Studienarbeit

Galerkinapproximation der allgemeinen Rohrströmung

Matthias Köppe*

8. Februar 1999**

*E-Mail: mkoeppe@cs.uni-magdeburg.de.
**$Id: starb.tex,v 1.16 1999/02/08 14:46:08 mkoeppe Stable $.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Die allgemeine Rohrströmung

Wir betrachten die Strömung eines inkompressiblen zähen Fluids im unbeschränkten Einheitszylindergebiet (*Rohr*)

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbf{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 < 1 \right\}. \tag{1.1}$$

Die Strömung wird durch zwei Komponenten angetrieben:

1. Eine gleichförmige Drehung des Rohrmantels bewirkt infolge der Haftbedingung Randbedingungen des Geschwindigkeitsfeldes. Diese induzieren eine Strömung, welche als *Couette-Strömung* angesprochen wird.

2. Der Gradient des kinematischen Druckes treibt eine Strömung an, welche als *Poiseuille-Strömung* angesprochen wird.

Wir betrachten in dieser Arbeit die *allgemeine Rohrströmung*, d. h. freie Kombinationen von Couette- und Poiseuille-Strömung.

Wir arbeiten von Anfang an mit Größen, die mit der Stokes-Skalierung [Rum98] entdimensioniert worden sind. Die Strömungsgeschwindigkeit wird durch ein Vektorfeld $(u^1, u^2, u^3) = \mathbf{u}\colon [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ beschrieben, der kinematische Druck durch ein Skalarfeld $p\colon [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$. Die Bewegung des Fluids wird dann durch die *Navier-Stokes-Gleichung*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + Re \left(\sum_{j=1}^{3} u^j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{u} \right) + \nabla_{\mathbf{x}} p = \mathbf{0} \quad \text{in } (0,T) \times \Omega, \tag{1.2a}$$

wobei Re die *Reynoldszahl* ist, und die *Kontinuitätsgleichung*

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } [0,T] \times \Omega \tag{1.2b}$$

beschrieben. Vervollständigt wird das Problem durch die Anfangs- und Randbedingungen für die Strömungsgeschwindigkeit,

$$\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \tag{1.2c}$$

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\big|_{x_2^2+x_3^2=1} = \omega \cdot (0, -x_3, x_2)^\top, \tag{1.2d}$$

wobei ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Rohrmantels ist.

Das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}_L^{\cos} = \mathbf{u}_0 = \omega \cdot (0, -x_3, x_2)^\top \tag{1.3}$$

ist eine Lösung des Rand-Anfangswert-Problems (1.2); es wird als *Couette-Laminarfeld* angesprochen. Eine Lösung des zugeordneten Problems mit homogenen Randbedingungen, d. h. bei ruhendem Rohrmantel, ist das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}_L^{\sin} = \mathbf{u}_0 = \chi \cdot \chi_* \cdot (1 - x_2^2 - x_3^2, 0, 0)^\top \quad \text{mit } \chi_* = \sqrt{\tfrac{3}{2}}; \tag{1.4}$$

dieses wird als *Poiseuille-Laminarfeld* angesprochen. Die Skalierung ist so gewählt, daß die beiden Strömungen bei gleichen *charakteristischen Geschwindigkeiten* ω und χ denselben Eintrag an kinetischer Energie in einen festen Bezugszylinder liefern [Rum98]. Die beiden Felder sind orthogonal im Sinne des $L_2(\Omega)^3$ (und auch des $W_2^1(\Omega)^3$). Die Überlagerung beider Strömungen besitzt daher die charakteristische Geschwindigkeit $\sqrt{\omega^2+\chi^2}$; in der Stokes-Skalierung ist sie stets 1. Zur Beschreibung der allgemeinen Strömung genügt somit ein Parameter ψ; wir setzen

$$\omega = \cos\psi \quad \text{und} \quad \chi = \sin\psi. \tag{1.5}$$

Das *allgemeine Laminarfeld* ist damit gegeben durch

$$\mathbf{u}_L(\mathbf{x}) = \cos\psi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + \sin\psi \cdot \chi_* \begin{pmatrix} 1 - x_2^2 - x_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{1.6}$$

ihm ist das Druckfeld

$$p_L(\mathbf{x}) = \cos^2\psi \cdot \tfrac{1}{2} Re\big(x_2^2 + x_3^2 - \tfrac{1}{2}\big) - \sin\psi \cdot 4\chi_* x_1 \tag{1.7}$$

zugeordnet.

Zur Homogenisierung der Randbedingungen setzen wir nun an:

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_L(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x}), \tag{1.8a}$$

$$p(t,\mathbf{x}) = p_L(\mathbf{x}) + \hat{p}(t,\mathbf{x}). \tag{1.8b}$$

Dieser Ansatz überführt das Problem (1.2) in das folgende vollhomogene Rand-Anfangswert-Problem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} - \Delta_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}} + Re \cdot \sum_{j=1}^{3} \hat{u}^j \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\mathbf{u}} \\
&\quad + Re \cdot \cos\psi \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{u}^3 \\ \hat{u}^2 \end{pmatrix} + \left(-x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\mathbf{u}} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{\mathbf{u}} \right) \right] \\
&\quad + Re \cdot \sin\psi \cdot \chi_* \left[\begin{pmatrix} -2(x_2\hat{u}^2 + x_3\hat{u}^3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \big(1 - x_2^2 - x_3^2\big) \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\mathbf{u}} \right] + \nabla_{\mathbf{x}} \hat{p} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{1.9a}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \tag{1.9b}$$

$$\hat{\mathbf{u}}(0,\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \tag{1.9c}$$

$$\hat{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x})\big|_{x_2^2+x_3^2=1} = \mathbf{0} \tag{1.9d}$$

1.2 Übergang zu beschränkten Gebieten

Unser Interesse gilt Lösungen des Problems (1.2) bzw. (1.9), welche in *Hauptströmungsrichtung*, d. h. in x_1-Richtung, periodisch sind. Wir betrachten dazu den *Periodizitätszylinder* Ω_ℓ, ein Zylindergebiet der Länge 2ℓ:

$$\Omega_\ell = \big\{\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbf{R}^3 : |x_1| < \ell,\ x_2^2 + x_3^2 < 1 \,\big\}. \tag{1.10}$$

Wir untersuchen nun das Problem (1.9) über Ω_ℓ, ausgestattet mit periodischen Randbedingungen bezüglich des Deckels und Bodens von Ω_ℓ:

$$\hat{\mathbf{u}}\big(t, (-\ell, x_2, x_3)^\top\big) = \hat{\mathbf{u}}\big(t, (+\ell, x_2, x_3)^\top\big) \quad \text{für } t \in [0,T] \text{ und } x_2^2 + x_3^2 \le 1. \tag{1.11}$$

1.3 Der Stokes-Operator

Das Problem (1.9) über Ω_ℓ soll mit Spektralmethoden gelöst werden. Dazu fassen wir es als Anfangswertproblem in einem Funktionenraum auf, dessen Elemente die Kontinuitätsgleichung (1.9b) und die Randbedingungen (1.9d, 1.11) bereits erfüllen. In der Darstellung folgen wir [Rum97].

Sei S_ℓ der Raum der Funktionen des $L_2(\Omega_\ell)^3$, welche im verallgemeinerten Sinne divergenzfrei sind und die im Spursinne homogenen Randbedingungen bezüglich des Mantels und periodischen Randbedingungen bezüglich des Deckels und Bodens von Ω_ℓ genügen. S_ℓ ist der Abschluß der Menge

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in C^\infty(\Omega_\ell)^3 : \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{\frac{\ell}{\pi}k\in\mathbf{Z}} \mathbf{v}_k(x_2, x_3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_1} \text{ mit } \mathbf{v}_k \in C_0^\infty(\bar{B}^2)^3 \end{array} \right\}, \tag{1.12}$$

wobei $\bar{B}^2$ der abgeschlossene Einheitskreis ist, im Raum $L_2(\Omega_\ell)^3$. Sei ferner S_ℓ^1 der Abschluß von V in $W_2^1(\Omega_\ell)$ und $S_\ell^2 = S_\ell^1 \cap W_2^2(\Omega_\ell)^3$.

Ist π_ℓ die orthogonale Projektion von $L_2(\Omega_\ell)^3$ auf S_ℓ, so nennen wir $-\pi_\ell\Delta\colon S_\ell^2 \to S_\ell$ den *Stokes-Operator*. Er ist ein positiver symmetrischer halbbeschränkter Operator; sein inverser Operator, aufgefaßt als Operator auf S_ℓ, ist kompakt. Daher ist das System der Eigenfunktionen von $-\pi_\ell\Delta$ vollständig in S_ℓ.

2 Systeme von Eigenfunktionen des Stokes-Operators

Das Eigenwertproblem des Operators $-\pi_\ell\Delta$ kann wie folgt formuliert werden [Rum97]: Gesucht sind Vektorfelder $\mathbf{u}$, welche den Randbedingungen (1.9d, 1.11) genügen, sowie Skalarfelder p und reelle Zahlen λ, so daß in Ω_ℓ die folgenden Gleichungen erfüllt werden:

$$\Delta\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \nabla p, \tag{2.1a}$$

$$\Delta p = 0, \tag{2.1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{2.1c}$$

In den folgenden Abschnitten werden wir zwei Systeme komplexwertiger Eigenfunktionen nach [Bro86] bzw. [Rum97] vorstellen. Ausgehend von diesen werden wir zu reellwertigen Eigenfunktionen übergehen.

