Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2002/2003
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dipl.-Math. Matthias Köppe

2. Übung zur Vorlesung

Ganzzahlige Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2002`
E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`
Abgabe: Mittwoch, 30. Oktober, vor der Übung

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Beweisen Sie Proposition 6.1 (Eigenschaften der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung) der Vorlesung.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

Beweisen Sie Teil (b) der Proposition 6.2 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung von Gitterbasen) aus der Vorlesung.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei $L \subseteq \mathbf{R}^2$ ein Gitter, gegeben durch eine Basis $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2 \in \mathbf{R}^2$. Das folgende Verfahren heißt $60°$-*Algorithmus von Gauß*:

1. Sei $\|\mathbf{c}^1\| \leq \|\mathbf{c}^2\|$.
2. Setze $\mathbf{c}^2 \leftarrow \mathbf{c}^2 - \left[\frac{(\mathbf{c}^1)^\top \mathbf{c}^2}{\|\mathbf{c}^1\|^2}\right] \mathbf{c}^1$, wobei $[\cdot]$ Runden zur nächsten ganzen Zahl bedeutet.
3. Wenn $\|\mathbf{c}^2\| < \|\mathbf{c}^1\|$, so vertausche $\mathbf{c}^1$ und $\mathbf{c}^2$ und gehe zu 2.
4. Gib $\mathbf{b}^1 = \mathbf{c}^1$ und $\mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$ aus.

Zeigen Sie: Das Verfahren berechnet in endlich vielen Schritten eine Basis $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2$ von L mit den Eigenschaften:

(i) $\left|(\mathbf{b}^1)^\top \mathbf{b}^2\right| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{b}^1\|^2$,

(ii) $\|\mathbf{b}^1\| = \min\{\, \|\mathbf{b}\| : \mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in L \,\}$.

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Seien $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n \in \mathbf{R}^n$ linear unabhängig und $L = L(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n) \subseteq \mathbf{R}^n$. Zeigen Sie die *Hadamardsche Ungleichung*

$$\det L \leq \prod_{i=1}^{n} \|\mathbf{b}^i\|.$$

Zeigen Sie weiterhin: Diese Ungleichung ist genau dann mit Gleichheit erfüllt, wenn die Vektoren $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$ paarweise orthogonal sind.