschätzung*

$$(r-1)[(n_1-m)+(n_2-m)+\cdots+(n_k-m)] \le N \le (r-1)(n-m).$$

Beweisskizze. Eine obere Schranke für die Anzahl N der zusätzlich einzuführenden Veranstaltungen war bereits im Beweis zu Satz 2 ermittelt worden:

$$N \leq (r-1)(n-m)$$

Für den vollständigen Teilgraphen H_1 läßt sich Satz 2 anwenden. Wir erhalten

$$(r-1)(n_1-m) \leq N.$$

Unabhängig von den Splittings, die in H_1 vorgenommen wurden, können nun die benötigten Splittings im Komplementärgraphen abgeschätzt werden. Die wiederholte Anwendung führt auf die im Satz angegebene untere Schranke. □

Literatur

[1] Selim, S. M.: *Split Vertices in Vertex Colouring and Their Application in Developing a Solution to the Faculty Timetable Problem.* The Computer Journal, 31(1):76–82, 1988.

[2] Thulasiraman, K. und M. N. S. Swamy: *Graphs: Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons, 1992.

[3] Volkmann, Lutz: *Fundamente der Graphentheorie.* Springer-Verlag, Wien – New York, 1996.