2.1 Stokes-Funktionen nach Brosa

Brosa [Bro86] betrachtet die Stokes-Gleichungen für kompressible Newtonsche Fluide,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = -\frac{1}{\rho_0}\nabla_{\mathbf{x}} p(t,\mathbf{x}) + \mu_0\Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) - \nu_0\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}(t,\mathbf{x}), \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,\mathbf{x}) = -\rho_0 c_\mathrm{c}^2 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(t,\mathbf{x}), \tag{2.2b}$$

aufgefaßt als Linearisierung der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen; hierbei sind ρ_0, μ_0, ν_0, ρ_0 und c_c Skalierungskonstanten, deren Wahl nicht Gegenstand dieser Arbeit ist. (Bei einem Grenzübergang $c_c \to \infty$ erhalten wir die Gleichungen für den inkompressiblen Fall: $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0$.) Brosa beweist einen Darstellungssatz für eine Klasse von Lösungen dieser Gleichungen:

Satz 1. *Die Stokes-Gleichungen (2.2) werden von den Darstellungsformeln*

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \big(\mathbf{v}a(t,\mathbf{x})\big) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times \big(\mathbf{v}b(t,\mathbf{x})\big) + \nabla_{\mathbf{x}} c(t,\mathbf{x}), \tag{2.3a}$$

$$p(t,\mathbf{x}) = p_0 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} c(t,\mathbf{x}) + \mu_0 \rho_0 \Delta_{\mathbf{x}} c(t,\mathbf{x}) \tag{2.3b}$$

gelöst, falls die Potentiale a, b und c den Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\nu_0}\frac{\partial}{\partial t} a(t,\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}} a(t,\mathbf{x}), \tag{2.4a}$$

$$\frac{1}{\nu_0}\frac{\partial}{\partial t} b(t,\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}} b(t,\mathbf{x}), \tag{2.4b}$$

$$\frac{1}{c_{\mathrm{c}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} c(t,\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}} c(t,\mathbf{x}) + \frac{\mu_0}{c_{\mathrm{c}}^2} \Delta_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial t} c(t,\mathbf{x}) \tag{2.4c}$$

genügen und das Vektorfeld $\mathbf{v}$ die Gestalt

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + v_1 \mathbf{x} \tag{2.5}$$

mit konstanten $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{R}^3$ und $v_1 \in \mathbf{R}$ besitzt.

In dem für uns interessanten Fall der stationären Lösungen der inkompressiblen Gleichungen erhält man die Darstellungsformel

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \times \big(\mathbf{v}a(\mathbf{x})\big) + \nabla \times \nabla \times \big(\mathbf{v}b(\mathbf{x})\big) + \nabla c(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

und nach Wahl des Vektorfeldes $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x$ im Zylindergebiet die Potentiale

$$a(\mathbf{x}) = a_0 J_n(\sqrt{\lambda - k^2}\, r) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \tag{2.7a}$$

$$b(\mathbf{x}) = b_0 J_n(\sqrt{\lambda - k^2}\, r) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \tag{2.7b}$$

$$c(\mathbf{x}) = c_0 J_n(-\mathrm{i}\,|k|\, r) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{2.7c}$$

Wir werden in der folgenden Rechnung mit $a_0 = b_0 = 1$ und $c_0 = \mathrm{i}^n$ arbeiten; das dritte Potential erhält dann die einfache Gestalt

$$c(\mathbf{x}) = I_n(|k|\, r) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{2.7d}$$

Außerdem werden wir zur einfacheren Notation die Abkürzung

$$\lambda_k = \sqrt{\lambda - k^2} \tag{2.8}$$

benutzen.

Wir werden die ermittelten Potentiale (2.7) jetzt in die Darstellungsformel (2.3a) einsetzen. Dazu benutzen wir die Darstellung der Rotation und des Gradienten in Zylinderkoordinaten,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u^x}{\partial \varphi} - \frac{\partial u^\varphi}{\partial x}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial u^r}{\partial x} - \frac{\partial u^x}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u^\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial u^r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_x, \tag{2.9}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x, \tag{2.10}$$

und die Darstellung der kartesischen durch die zylindrischen Komponenten,

$$u^1 = u^x, \qquad u^2 = u^r\cos\varphi - u^\varphi \sin\varphi, \qquad u^3 = u^r \sin\varphi + u^\varphi\cos\varphi. \tag{2.11}$$

Weiterhin verwenden wir die folgenden Rekursionsformeln [Dre75] der Bessel-Funktionen und ihrer Ableitungen:

$$\frac{2n}{\xi}J_n(\xi) = J_{n-1}(\xi) + J_{n+1}(\xi), \qquad 2J_n'(\xi) = J_{n-1}(\xi) - J_{n+1}(\xi), \tag{2.12a}$$

$$\frac{2n}{\xi}I_n(\xi) = I_{n-1}(\xi) - I_{n+1}(\xi), \qquad 2I_n'(\xi) = I_{n-1}(\xi) + I_{n+1}(\xi). \tag{2.12b}$$

Wir berechnen zunächst die Rotation des Feldes $\mathbf{v}a$:

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{e}_x a) &= \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial\varphi}\mathbf{e}_r - \frac{\partial a}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{r}\mathrm{i}n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}J_n(\lambda_k r)\mathbf{e}_r - \lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}J_n'(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\left(\frac{1}{r}\mathrm{i}nJ_n(\lambda_k r)\mathbf{e}_r - \lambda_k J_n'(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi\right).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Unter Verwendung der Beziehungen (2.11, 2.12) gelangen wir zu der Darstellung in kartesischen Komponenten:

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{e}_x a) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\begin{pmatrix}0\\ \cos\varphi\cdot\frac{1}{r}\mathrm{i}nJ_n(\lambda_k r) + \sin\varphi\cdot\lambda_k J_n'(\lambda_k r)\\ \sin\varphi\cdot\frac{1}{r}\mathrm{i}nJ_n(\lambda_k r) - \cos\varphi\cdot\lambda_k J_n'(\lambda_k r)\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\frac{1}{r}\mathrm{i}n\frac{\lambda_k r}{2n}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)+J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\\ \quad +\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\frac{\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)-J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\\ \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\frac{1}{r}\mathrm{i}n\frac{\lambda_k r}{2n}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)+J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\\ \quad -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\frac{\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)-J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{\lambda_k}{2}\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r)\big)\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r).\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Ausgehend von (2.13) berechnen wir nun $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}b$:

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times(\mathbf{e}_x b) &= \nabla\times\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{i}\frac{r}{n}J_n(\lambda_k r)\mathbf{e}_r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\lambda_k J_n'(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi\right)\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{i}k\lambda_k J_n'(\lambda_k r)\mathbf{e}_r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{kn}{r}J_n(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi\\ &\quad + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Big(-\lambda_k J_n'(\lambda_k r) - r\lambda_k^2 J_n''(\lambda_k r) + \frac{n^2}{r}J_n(\lambda_k r)\Big)\mathbf{e}_x.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Aus den Additionstheoremen (2.12) erhalten wir die Formeln

$$J_n'(\xi) = \tfrac{1}{2}\big(J_{n-1}(\xi) - J_{n+1}(\xi)\big), \tag{2.16a}$$

$$\begin{aligned}J_n''(\xi) &= \tfrac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})'(\xi) = \tfrac{1}{4}\big(J_{n-2}(\xi) - J_n(\xi) - J_n(\xi) + J_{n+2}(\xi)\big)\\ &= \frac{n-1}{2\xi}J_{n-1}(\xi) - J_n(\xi) + \frac{n+1}{2\xi}J_{n+1}(\xi);\end{aligned} \tag{2.16b}$$

mit ihnen folgt:

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\nabla\times(\mathbf{e}_x b)\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Bigg(\mathrm{i}\frac{k\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)-J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\mathbf{e}_r-\frac{k\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)+J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\mathbf{e}_\varphi\\
&\qquad\qquad+\left[-\frac{\lambda_k n}{2r}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)+J_{n+1}(\lambda_k r)\big)+\left(\lambda_k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)J_n(\lambda_k r)\right]\mathbf{e}_x\Bigg)\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Bigg(\mathrm{i}\frac{k\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)-J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\mathbf{e}_r-\frac{k\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)+J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\mathbf{e}_\varphi\\
&\qquad\qquad+\lambda_k^2 J_n(\lambda_k r)\mathbf{e}_x\Bigg)\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\begin{pmatrix}\lambda_k^2 J_n(\lambda_k r)\\ \cos\varphi\cdot\mathrm{i}\frac{k\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)-J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\\ +\sin\varphi\cdot\frac{k\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)+J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\\ \sin\varphi\cdot\mathrm{i}\frac{k\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)-J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\\ -\cos\varphi\cdot\frac{k\lambda_k}{2}\big(J_{n-1}(\lambda_k r)+J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\begin{pmatrix}\lambda_k^2 J_n(\lambda_k r)\\ \frac{k\lambda_k}{2}\big((\mathrm{i}\cos\varphi+\sin\varphi)J_{n-1}(\lambda_k r)+(-\mathrm{i}\cos\varphi+\sin\varphi)J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\\ \frac{k\lambda_k}{2}\big((-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)J_{n-1}(\lambda_k r)+(-\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\begin{pmatrix}\lambda_k^2 J_n(\lambda_k r)\\ \mathrm{i}\frac{k\lambda_k}{2}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\\ \frac{k\lambda_k}{2}\big(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r)\big)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Schließlich berechnen wir den Gradienten des Feldes c:

$$
\begin{aligned}
\nabla c &= \nabla\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}I_n(|k|\,r)\big)\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\left(|k|\,I_n'(|k|\,r)\mathbf{e}_r+\mathrm{i}\frac{n}{r}I_n(|k|\,r)\mathbf{e}_\varphi+\mathrm{i}kI_n(|k|\,r)\mathbf{e}_x\right)\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\begin{pmatrix}\mathrm{i}kI_n(|k|\,r)\\ \cos\varphi\cdot|k|\,I_n'(|k|\,r)-\sin\varphi\cdot\mathrm{i}\frac{n}{r}I_n(|k|\,r)\\ \sin\varphi\cdot|k|\,I_n'(|k|\,r)+\cos\varphi\cdot\mathrm{i}\frac{n}{r}I_n(|k|\,r)\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\begin{pmatrix}\mathrm{i}kI_n(|k|\,r)\\ \cos\varphi\cdot\frac{|k|}{2}\big(I_{n-1}(|k|\,r)+I_{n+1}(|k|\,r)\big)\\ -\sin\varphi\cdot\mathrm{i}\frac{|k|}{2}\big(I_{n-1}(|k|\,r)-I_{n+1}(|k|\,r)\big)\\ \sin\varphi\cdot\frac{|k|}{2}\big(I_{n-1}(|k|\,r)+I_{n+1}(|k|\,r)\big)\\ +\cos\varphi\cdot\mathrm{i}\frac{|k|}{2}\big(I_{n-1}(|k|\,r)-I_{n+1}(|k|\,r)\big)\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\begin{pmatrix}\mathrm{i}kI_n(|k|\,r)\\ \frac{|k|}{2}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}I_{n-1}(|k|\,r)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}I_{n+1}(|k|\,r)\big)\\ \mathrm{i}\frac{|k|}{2}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}I_{n-1}(|k|\,r)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}I_{n+1}(|k|\,r)\big)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

2.2 Einführung reellwertiger Grundfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir, ausgehend von den Feldern aus der Darstellungsformel des vorherigen Abschnitts, acht Klassen reellwertiger *Grundfunktionen* definieren. Ziel ist es, die reellwertigen Eigenfunktionen des Stokes-Operators als Linearkombinationen dieser Grundfunktionen darstellen zu können.

