Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2002/2003
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dipl.-Math. Matthias Köppe

5. Übung zur Vorlesung

Ganzzahlige Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2002`
E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`
Abgabe: Mittwoch, 20. November, vor der Übung

1. Aufgabe **(7 Punkte)**

Seien C ein spitzer polyedrischer Kegel, $C \cap \mathbf{Z}^n = S$ und $H = \{\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^m\}$ die ganzzahlige Basis von S. Sei $\mathbf{x} \in S$.

Zeigen Sie: Das lineare Optimierungsproblem

$$\max \sum_{i=1}^{m} \lambda_i : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{h}^i = \mathbf{x}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$$

ist zulässig und beschränkt, und es gibt eine Optimallösung λ^* mit höchstens n von Null verschiedenen Komponenten.

2. Aufgabe **(7 Punkte)**

Wir betrachten das IP

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in S = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \,\} \end{aligned} \tag{$*$}$$

mit $\mathbf{c} \in \mathbf{Z}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbf{Z}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^m$. Seien $O_1, \dots, O_{2^m}$ die Orthanten des $\mathbf{R}^m$. Für $j \in \{1, \dots, 2^m\}$ seien

$$C_j = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \in O_j \,\}$$

und H_j ein ganzzahliges Erzeugendensystem von $C_j \cap \mathbf{Z}^n$. Zeigen Sie, daß $\mathbf{x} \in S$ eine Optimallösung von $(*)$ genau dann ist, wenn für jeden Vektor $\mathbf{h} \in \bigcup_{j=1}^{2^m} H_j$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\mathbf{c}^\top \mathbf{h} \leq 0$,

(b) $\mathbf{c}^\top \mathbf{h} > 0$ und $\mathbf{x} + \mathbf{h} \notin S$.

3. Aufgabe **(7 Punkte)**

Zeigen Sie, daß es für jedes $n \in \mathbf{N}$ einen rationalen polyedrischen Kegel $C \subseteq \mathbf{R}^n$ und einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{x} \in C \cap \mathbf{Z}^n$ gibt, so daß $n + \lfloor n/6 \rfloor$ Elemente der ganzzahligen Basis von $C \cap \mathbf{Z}^n$ erforderlich sind, um $\mathbf{x}$ als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination darzustellen.

(Hinweis: Verwenden Sie das 6dimensionale Beispiel aus der Vorlesung.)