Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2002/2003
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dipl.-Math. Matthias Köppe

4. Übung zur Vorlesung

Ganzzahlige Optimierung

http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2002
E-Mail: mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de
Abgabe: Mittwoch, 13. November, vor der Übung

1. Aufgabe **(7 Punkte)**

Wenden Sie Algorithmus 6.1 auf das Problem

$$P = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{a} \,\}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -4 \\ -1 & -7 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ -19 \\ -20 \end{pmatrix}$$

an.

2. Aufgabe **(7 Punkte)**

Das Problem der *simultanen diophantischen Approximation* lautet wie folgt:

> Gegeben seien rationale Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{Q}$, $0 < \varepsilon < 1$ und eine ganze Zahl $N > 1$. Finde $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{Z}$ und $q \in \mathbf{N}$ mit $0 < q \leq N$, so daß gilt:
>
> $$\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\},$$
>
> oder entscheide, daß eine solche Approximation nicht existiert.

Es wurde von Dirichlet (1842) gezeigt, daß es für $N \geq \varepsilon^{-n}$ immer eine Lösung gibt. Das Problem ist aber NP-vollständig.

Zeigen Sie, daß es für $N \geq 2^{n(n+1)/4}\varepsilon^{-n}$ einen Algorithmus gibt, der das Problem in polynomieller Zeit löst.

3. Aufgabe **(7 Punkte)**

Sei c_n eine Zahl, die nur von n abhängt. Sei $\mathbf{D} \in \mathbf{Q}^{n\times n}$ regulär und $\mathbf{d} \in \mathbf{Q}^n$ mit

$$\mathbf{d} + \mathbf{D}B^n\big(\mathbf{0}, \frac{1}{c_n}\big) \subseteq P \subseteq \mathbf{d} + \mathbf{D}B^n\big(\mathbf{0}, 1\big).$$

Seien $P' = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{x} \le \mathbf{a} \,\}$ und $\mathbf{p} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$. Sei $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$ eine reduzierte Basis des Gitters $L = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Z}^n$, wobei $\mathbf{b}^n$ der längste Basisvektor ist. Sei $\tilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \tilde{\mathbf{b}}^n$ die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung. Sei $\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{b}}^n \big/ \big\|\tilde{\mathbf{b}}^n\big\|^2$.

Zeigen Sie: Wenn der Algorithmus ANVA einen Punkt $\mathbf{b} \in L$ mit $\mathbf{b} \notin P'$ liefert, dann gilt

$$\max\{\, \tilde{\mathbf{c}}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P' \cap L \,\} - \min\{\, \tilde{\mathbf{c}}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P' \cap L \,\} \le d_n,$$

wobei d_n nur von n abhängt. Geben Sie eine Formel für d_n an, die von c_n abhängt.