Grundfunktionen vom Typ „rot rot". Sei $\mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v}b)$, wobei b das Potential aus Abschnitt 2.1 mit den Parametern $n \in \mathbf{Z}$ und $k \in \frac{\pi}{\ell}\mathbf{N}_0$ ist. Wir gehen dabei von der Darstellung (2.17) aus. Um ein reelles Vektorfeld zu erhalten, betrachten wir zudem $\tilde{\mathbf{u}} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v}\tilde{b})$, wobei $\tilde{b}$ das Potential mit den Parametern $-n$ und $-k$ ist; Linearkombination beider Felder ergibt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^{\sin}_{\mathrm{rot\,rot}} &= \frac{1}{2\lambda_k^2}\big(\mathbf{u} + (-1)^n\tilde{\mathbf{u}}\big) \\
&= \begin{pmatrix} J_n(\lambda_k r)\cos(kx + n\varphi) \\ \frac{k}{\lambda_k}\cdot\frac{1}{2}\left[+J_{n+1}(\lambda_k r)\sin\big(kx + (n+1)\varphi\big) - J_{n-1}(\lambda_k r)\sin\big(kx + (n-1)\varphi\big)\right] \\ \frac{k}{\lambda_k}\cdot\frac{1}{2}\left[-J_{n+1}(\lambda_k r)\cos\big(kx + (n+1)\varphi\big) - J_{n-1}(\lambda_k r)\cos\big(kx + (n-1)\varphi\big)\right] \end{pmatrix} \\
&\text{für } \tfrac{\ell}{\pi}k = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } n \in \mathbf{Z}, \qquad (2.19)\\
\mathbf{w}^{\cos}_{\mathrm{rot\,rot}} &= \frac{1}{2\mathrm{i}\lambda_k^2}\big(\mathbf{u} - (-1)^n\tilde{\mathbf{u}}\big) \\
&= \begin{pmatrix} J_n(\lambda_k r)\sin(kx + n\varphi) \\ \frac{k}{\lambda_k}\cdot\frac{1}{2}\left[-J_{n+1}(\lambda_k r)\cos\big(kx + (n+1)\varphi\big) + J_{n-1}(\lambda_k r)\cos\big(kx + (n-1)\varphi\big)\right] \\ \frac{k}{\lambda_k}\cdot\frac{1}{2}\left[-J_{n+1}(\lambda_k r)\sin\big(kx + (n+1)\varphi\big) - J_{n-1}(\lambda_k r)\sin\big(kx + (n-1)\varphi\big)\right] \end{pmatrix} \\
&\text{für } \tfrac{\ell}{\pi}k = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } n \in \mathbf{Z} \text{ mit } (n,k) \neq (0,0). \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Bemerkungen.

1. Im Fall $n = k = 0$ verschwindet $\mathbf{w}^{\cos}_{\mathrm{rot\,rot}}$ identisch.
2. Durch Kombination zweier komplexer Felder mit Parametern n, k bzw. $-n, -k$ erhalten wir ein Paar reellwertiger Grundfunktionen; diese werden wiederum durch Parameter n, k charakterisiert, wobei k nichtnegativ ist, während n auch negative Werte annehmen kann.

Grundfunktionen vom Typ „rot". Sei $\mathbf{u} = \nabla \times (\mathbf{v}a)$, wobei a das Potential aus Abschnitt 2.1 mit den Parametern $n \in \mathbf{Z}$ und $k \in \frac{\pi}{\ell}\mathbf{N}_0$ ist. Wir gehen von der Darstellung (2.14) aus und bilden eine Linearkombination mit $\tilde{\mathbf{u}} = \nabla \times \tilde{a}$, wobei $\tilde{a}$ das Potential mit Parametern $-n$ und $-k$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^{\sin}_{\mathrm{rot}} &= \frac{1}{2\lambda_k}\big(\mathbf{u} + (-1)^n\tilde{\mathbf{u}}\big) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\left[+J_{n+1}(\lambda_k r)\sin\big(kx + (n+1)\varphi\big) + J_{n-1}(\lambda_k r)\sin\big(kx + (n-1)\varphi\big)\right] \\ \frac{1}{2}\left[-J_{n+1}(\lambda_k r)\cos\big(kx + (n+1)\varphi\big) + J_{n-1}(\lambda_k r)\cos\big(kx + (n-1)\varphi\big)\right] \end{pmatrix} \\
&\text{für } \tfrac{\ell}{\pi}k = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } n \in \mathbf{Z}, \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{w}^{\cos}_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2\mathrm{i}\lambda_k}\big(\mathbf{u} - (-1)^n\tilde{\mathbf{u}}\big)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\big[-J_{n+1}(\lambda_k r)\cos\big(kx+(n+1)\varphi\big) - J_{n-1}(\lambda_k r)\cos\big(kx+(n-1)\varphi\big)\big] \\ \frac{1}{2}\big[-J_{n+1}(\lambda_k r)\sin\big(kx+(n+1)\varphi\big) + J_{n-1}(\lambda_k r)\sin\big(kx+(n-1)\varphi\big)\big] \end{pmatrix}$$
$$\text{für } \tfrac{\ell}{\pi}k = 0,1,2,\dots \text{ und } n \in \mathbf{Z} \text{ mit } (n,k) \neq (0,0). \tag{2.22}$$

Grundfunktionen vom Typ „grad". Sei jetzt $\mathbf{u} = \nabla c$, wobei c das Potential aus Abschnitt 2.1 mit den Parametern $n \in \mathbf{Z}$ und $k \in \frac{\pi}{\ell}\mathbf{N}$ ist. Wir gehen von der Darstellung (2.18) aus. Linearkombination mit $\tilde{\mathbf{u}} = \nabla\tilde{c}$, wobei $\tilde{c}$ das Potential mit Parametern $-n$ und $-k$ ist, ergibt:

$$\mathbf{w}^{\sin}_{\mathrm{grad}} = \frac{1}{2\mathrm{i}k}\big(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\big)$$
$$= \begin{pmatrix} I_n(kr)\cos(kx+n\varphi) \\ \frac{1}{2}\big[+I_{n+1}(kr)\sin\big(kx+(n+1)\varphi\big) + I_{n-1}(kr)\sin\big(kx+(n-1)\varphi\big)\big] \\ \frac{1}{2}\big[-I_{n+1}(kr)\cos\big(kx+(n+1)\varphi\big) + I_{n-1}(kr)\cos\big(kx+(n-1)\varphi\big)\big] \end{pmatrix} \tag{2.23}$$
$$\text{für } \tfrac{\ell}{\pi}k = 1,2,\dots \text{ und } n \in \mathbf{Z},$$

$$\mathbf{w}^{\cos}_{\mathrm{grad}} = \frac{1}{2k}\big(\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}\big)$$
$$= \begin{pmatrix} I_n(kr)\sin(kx+n\varphi) \\ \frac{1}{2}\big[-I_{n+1}(kr)\cos\big(kx+(n+1)\varphi\big) - I_{n-1}(kr)\cos\big(kx+(n-1)\varphi\big)\big] \\ \frac{1}{2}\big[-I_{n+1}(kr)\sin\big(kx+(n+1)\varphi\big) + I_{n-1}(kr)\sin\big(kx+(n-1)\varphi\big)\big] \end{pmatrix} \tag{2.24}$$
$$\text{für } \tfrac{\ell}{\pi}k = 1,2,\dots \text{ und } n \in \mathbf{Z}.$$

Grundfunktionen vom Typ „rad". Für die folgenden Betrachtungen werden wir zwei weitere Grundfunktionen benötigen. Wir definieren sie wie folgt:

$$\mathbf{w}^{\sin}_{\mathrm{rad}} = \begin{pmatrix} 0 \\ +r^{n-1}\sin(n-1)\varphi \\ +r^{n-1}\cos(n-1)\varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } k=0 \text{ und } n \in \mathbf{N}, \tag{2.25}$$

$$\mathbf{w}^{\cos}_{\mathrm{rad}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r^{n-1}\cos(n-1)\varphi \\ +r^{n-1}\sin(n-1)\varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } k=0 \text{ und } n \in \mathbf{N}. \tag{2.26}$$

Verwendung der Grundfunktionen in Maple-Programmen. Im Maple-Modul `basicfunctions.maple` werden die genannten Grundfunktionen für Berechnungen bereitgestellt. RotRotS, RotRotC, RotS, RotC, GradS, GradC, RadS und RadC sind Maple-Funktionen $(\lambda_k, k, n, x, r, \varphi) \mapsto [u^1(x,r,\varphi), u^2(x,r,\varphi), u^3(x,r,\varphi)]$. Sie werden für einfache Berechnungen mit Grundfunktionen benutzt.

Für aufwendigere Berechnungen wird eine *Listenrepräsentation* der Grundfunktionen verwendet. Jede Komponente einer Grundfunktion ist eine Summe von Produkten eines r-abhängigen Terms mit einer trigonometrischen Funktion, deren Argument eine Linearkombination von x und φ ist. Diese Produkte werden in Maple durch 5-Tupel repräsentiert:

$$[\alpha, \mathrm{tr}, \beta, \gamma, R(r)] \longleftrightarrow \alpha\,\mathrm{tr}(\beta x + \gamma\varphi)R(r); \tag{2.27}$$

Listen solcher Tupel repräsentieren dann eine Summe der beschriebenen Produkte, also eine Komponente der Grundfunktion.

