Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2002/2003
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dipl.-Math. Matthias Köppe

7. Übung zur Vorlesung

Ganzzahlige Optimierung

http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2002
E-Mail: mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de
Abgabe: Mittwoch, 11. Dezember, vor der Übung

1. Aufgabe **(7 Punkte)**

Zeigen Sie die Korrektheit von Algorithmus 7.2 (Konstruktion einer ganzzahligen Basis aus einem ganzzahligen Erzeugendensystem) aus dem Vorlesungsskript.

2. Aufgabe **(7 Punkte)**

Berechnen Sie ein ganzzahliges Erzeugendensystem der Menge

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^4_+ : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \leq 2 \right\}.$$

3. Aufgabe **(7 Punkte)**

Zeigen Sie, daß das folgende Problem NP-vollständig ist:

> Seien C ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel und $\mathbf{x} \in C \cap \mathbf{Z}^n$. Ist $\mathbf{x}$ eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von Elementen von $(C \cap \mathbf{Z}^n) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{x}\}$?

Anleitung: Es sei bekannt, daß das folgende *Zahlenpartitionierungsproblem* NP-vollständig ist:

> Sei $a_1, \dots, a_d$ natürliche Zahlen. Gibt es eine Menge $J \subseteq \{1, \dots, d\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$?

Es sei nun eine Instanz des Zahlenpartitionierungsproblems gegeben. Seien $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)^\top$, $b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d a_i$ und

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \{0, 1\}^d : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b} \right\}.$$

Weiterhin seien C der spitze Kegel

$$C = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^{d+1} : \sum_{i=1}^{d} a_i x_i - b x_{n+1} = 0 \right\}$$

und $S = C \cap \mathbf{Z}^{d+1}$.

Zeigen Sie, daß $P \neq \emptyset$ genau dann ist, wenn der Vektor $\mathbf{h} = (1, \ldots, 1, 2)^\top \in S$ eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von Elementen von $S \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{x}\}$ ist.