Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2002/2003
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dipl.-Math. Matthias Köppe

1. Übung zur Vorlesung

Ganzzahlige Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2002`
E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`
Abgabe: Mittwoch, 22. Oktober, vor der Übung

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Bringen Sie die folgende Matrix in ganzzahlige Normalform, indem Sie das Verfahren aus dem Existenzbeweis verwenden:

$$\begin{pmatrix} 60 & 12 & 24 & 30 \\ 2 & 10 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende „nichtnegative Variante" des ganzzahligen Farkas-Lemmas:

> Die Menge $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ ist genau dann leer, wenn es einen *nichtnegativen* Vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{Q}_+^m$ mit $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} \in \mathbf{Z}^n$ und $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} \notin \mathbf{Z}$ gibt.

3. Aufgabe **(5+5 Punkte)**

Eine rationale Matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{Q}^{m \times n}$ ist in *Hermite-Normalform* (HNF), wenn sie die Gestalt $[\mathbf{B}, \mathbf{0}]$ hat, wobei $\mathbf{B} \in \mathbf{Q}_+^{m \times m}$ eine reguläre Matrix mit nichtnegativen Einträgen ist und in jeder Zeile der eindeutig bestimmte maximale Eintrag auf der Hauptdiagonalen sitzt.

Zeigen Sie:

(a) Jede rationale Matrix mit vollem Zeilenrang kann mit elementaren Spaltenoperationen in Hermite-Normalform gebracht werden.

(b) Die Hermite-Normalform einer Matrix ist eindeutig bestimmt. (Hinweis: Seien $[\mathbf{B}, \mathbf{0}]$ und $[\mathbf{B}', \mathbf{0}]$ zwei verschiedene Hermite-Normalformen der Matrix $\mathbf{A}$. Sei i minimal mit $B_{i,j} \neq B'_{i,j}$ für ein j. Betrachte nun den Gittervektor $\mathbf{B}_{\bullet,j} - \mathbf{B}'_{\bullet,j}$.)