Maple-Prozeduren, welche Listenrepräsentationen anstelle der zusammengesetzten Funktionen liefern, sind durch das Präfix X gekennzeichnet. Die Prozeduren XDiffx, XDiffr und XDiffphi operieren auf Listenrepräsentationen; sie bestimmen die Ableitung nach x, r bzw. φ.

2.3 Eigenfunktionen nach Rummler

Rummler [Rum97] untersucht das Eigenwertproblem (2.1) und betrachtet Lösungen der Gestalt

$$\mathbf{u}_{kn}(x,r,\varphi) = \mathbf{u}_{kn}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}, \tag{2.28a}$$

$$p_{kn}(x,r,\varphi) = p_{kn}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \quad \text{mit } n \in \mathbf{Z} \text{ und } k \in \frac{\pi}{\ell}\mathbf{Z}. \tag{2.28b}$$

Rummler unterscheidet nun vier Fälle für die Werte von k und n; in jedem löst er das Problem (2.1). Wir überführen die erhaltenen Lösungen mittels (2.11) in eine Darstellung mit kartesischen Komponenten und sind dann in der Lage, die Lösungen als Linearkombinationen der im vorherigen Abschnitt eingeführten Grundfunktionen darzustellen.

Der Fall $n = k = 0$. In diesem Fall gibt es zwei Typen von Lösungen,

$$\mathbf{u}_1(x,r,\varphi) = J_0(\lambda_k r)\mathbf{e}_x \quad \text{für } \lambda_k \text{ mit } J_0(\lambda_k) = 0 \tag{2.29a}$$

und

$$\mathbf{u}_2(x,r,\varphi) = J_1(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi \quad \text{für } \lambda_k \text{ mit } J_1(\lambda_k) = 0. \tag{2.29b}$$

Die Bedingungen für λ_k sind durch die homogenen Randbedingungen auf dem Rohrmantel ($r = 1$) begründet.

Die Lösungen sind (bis auf Vorzeichen) zwei Grundfunktionen:

$$\mathbf{u}_1 = J_0(\lambda_k r)\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} J_0(\lambda_k r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{w}^{\sin}_{\mathrm{rot\,rot}}, \tag{2.30a}$$

$$\mathbf{u}_2 = J_1(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -J_1(\lambda_k r)\sin\varphi \\ J_1(\lambda_k r)\cos\varphi \end{pmatrix} = -\mathbf{w}^{\sin}_{\mathrm{rot}}. \tag{2.30b}$$

Der Fall $n \neq 0$, $k = 0$. Auch in diesem Fall erhält man zwei Lösungstypen,

$$\mathbf{u}_1(x,r,\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} J_n(\lambda_k r)\mathbf{e}_x \quad \text{für } \lambda_k \text{ mit } J_n(\lambda_k) = 0 \tag{2.31}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(x,r,\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\Bigg(&|n| \left[\frac{1}{\lambda} r^{|n|-1} - \frac{J_n(\lambda_k r)}{\lambda J_n(\lambda_k) r}\right]\mathbf{e}_r \\ &+ in\left[\frac{1}{\lambda} r^{|n|-1} - \frac{J_{n-1}(\lambda_k r) - J_{n+1}(\lambda_k r)}{2\,|n|\,\lambda_k J_n(\lambda_k)}\right]\mathbf{e}_\varphi\Bigg) \end{aligned} \tag{2.32}$$

für λ_k mit $J_{|n|+1}(\lambda_k) = 0$.

Die komplexwertigen Felder werden wie im vorangegangenen Abschnitt durch Linearkombination in reellwertige Felder überführt. Seien dazu $n > 0$ und $\tilde{\mathbf{u}}_1$ bzw. $\tilde{\mathbf{u}}_2$ die zu $-n$ gehörige Lösungen. Es gilt dann

$$\frac{1}{2}\big(\mathbf{u}_1 + (-1)^n \tilde{\mathbf{u}}_1\big) = \begin{pmatrix} J_n(\lambda_k r)\cos n\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{w}^{\sin}_{\mathrm{rot\,rot}}, \tag{2.33a}$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\mathbf{u}_1 - (-1)^n \tilde{\mathbf{u}}_1\big) = \begin{pmatrix} J_n(\lambda_k r)\sin n\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{w}^{\cos}_{\mathrm{rot\,rot}}. \tag{2.33b}$$

Die additiven Komponenten der Lösungen des Typs $\mathbf{u}_2$ betrachten wir zunächst getrennt; es gilt für die erste Komponente

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}(\tfrac{n}{\lambda}r^{n-1}\mathbf{e}_r + \mathrm{i}nr^{n-1}\mathbf{e}_\varphi) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}(\tfrac{n}{\lambda}r^{n-1}\mathbf{e}_r - \mathrm{i}nr^{n-1}\mathbf{e}_\varphi)\big) \\ &\quad= \frac{n}{\lambda}r^{n-1}\cos n\varphi\cdot\mathbf{e}_r - \frac{n}{\lambda}r^{n-1}\sin n\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi \\ &\quad= \frac{n}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ r^{n-1}(\cos n\varphi\cdot\cos\varphi + \sin n\varphi\cdot\sin\varphi) \\ r^{n-1}(\cos n\varphi\cdot\sin\varphi - \sin n\varphi\cdot\cos\varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad= \frac{n}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ r^{n-1}\cos(n-1)\varphi \\ -r^{n-1}\sin(n-1)\varphi \end{pmatrix} = -\frac{n}{\lambda}\cdot\mathbf{w}^{\cos}_{\mathrm{rad}} \end{aligned} \tag{2.34a}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}(\tfrac{n}{\lambda}r^{n-1}\mathbf{e}_r + \mathrm{i}nr^{n-1}\mathbf{e}_\varphi) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}(\tfrac{n}{\lambda}r^{n-1}\mathbf{e}_r - \mathrm{i}nr^{n-1}\mathbf{e}_\varphi)\big) \\ &\quad= \frac{n}{\lambda}r^{n-1}\sin n\varphi\cdot\mathbf{e}_r + \frac{n}{\lambda}r^{n-1}\cos n\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi \\ &\quad= \frac{n}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ r^{n-1}(\sin n\varphi\cdot\cos\varphi - \cos n\varphi\cdot\sin\varphi) \\ r^{n-1}(\sin n\varphi\cdot\sin\varphi + \cos n\varphi\cdot\cos\varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad= \frac{n}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ r^{n-1}\sin(n-1)\varphi \\ r^{n-1}\cos(n-1)\varphi \end{pmatrix} = \frac{n}{\lambda}\cdot\mathbf{w}^{\sin}_{\mathrm{rad}}. \end{aligned} \tag{2.34b}$$

Die zweite Komponente schreiben wir unter Benutzung der Rekursionsformeln (2.12a) in der Form

$$\begin{aligned} &-|n|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\frac{J_n(\lambda_k r)}{\lambda J_n(\lambda_k)r}\mathbf{e}_r - \mathrm{i}n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\frac{J_{n-1}(\lambda_k r) - J_{n+1}(\lambda_k r)}{2\,|n|\,\lambda_k J_n(\lambda_k)}\mathbf{e}_\varphi \\ &= -\frac{\operatorname{sgn} n}{2\lambda_k J_n(\lambda_k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\,\big(\big[J_{n-1}(\lambda_k r) + J_{n+1}(\lambda_k r)\big]\mathbf{e}_r + \mathrm{i}\big[J_{n-1}(\lambda_k r) - J_{n+1}(\lambda_k r)\big]\mathbf{e}_\varphi\big) \\ &= -\frac{\operatorname{sgn} n}{2\lambda_k J_n(\lambda_k)}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r) \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r) - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{i}\frac{\operatorname{sgn} n}{\lambda J_n(\lambda_k)}\nabla\times(\mathbf{e}_x a). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Indem wir die Definition (2.21, 2.22) der Grundfunktionen $\mathbf{w}_{\mathrm{rot}}^{\cos}$ und $\mathbf{w}_{\mathrm{rot}}^{\sin}$ als Linearkombinationen von Feldern der Gestalt $\nabla \times (\mathbf{e}_x a)$ beachten, erhalten wir nun insgesamt:

$$\frac{1}{2}\big(\mathbf{u}_2 + \tilde{\mathbf{u}}_2\big) = -\frac{n}{\lambda}\mathbf{w}_{\mathrm{rad}}^{\cos} - \frac{1}{\lambda_k J_n(\lambda_k)}\mathbf{w}_{\mathrm{rot}}^{\cos}, \tag{2.36a}$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\mathbf{u}_2 - \tilde{\mathbf{u}}_2\big) = \frac{n}{\lambda}\mathbf{w}_{\mathrm{rad}}^{\sin} + \frac{1}{\lambda_k J_n(\lambda_k)}\mathbf{w}_{\mathrm{rot}}^{\sin}. \tag{2.36b}$$

Der Fall $n = 0$, $k \neq 0$. In diesem Fall erhält Rummler die Eigenfunktionen

$$\mathbf{u}_1(x, r, \varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} J_1(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi \quad \text{für } \lambda_k \text{ mit } J_1(\lambda_k) = 0 \tag{2.37}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2(x, r, \varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\bigg(&\mathrm{i}\frac{k}{\lambda}\bigg[I_0(|k|\,r) - \frac{I_0(|k|)J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)}\bigg]\mathbf{e}_x \\ &+ \frac{|k|}{\lambda}\bigg[I_1(|k|\,r) - \frac{I_1(|k|)J_1(\lambda_k r)}{J_1(\lambda_k)}\bigg]\mathbf{e}_r\bigg)\end{aligned} \tag{2.38}$$

für Lösungen λ_k der Gleichung

$$kI_0(k)J_1(\lambda_k) = \lambda_k I_1(k)J_0(\lambda_k). \tag{2.39}$$

Wir identifizieren diese Funktionen als Rotation,

$$\mathbf{u}_1(x, r, \varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} J_1(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\begin{pmatrix} 0 \\ -J_1(\lambda_k r)\sin\varphi \\ J_1(\lambda_k r)\cos\varphi \end{pmatrix} = \nabla \times (\mathbf{e}_x a), \tag{2.40}$$

bzw. als eine Linearkombination eines Gradienten und eines rot-rot-Feldes,

$$\mathbf{u}_2(x, r, \varphi) = \frac{1}{\lambda}\nabla c - \mathrm{i}\frac{kI_0(k)}{\lambda\lambda_k^2 J_0(\lambda_k)}\nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_x b). \tag{2.41}$$

Daraus erhalten wir durch die übliche Linearkombination eine Darstellung in den reellwertigen Grundfunktionen.

Der Fall $n \neq 0$, $k \neq 0$. In diesem Fall gibt es nur einen Typ von Lösung,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, r, \varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\Big(&\Big[a_x J_n(\lambda_k r) + c_1 \mathrm{i}\tfrac{k}{\lambda} I_n(|k|\,r)\Big]\mathbf{e}_x \\ &+ \Big[a_x \mathrm{i}\tfrac{k}{\lambda_k} J_{n-1}(\lambda_k r) + a_r \tfrac{1}{r} J_n(\lambda_k r) \\ &\quad + c_1 \tfrac{|k|}{2\lambda}\big(I_{n-1}(|k|\,r) + I_{n+1}(|k|\,r)\big)\Big]\mathbf{e}_r \\ &+ \Big[-a_x \tfrac{k}{\lambda_k} J_{n-1}(\lambda_k r) + a_r \mathrm{i}\tfrac{\lambda_k}{2n}\big(J_{n-1}(\lambda_k r) - J_{n+1}(\lambda_k r)\big) \\ &\quad + c_1 \mathrm{i}\tfrac{|k|}{2\lambda}\big(I_{n-1}(|k|\,r) - I_{n+1}(|k|\,r)\big)\Big]\mathbf{e}_\varphi\Big).\end{aligned} \tag{2.42}$$

Hier stehen neben λ_k drei Koeffizienten, a_x, a_r und c_1, zur Verfügung, um eine Lösung zu erhalten, die die Randbedingungen befriedigt. In der Tat müssen a_x, a_r und c_1

einem linearen Gleichungssystem genügen, welches nur für charakteristische Werte λ_k nichttriviale Lösungen gestattet.

Zunächst identifizieren wir die Lösung als eine Kombination unserer Grundfunktionen. Die a_x-Komponente besitzt die Darstellung

$$
\begin{aligned}
&a_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\left(J_n(\lambda_k r)\mathbf{e}_x + \mathrm{i}\tfrac{k}{\lambda_k}J_{n-1}(\lambda_k r)\mathbf{e}_r - \tfrac{k}{\lambda_k}J_{n-1}(\lambda_k r)\mathbf{e}_\varphi\right)\\
&= a_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\begin{pmatrix} J_n(\lambda_k r)\\ \mathrm{i}\frac{k}{\lambda_k}J_{n-1}(\lambda_k r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ -\frac{k}{\lambda_k}J_{n-1}(\lambda_k r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix}\\
&= a_x \frac{1}{\lambda_k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\begin{pmatrix} \lambda_k^2 J_n(\lambda_k r)\\ \mathrm{i}\frac{k\lambda_k}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r)\right)\\ \frac{k\lambda_k}{2}\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r)\right)\end{pmatrix}\\
&\quad + a_x \frac{k}{\lambda_k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\begin{pmatrix} 0\\ \mathrm{i}\frac{\lambda_k}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r)\right)\\ \frac{\lambda_k}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}J_{n+1}(\lambda_k r) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}J_{n-1}(\lambda_k r)\right)\end{pmatrix}\\
&= a_x \frac{1}{\lambda_k^2}\nabla\times\nabla\times(\mathbf{e}_x b) + a_x\frac{k}{\lambda_k^2}\nabla\times(\mathbf{e}_x a).
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Die a_r-Komponente können wir wie in (2.35) als Rotation von $\mathbf{e}_x a$ identifizieren:

$$
\begin{aligned}
&a_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\left(\tfrac{1}{r}J_n(\lambda_k r)\mathbf{e}_r + \mathrm{i}\tfrac{\lambda_k}{2n}\left[J_{n-1}(\lambda_k r) - J_{n+1}(\lambda_k r)\right]\mathbf{e}_\varphi\right)\\
&= a_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\tfrac{\lambda_k}{2n}\left(\left[J_{n-1}(\lambda_k r) + J_{n+1}(\lambda_k r)\right]\mathbf{e}_r + \mathrm{i}\left[J_{n-1}(\lambda_k r) - J_{n+1}(\lambda_k r)\right]\mathbf{e}_\varphi\right)\\
&= -a_r\mathrm{i}\tfrac{\lambda_k}{2n}\nabla\times(\mathbf{e}_x a).
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Die c_1-Komponente ist das Gradientenfeld:

$$
\begin{aligned}
&c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\Big(\mathrm{i}\tfrac{k}{\lambda}I_n(|k|\,r)\mathbf{e}_x + \tfrac{|k|}{2\lambda}\left[I_{n-1}(|k|\,r) + I_{n+1}(|k|\,r)\right]\mathbf{e}_r\\
&\qquad + \mathrm{i}\tfrac{|k|}{2\lambda}\left[I_{n-1}(|k|\,r) - I_{n+1}(|k|\,r)\right]\mathbf{e}_\varphi\Big)\\
&= c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mathrm{i}kI_n(|k|\,r)\\ \frac{|k|}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}I_{n-1}(|k|\,r) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}I_{n+1}(|k|\,r)\right)\\ \mathrm{i}\frac{|k|}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}I_{n-1}(|k|\,r) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}I_{n+1}(|k|\,r)\right)\end{pmatrix} = c_1\tfrac{1}{\lambda}\nabla c.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Wir setzen nun eine beliebige Linearkombination der beteiligten reellwertigen Grundfunktionen an,

$$
\mathbf{u}^* = \alpha\mathbf{w}^*_{\mathrm{rot\,rot}} + \beta\mathbf{w}^*_{\mathrm{rot}} + \gamma\mathbf{w}^*_{\mathrm{grad}},
\tag{2.46}
$$

wobei $* \in \{\sin,\cos\}$ sei. Aus der Randbedingung $\mathbf{u}^*\big|_{r=1} = \mathbf{0}$ erhalten wir ein Gleichungssystem für die Koeffizienten,

$$
\begin{aligned}
J_n(\lambda_k)\alpha \qquad\qquad\qquad\quad &+ I_n(k)\gamma = 0,\\
\tfrac{k}{\lambda_k}J_{n+1}(\lambda_k)\alpha + J_{n+1}(\lambda_k)\beta &+ I_{n+1}(k)\gamma = 0,\\
-\tfrac{k}{\lambda_k}J_{n-1}(\lambda_k)\alpha + J_{n-1}(\lambda_k)\beta &+ I_{n-1}(k)\gamma = 0.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Dieses Gleichungssystem besitzt nichttriviale Lösungen α, β und γ genau dann, wenn die Determinante der linken Seite verschwindet; dies geschieht nur für gewisse charakteristische Werte λ_k. Die Lösungen besitzen dann modulo Homogenität die Gestalt

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{I_{n+1}(k) J_n(\lambda_k)}{I_n(k) J_{n+1}(\lambda_k)}, \quad \gamma = -\frac{J_n(\lambda_k)}{I_n(k)}. \tag{2.48}$$

2.4 Berechnung der reellwertigen Eigenfunktionen

Die Bestimmung der reellwertigen Eigenfunktionen erfolgt durch das Maple-Programm `create-eigenfunctions.maple`. Es werden alle Eigenfunktionen zu Eigenwerten bis zu einer vorgegebenen Schranke $\lambda_{\max}$ berechnet.

Berechnung der Nullstellen der transzendenten Gleichungen. Die Prozedur NextRoot() verwendet die vordefinierte Maple-Funktion fsolve(), um die nächstgrößere reelle Nullstelle λ_k einer Funktion numerisch zu bestimmen. Bei der Implementierung von NextRoot() mußte beachtet werden, daß Maple das übergebene Suchintervall nicht streng befolgt.

Für jede der zu lösenden transzendenten Gleichungen wird nun eine Prozedur mit Parametern k, n und index definiert, welche die index-te Lösung der Gleichung liefert. Diese Prozeduren, im folgenden als rootproc angesprochen, sind rekursiv unter Benutzung von NextRoot() definiert; option remember verhindert dabei die erneute Berechnung bereits bekannter Nullstellen.

Die Prozedur AllRoots bestimmt schließlich für eine rootproc die Menge aller Tripel $[\lambda_k, n, \kappa = \frac{\ell}{\pi} k]$ mit $\lambda = k^2 + \lambda_k^2 \leq \lambda_{\max}$, für die λ_k eine Lösung der bezeichneten transzendenten Gleichung mit Parametern n und $k = \frac{\pi}{\ell}\kappa$ ist.

Erzeugung der Liste der Eigenfunktionen. Die Eigenfunktionen sind in Maple in der Variablen EigenfunctionList, einer Liste von 13-Tupeln der Gestalt

$$[\lambda, \lambda_k, n, \kappa = \tfrac{\ell}{\pi} k, k, \alpha^{\sin}_{\mathrm{rot\,rot}}, \alpha^{\cos}_{\mathrm{rot\,rot}}, \alpha^{\sin}_{\mathrm{rot}}, \alpha^{\cos}_{\mathrm{rot}}, \alpha^{\sin}_{\mathrm{grad}}, \alpha^{\cos}_{\mathrm{grad}}, \alpha^{\sin}_{\mathrm{rad}}, \alpha^{\cos}_{\mathrm{rad}}] \tag{2.49}$$

gespeichert, wobei die $\alpha^{\cdot}_{\cdot}$ die Koeffizienten der entsprechenden Grundfunktionen sind. Die Prozedur TupleToFunction() aus dem Modul `eigenfunctions.maple` überführt ein solches Tupel in eine Maple-Funktion $(x, r, \varphi) \mapsto [u^1(x, r, \varphi), u^2(x, r, \varphi), u^3(x, r, \varphi)]$.

Zur Erzeugung der Liste der Eigenfunktionen werden die vier Fälle aus dem vorhergehenden Abschnitt getrennt behandelt; für jede Nullstelle λ_k der zu betrachtenden transzendenten Gleichung werden ein oder mehrere Koeffiziententupel erzeugt und in die Liste eingefügt.

Überprüfung der Eigenfunktionen. Die erzeugten Eigenfunktionen werden den folgenden Überprüfungen unterzogen:

Test auf Randwerte. An willkürlich gewählten Stellen auf dem Mantel des Rohres wird der Wert der Vektorfelder berechnet. Das Maximum der ℓ_1-Normen dieser Werte wird als *maximale Abweichung der Randwerte* (von den vorgeschriebenen Nullrandbedingungen) berichtet.

Test auf Divergenzfreiheit. Die Divergenz der Vektorfelder, in zylindrischen Argumenten und kartesischen Komponenten gegeben durch

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_1} u^1 + \cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} u^2 - \sin\varphi \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} u^2 + \sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} u^3 + \cos\varphi \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} u^3, \quad (2.50)$$

wird in Maple symbolisch berechnet. Anschließend wird sie an willkürlich gewählten Stellen im Rohr ausgewertet; das Maximum der Beträge dieser Werte wird als *maximale Abweichung beim Divergenztest* berichtet.

Normierung. Die $L_2(\Omega_\ell)$-Normen der Eigenfunktionen werden berechnet. Die Integration über Ω_ℓ wird dabei von der Maple-Prozedur EigenfunctionScalar() ausgeführt; sie kann wahlweise aus dem Modul `simple-integration.maple` oder dem Modul `bessel-integration.maple` importiert werden. Im ersteren Fall wird die Integration mit den gewöhnlichen Maple-Methoden ausgeführt, und zwar symbolisch in x- und φ-Richtung, numerisch in r-Richtung. Im letzteren Fall wird die Integration mit Methoden ausgeführt, welche in Abschnitt 3.2 diskutiert werden.

Die Koeffizienten der Grundfunktionen werden dann durch die berechnete Norm der Eigenfunktion dividiert.

Sortierung. Die Eigenfunktionen werden mit der Maple-Prozedur sort() nach den folgenden Kriterien sortiert:

1. Sortierung nach aufsteigenden Eigenwerten λ;
2. bei gleichen Eigenwerten nach aufsteigenden n;
3. bei gleichen n nach aufsteigenden k.

Diese Kriterien sind in der Prozedur tupleCompare() implementiert. Zwei Eigenwerte werden hier als gleich angesehen, wenn ihre Differenz höchstens 10^{-7} beträgt. Dies sichert, daß Rundungsfehler nicht die Sortierordnung stören.

Speicherung. Nach Abschluß der Generierung wird die Liste der Eigenfunktionen in der Textdatei `eigenfunctions.data` gespeichert. Diese besitzt das folgende Format:

1. Zeilen, die mit einem Hash-Zeichen (`#`) beginnen, enthalten Kommentare.
2. Alle anderen Zeilen bestehen aus 13 Dezimalzahlen, welche durch Whitespace voneinander getrennt sind.

Zuerst werden der Längenparameter ℓ und die Eigenwertschranke $\lambda_{\max}$ als Kommentare in die Datei geschrieben. Für jede der Eigenfunktionen werden dann die Einträge des 13-Tupels, welches die Eigenfunktion repräsentiert, in der natürlichen Reihenfolge in einer Zeile abgelegt. Abschließend werden die Ergebnisse der Tests als Kommentare geschrieben.

Funktionen zum Einlesen der Eigenfunktionen. Das Modul `eigenfunctions.maple` definiert die Prozedur ReadTable(), welche die Eigenfunktionen wieder aus der Textdatei `eigenfunctions.data` liest und sie als Liste in der Variablen EigenfunctionList speichert.

Zur Verwendung der Eigenfunktionenliste in C-Programmen wird in `dop.c` die Funktion `read_table()` definiert; die 13-Tupel sind hier durch eine `struct Eigentupel` repräsentiert.

3 Galerkin-Approximation

3.1 Grundlagen

Sei $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_N\} \subset L_2(\Omega_\ell)^3$ ein Orthonormalsystem von Eigenfunktionen des Stokes-Operators $-\pi_\ell\Delta$. Als endlichdimensionalen Galerkin-Ansatzraum wählen wir den Vektorraum $W_N := \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_N \rangle < L_2(\Omega_\ell)^3$, d. h., wir betrachten Vektorfelder der Gestalt

$$\hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} g_j(t)\mathbf{w}_j(\mathbf{x}). \tag{3.1}$$

Durch skalare Multiplikation der partiellen Differentialgleichung (1.9a) mit Testfunktionen aus W_N im Sinne des $L_2(\Omega_\ell)^3$ gehen wir zur schwachen Formulierung über. Die bei der skalaren Multiplikation mit einer Basisfunktion $\mathbf{w}_i$ auftretenden Integrale vereinfachen sich wie folgt: Zunächst gilt

$$\int\limits_{\Omega_\ell} \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega_\ell} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{N} g_j(t)\mathbf{w}_j(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} g_i(t), \tag{3.2}$$

da die $\mathbf{w}_j$ ein Orthonormalsystem bilden. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Omega_\ell} \Delta_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i(t, \mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} &= -\int\limits_{\Omega_\ell} \left(\Delta_{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^{N} g_j(t)\mathbf{w}_j(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= -\sum_{j=1}^{N} g_j(t) \int\limits_{\Omega_\ell} \Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{w}_j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \sum_{j=1}^{N} g_j(t) \int\limits_{\Omega_\ell} \lambda_j \mathbf{w}_j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \lambda_i g_i(t); \end{aligned} \tag{3.3}$$

hier wurde benutzt, daß die $\mathbf{w}_j$ Eigenfunktionen von $-\pi_\ell\Delta$ sind. (Die skalare Multiplikation mit $\mathbf{w}_i \in S_\ell^2 \subseteq S_\ell$ übernimmt dabei die orthogonale Projektion auf S_ℓ: Es ist $\mathbf{w}_i \cdot \Delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_i \cdot \pi_\ell \Delta_{\mathbf{x}}$.) – Die trilinearen Terme vereinfachen sich nach Integration zu Bilinearformen in den g_j; die Koeffizienten sind nur von ℓ abhängig:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega_\ell} \sum_{m=1}^{3} \hat{u}^m(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_m} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int\limits_{\Omega_\ell} \sum_{m=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{N} g_j(t) w_j^m(\mathbf{x}) \right) \left(\sum_{k=1}^{N} g_k(t) \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \sum_{j,k=1}^{N} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{3} \int\limits_{\Omega_\ell} w_j^m(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)}_{=:b_{ijk}} g_j(t) g_k(t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ebenso vereinfachen sich die restlichen Terme zu Linearformen in den g_j, deren Koeffizienten wiederum nur von ℓ abhängig sind:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\ell} \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{u}^3(t,\mathbf{x}) \\ \hat{u}^2(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\Bigg(\int\limits_{\Omega_\ell} \big(-w_j^3(\mathbf{x})w_i^2(\mathbf{x}) + w_j^2(\mathbf{x})w_i^3(\mathbf{x})\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \Bigg)}_{=:q_{1ij}^{\cos}} g_j(t),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\ell} \Big(-x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x}) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x}) \Big) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\Bigg(\int\limits_{\Omega_\ell} \Big(-x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{w}_j(\mathbf{x}) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{w}_j(\mathbf{x}) \Big) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \Bigg)}_{=:q_{2ij}^{\cos}} g_j(t),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\ell} \begin{pmatrix} -2\big(x_2\hat{u}^2(t,\mathbf{x}) + x_3\hat{u}^3(t,\mathbf{x})\big) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\Bigg(-2 \int\limits_{\Omega_\ell} \big(x_2 w_j^2(\mathbf{x}) + x_3 w_j^3(\mathbf{x})\big) w_i^1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \Bigg)}_{=:q_{1ij}^{\sin}} g_j(t),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\ell} (1 - x_2^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\Bigg(\int\limits_{\Omega_\ell} (1 - x_2^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{w}_j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \Bigg)}_{=:q_{2ij}^{\sin}} g_j(t).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Bezeichnung der Koeffizienten folgt [RN95]. – Mit ihnen erhalten wir ein äquivalentes System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Koeffizientenfunktionen g_i,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_i(t) = &- \lambda_i g_i(t) - Re \cdot \sum_{j,k=1}^{N} b_{ijk} g_j(t) g_k(t) \\
&- Re \cdot \cos\psi \cdot \Bigg(\sum_{j=1}^{N} \big(q_{1ij}^{\cos} + q_{2ij}^{\cos}\big) g_j(t) \Bigg) \\
&- Re \cdot \sin\psi \cdot \chi_* \Bigg(\sum_{j=1}^{N} \big(q_{1ij}^{\sin} + q_{2ij}^{\sin}\big) g_j(t) \Bigg) \quad \text{für } i = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{3.9a}$$

Das Anfangswertproblem wird vervollständigt durch die Bedingungen

$$g_i(0) = g_{0,i} \quad \text{für } i = 1, \ldots, N, \tag{3.9b}$$

wobei $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} g_{0,i} \mathbf{w}_i(\mathbf{x})$ ist.

3.2 Berechnung der Koeffizienten b_{ijk} und $q^{\cdot}_{\cdot ij}$

Ist N die Dimension des Ansatzraumes, so sind $O(N^3)$ viele Koeffizienten b_{ijk} und $O(N^2)$ viele Koeffizienten $q^{\cdot}_{\cdot ij}$ zu bestimmen. Es zeigt sich, daß die Systeme aber sehr schwach besetzt sind. Deshalb formulieren wir hinreichende Bedingungen für das Verschwinden von Koeffizienten, welche bereits in den äußeren Schleifen des Berechnungsverfahrens überprüft werden können, um so die Rechenzeiten zu senken.

Die *Parität* $\operatorname{par} f$ einer Funktion $\overline{\Omega_\ell} \ni (x, r, \varphi) \mapsto f(x, r, \varphi) \in \mathbf{R}$, die nicht identisch verschwindet, sei wie folgt definiert:

$$\operatorname{par} f = \begin{cases} +1, & \text{falls } f(x,r,\varphi) = f(-x,r,-\varphi) \text{ für alle } (x,r,\varphi), \\ -1, & \text{falls } f(x,r,\varphi) = -f(-x,r,-\varphi) \text{ für alle } (x,r,\varphi), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.10}$$

(Die Parität gibt somit an, ob f bezüglich x und φ eine gerade oder ungerade Funktion ist.) Die *Parität* $\operatorname{par} \mathbf{u}$ eines Vektorfeldes $\overline{\Omega_\ell} \ni (x, r, \varphi) \mapsto \mathbf{u}(x, r, \varphi) \in \mathbf{R}^3$ sei die Parität seiner zweiten Komponentenfunktion.

Alle nichtverschwindenden Eigenfunktionenkomponenten haben Parität $+1$ oder -1, siehe Abschnitt 2.3. Durch Mißbrauch der Terminologie werden wir identisch verschwindenden Funktionen eine beliebige Parität ± 1 zuordnen. Dann gilt für Eigenfunktionen $\mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)^\top$:

$$\operatorname{par} w^1 = -\operatorname{par} \mathbf{w}, \quad \operatorname{par} w^2 = +\operatorname{par} \mathbf{w}, \quad \operatorname{par} w^3 = -\operatorname{par} \mathbf{w}. \tag{3.11}$$

Berechnung der $q^{\cos}_{1ij}$. Die in Gleichung (3.5) definierten Koeffizienten $q^{\cos}_{1ij}$ sind schiefsymmetrisch bezüglich i und j:

$$q^{\cos}_{1ij} = \int_{\Omega_\ell} \left(-w_j^3 w_i^2 + w_j^2 w_i^3\right) \mathrm{d}\mathbf{x} = -q^{\cos}_{1ji}. \tag{3.12}$$

Die auftretenden Komponentenfunktionen $w^2_{\cdot}$ und $w^3_{\cdot}$ sind bezüglich x vom Typ $\operatorname{tr} kx$ und bezüglich φ vom Typ $\operatorname{tr}(n \pm 1)\varphi$. Wegen der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen $\{\operatorname{tr} kx\}_{k \in \frac{\pi}{\ell}\mathbf{N}_0}$ im Raum $L_2(-\ell, \ell)$ bzw. der Orthogonalität der $\{\operatorname{tr} n\varphi\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ im Raum $L_2(0, 2\pi)$ wird $q^{\cos}_{1ij}$ verschwinden, wenn

$$|k_i| \neq |k_j| \quad \text{oder} \quad \big||n_i| - |n_j|\big| \notin \{0, 2\} \tag{3.13}$$

ist. Weiterhin besitzen die Summanden des Integranden die Parität

$$\operatorname{par}(w_j^3 w_i^2) = -\operatorname{par} \mathbf{w}_j \cdot \operatorname{par} \mathbf{w}_i = \operatorname{par}(w_j^2 w_i^3). \tag{3.14}$$

Da sich das Integral über das zentralsymmetrische Gebiet Ω_ℓ erstreckt, wird $q^{\cos}_{1ij}$ verschwinden, wenn ein ungerader Integrand vorliegt, d. h.

$$\operatorname{par} \mathbf{w}_j \cdot \operatorname{par} \mathbf{w}_i = +1 \tag{3.15}$$

gilt. In diesen Fällen muß die Integration also nicht mehr ausgeführt werden.

Berechnung der $q_{2ij}^{\cos}$. Die in Gleichung (3.6) definierten Koeffizienten $q_{2ij}^{\cos}$ vereinfachen sich beim Übergang zu zylindrischen Ortskoordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned}
q_{2ij}^{\cos} &= \int_{\Omega_\ell} \Big(-x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{w}_j + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{w}_j\Big) \cdot \mathbf{w}_i \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= -\int_{\Omega_\ell} r\sin\varphi \cdot \Big(\cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{w}_j - \sin\varphi \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_j\Big) \cdot \mathbf{w}_i \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega_\ell} r\cos\varphi \cdot \Big(\sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{w}_j + \cos\varphi \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_j\Big) \cdot \mathbf{w}_i \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega_\ell} \Big(\sin^2\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i + \cos^2\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i\Big) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega_\ell} \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \,\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Aus dieser Darstellung lesen wir zudem ab, daß die $q_{2ij}^{\cos}$ schiefsymmetrisch bezüglich i und j sind:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\ell} \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{-\ell}^{\ell}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \,\mathrm{d}\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\ell}^{\ell}\int_0^1 \Big(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \mathbf{w}_j \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_i \,\mathrm{d}\varphi\Big) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\ell}^{\ell}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \,\mathrm{d}\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega_\ell} \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \,\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Die Komponentenfunktionen sind bezüglich x vom Typ $\operatorname{tr} kx$. Bezüglich φ sind die ersten Komponenten vom Typ $\operatorname{tr} n\varphi$, die zweiten und dritten vom Typ $\operatorname{tr}(n \pm 1)\varphi$; im Skalarprodukt werden Produkte gleicher Komponenten aufsummiert. Deshalb wird auch $q_{2ij}^{\cos}$ verschwinden, wenn (3.13) gilt. Unter Beachtung von

$$\operatorname{par}\big(\tfrac{\partial}{\partial\varphi} f\big) = \operatorname{par}\big(\tfrac{\partial}{\partial x} f\big) = -\operatorname{par} f \tag{3.18}$$

erhält man zudem, daß der Integrand die Parität $-\operatorname{par}\mathbf{w}_i \cdot \operatorname{par}\mathbf{w}_j$ besitzt; daher wird $q_{2ij}^{\cos}$ verschwinden, wenn (3.15) erfüllt ist.

Berechnung der $q_{1ij}^{\sin}$. Die in Gleichung (3.7) definierten Koeffizienten $q_{1ij}^{\sin}$ besitzen die folgende Darstellung in zylindrischen Ortskoordinaten:

$$q_{1ij}^{\sin} = -2\int_{\Omega_\ell} \big(x_2 w_j^2 + x_3 w_j^3\big) w_i^1 \,\mathrm{d}\mathbf{x} = -2\int_{\Omega_\ell} r\big(\cos\varphi \cdot w_j^2 + \sin\varphi \cdot w_j^3\big) w_i^1 \,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.19}$$

Die Komponentenfunktionen w_j^2 und w_j^3 sind bezüglich φ vom Typ $\operatorname{tr}(n \pm 1)\varphi$; hingegen ist w_i^1 vom Typ $\operatorname{tr} n\varphi$. Wegen der Additionstheoreme der Gestalt

$$\operatorname{tr}\alpha \cdot \operatorname{tr}\beta = \tfrac{1}{2}\big(\pm \operatorname{tr}(\alpha+\beta) \tilde{\pm} \operatorname{tr}(\alpha-\beta)\big) \tag{3.20}$$

ist nun $\operatorname{tr}\varphi \cdot w_j^1$ vom Typ $\operatorname{tr}(n \pm 1)\varphi$. Bezüglich x sind die auftretenden Komponentenfunktionen vom Typ $\operatorname{tr} kx$. Weiterhin hat der Integrand die Parität $-\operatorname{par}\mathbf{w}_i \cdot \operatorname{par}\mathbf{w}_j$. Somit wird auch $q_{1ij}^{\sin}$ verschwinden, wenn die Bedingungen (3.13) oder (3.15) erfüllt sind.

Berechnung der $q_{2ij}^{\sin}$. Die in Gleichung (3.8) definierten Koeffizienten $q_{2ij}^{\sin}$ besitzen die folgende Darstellung in zylindrischen Ortskoordinaten:

$$q_{2ij}^{\sin} = \int\limits_{\Omega_\ell} (1 - x_2^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega_\ell} (1 - r^2) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.21}$$

Die $q_{2ij}^{\sin}$ sind schiefsymmetrisch in i und j:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_\ell} (1 - r^2) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\varphi \, (1 - r^2) r \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \Big|_{x=-\ell}^{\ell} - \int_{-\ell}^{\ell} \mathbf{w}_j \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}x \Big) \, \mathrm{d}\varphi \, (1 - r^2) r \, \mathrm{d}r \\
&= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\varphi \, (1 - r^2) r \, \mathrm{d}r \\
&= - \int\limits_{\Omega_\ell} (1 - r^2) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

In dieser Rechnung wurde ausgenutzt, daß die Eigenfunktionen in x-Richtung periodischen Randbedingungen genügen.

Mit der gleichen Begründung wie bei den $q_{2ij}^{\cos}$ verschwinden die Koeffizienten $q_{2ij}^{\sin}$, sobald die Bedingungen (3.13) oder (3.15) erfüllt sind.

Berechnung der b_{ijk}. Die in Gleichung (3.4) definierten Koeffizienten b_{ijk} sind schiefsymmetrisch bezüglich i und k, wie die folgende Rechnung zeigt: Für $m = 1, 2, 3$ integrieren wir zunächst über eine zur x_m-Achse parallele Strecke in Ω_ℓ,

$$\begin{aligned}
&\int w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}x_m \\
&= \int w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \big(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \big) \, \mathrm{d}x_m - \int w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_k \, \mathrm{d}x_m \\
&= \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial x_m} \big(w_j^m \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \big) \, \mathrm{d}x_m}_{(*)} - \int \frac{\partial}{\partial x_m} w_j^m \cdot \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}x_m - \int w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_k \, \mathrm{d}x_m;
\end{aligned} \tag{3.23}$$

hier verschwindet nun das Integral $(*)$ wegen der periodischen Randbedingungen im Fall $m = 1$ bzw. wegen der homogenen Randbedingungen in den Fällen $m = 2, 3$. Daher gilt

$$\int\limits_{\Omega_\ell} w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} = - \int\limits_{\Omega_\ell} \frac{\partial}{\partial x_m} w_j^m \cdot \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int\limits_{\Omega_\ell} w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_k \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{3.24}$$

und Summation über $m = 1,2,3$ liefert schließlich

$$
\begin{aligned}
b_{ijk} &= \sum_{m=1}^{3} \int\limits_{\Omega_\ell} w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= -\int\limits_{\Omega_\ell} (\nabla \cdot \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \sum_{m=1}^{3} \int\limits_{\Omega_\ell} w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_k \, \mathrm{d}\mathbf{x} = -b_{kji},
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

da die Eigenfunktionen divergenzfrei sind.

Die b_{ijk} besitzen die folgende Darstellung in zylindrischen Ortskoordinaten:

$$
\begin{aligned}
b_{ijk} &= \sum_{m=1}^{3} \int\limits_{\Omega_\ell} w_j^m \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int\limits_{\Omega_\ell} w_j^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad + \int\limits_{\Omega_\ell} \left(w_j^2 \cos\varphi + w_j^3 \sin\varphi \right) \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad + \int\limits_{\Omega_\ell} \left(-w_j^2 \sin\varphi + w_j^3 \cos\varphi \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, \mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Die hier auftretenden Integranden besitzen alle die Parität $\operatorname{par} \mathbf{w}_i \cdot \operatorname{par} \mathbf{w}_j \cdot \operatorname{par} \mathbf{w}_k$; daher werden die Koeffizienten b_{ijk} verschwinden, wenn

$$
\operatorname{par} \mathbf{w}_i \cdot \operatorname{par} \mathbf{w}_j \cdot \operatorname{par} \mathbf{w}_k = -1 \tag{3.27}
$$

gilt. Im ersten Integral ist w_j^1 vom Typ $\operatorname{tr} n_j \varphi$ und $\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i$ vom Typ $\operatorname{tr}(n_k \pm n_i)\varphi + \operatorname{tr}(n_k \pm n_i \pm 2)\varphi$. Daher verschwindet es, wenn

$$
\big| |n_j| - |n_k| + |n_i| \big| \notin \{0, \pm 2\} \quad \text{und} \quad \big| |n_j| - |n_k| - |n_i| \big| \notin \{0, \pm 2\} \tag{3.28}
$$

gelten. Im zweiten und dritten Integral ist $\operatorname{tr} \varphi \cdot w_j^m$ mit $m = 2,3$ vom Typ $\operatorname{tr} n_j \varphi + \operatorname{tr}(n_j \pm 2)\varphi$. Daher verschwinden diese, wenn

$$
\big| |n_j| - |n_k| + |n_i| \big| \notin \{0, \pm 2, \pm 4\} \quad \text{und} \quad \big| |n_j| - |n_k| - |n_i| \big| \notin \{0, \pm 2, \pm 4\} \tag{3.29}
$$

gelten. Weiterhin ist w_j^1 bezüglich x vom Typ $\operatorname{tr} k_j x$ und $\frac{\partial}{\partial *} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i$ mit $* \in \{x, r, \varphi\}$ vom Typ $\operatorname{tr}(k_k \pm k_i)x$, und somit wird b_{ijk} verschwinden, wenn

$$
\big| |k_j| - |k_k| \big| \neq |k_i| \tag{3.30}
$$

gilt.

Ferner sind die $\{b_{ijk}\}_{j,k}$ für festes i die Einträge der Matrix einer Bilinearform. Deshalb werden wir für die praktische Berechnung zu Koeffizienten $\{\tilde{b}_{ijk}\}_{j,k}$ mit

$$
\tilde{b}_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{für } j < k, \\ b_{ijk} & \text{für } j = k, \\ b_{ijk} + b_{ikj} & \text{für } j > k, \end{cases} \tag{3.31}
$$

welche die gleiche Bilinearform beschreiben, übergehen. Auf diese Weise verringert sich der Speicheraufwand für die Koeffizienten im besten Fall auf die Hälfte. Die Auswertung der Bilinearform vereinfacht sich zu

$$\sum_{j,k=1}^{N} b_{ijk} g_j(t) g_k(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{j} \tilde{b}_{ijk} g_j(t) g_k(t). \tag{3.32}$$

Anwendung von Additionstheoremen zur Integration in x- und φ-Richtung. Wir benutzen die folgenden Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen, um Produkte von Termen der Gestalt $\operatorname{tr}(kx + n\varphi)$ in Summen zu transformieren:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big), \tag{3.33a}$$
$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big), \tag{3.33b}$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big), \tag{3.33c}$$
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \tfrac{1}{2}\big(-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big). \tag{3.33d}$$

In den Eigenfunktionen treten Terme dieser Gestalt nur mit $k \in \frac{\pi}{\ell}\mathbf{Z}$ und $n \in \mathbf{Z}$ auf; diese Eigenschaft bleibt auch nach Anwendung der Additionstheoreme (3.33) erhalten. Daher gilt

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\ell}^{+\ell} \operatorname{tr}(kx + n\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 4\pi\ell, & \text{falls } \operatorname{tr} = \cos,\ k = 0 \text{ und } n = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.34}$$

Organisation der Berechnungen. Die Koeffizienten werden mit Maple-Programmen berechnet. Das Modul `create-coefficients.maple` stellt die Prozeduren CreateQ1S(), CreateQ2C() usw. bereit, welche alle Paare bzw. Tripel von Eigenfunktionen enumerieren und für diese die Koeffizienten berechnen lassen. Dabei werden die Symmetrieeigenschaften ausgenutzt. Die oben abgeleiteten hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden von Koeffizienten werden bereits an dieser Stelle überprüft. Da die Berechnung der b_{ijk} eine recht lange Rechenzeit erfordert, ist eine Zerlegung des Koeffizientenraums zum Zwecke der Parallelisierung vorgesehen.

Die nichtverschwindenden Koeffizienten werden in der Reihenfolge ihrer Berechnung in Textdateien `q1s.data`, `q2c.data` usw. geschrieben; die Zeilen einer solchen Textdatei sind entweder mit # beginnende Kommentarzeilen, oder sie bestehen aus den zwei bzw. drei Indizes eines Koeffizienten, gefolgt von seinem Wert.

Die eigentliche Berechnung eines Koeffizienten wird von Prozeduren aus dem Modul `bessel-integration.maple` ausgeführt. Die auftretenden Integranden sind Produkte von Summen; sie werden listengesteuert ausmultipliziert, bis Produkte von Termen der Gestalt (2.27) erhalten werden. Die Produkte der trigonometrischen Funktionen werden dann durch iterierte Anwendung der Additionstheoreme (3.33) in Summen überführt; deren Summanden werden in x- und φ-Richtung mit der einfachen Formel (3.34) integriert. Falls das Integral nicht verschwindet, wird noch die Integration in r-Richtung numerisch ausgeführt. Es wird option remember benutzt, um die Ergebnisse numerischer Integrationen zu speichern.

3.3 Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

Zur Lösung des Anfangswertproblems (3.9) wird das Verfahren Dormand–Prince 5(4), ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren, verwendet. Dieses wird in der Arbeit [Sch98] beschrieben. Die für diese Arbeit entwickelte Implementation `dopstok.c` wurde modifiziert, um die hier auftretenden Eingabedatenformate zu lesen; das geänderte Modul trägt den Namen `dop.c`.

Es gilt zu beachten, daß die b_{ijk}-Koeffizienten in bezüglich (i, j, k) lexikographischer Sortierordnung erwartet werden. Mittels des Standard-UNIX-Kommandos `sort` wird daher aus `b.data` die in dieser Weise sortierte Datei `b-ijk-sorted.data` hergestellt; letztere wird von `dop.c` eingelesen.

Die Anfangsdaten $g_{0,i}$ werden zeilenweise aus der Textdatei `g-initial.data` gelesen. Die Lösung wird in die Textdatei `g.data` geschrieben. Für jeden zur Ausgabe vorgesehenen Zeitpunkt t erscheint dort eine Zeile der Gestalt `time:` t, welcher N Zeilen mit den Werten $g_i(t)$ folgen.

A Aufstellung der Programmodule und Datendateien

Programmodule.

`basic-functions.maple` Bereitstellung der Grundfunktionen und ihrer Listenrepräsentation; siehe Seite 12.

`bessel-integration.maple` Berechnung der auftretenden Integrale durch listengesteuertes Ausmultiplizieren und Anwendung von trigonometrischen Additionstheoremen; siehe Seite 25.

`check-orthogonality.maple` Überprüfung der Orthogonalität der berechneten Eigenfunktionen.

`create-coefficients.maple` Berechnung der $q^{\cdot}_{\cdot ij}$- und b_{ijk}-Koeffizientensysteme; siehe Seite 25.

`create-eigenfunctions.maple` Berechnung der Eigenfunktionen; siehe Seite 17.

`dop.c` Lösung des Differentialgleichungssystems mit dem Dormand–Prince-Verfahren; siehe Seiten 18 und 26.

`eigenfunctions.maple` Einlesen der Eigenfunktionen; siehe Seite 18.

`simple-integration.maple` Berechnung der auftretenden Integrale mit den gewöhnlichen Maple-Prozeduren. (Dieses Modul wird in der normalen Rechnung nicht verwendet, da `bessel-integration.maple` wesentlich schneller arbeitet; es wurde benutzt, um die Korrektheit der dort implementierten Methoden zu überprüfen.)

Datendateien.

`b.data` Die b_{ijk}-Koeffizienten.

`b-ijk-sorted.data` Die b_{ijk}-Koeffizienten, lexikographisch sortiert nach (i, j, k); siehe Seite 26.

`eigenfunctions.data` Die Liste der Eigenfunktionen; siehe Seite 18.

`g.data` Die Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems an verschiedenen Zeitpunkten; siehe Seite 26.

`g-initial.data` Die Anfangsdaten für das gewöhnliche Differentialgleichungssystem; siehe Seite 26.

`globals.maple` In dieser Maple-Datei werden den Variablen ℓ und $\lambda_{\max}$ ihre Werte zugewiesen; die Datei sollte automatisch vom `Makefile` erstellt werden.

`q1c.data`, `q1s.data` Die $q^{\cos}_{1ij}$- und $q^{\sin}_{1ij}$-Koeffizienten; siehe Seite 25.

`q2c.data`, `q2s.data` Die $q^{\cos}_{2ij}$- und $q^{\sin}_{2ij}$-Koeffizienten; siehe Seite 25.

B Beispielrechnungen mit den ersten 114 Eigenfunktionen im Zylindergebiet der Länge $2\ell = 2 \times 2.69$

Es wurde eine Eigenwertschranke von $\lambda_{\max} = 50$ vorgegeben.

B.1 Eigenwerttafel

In der folgenden Tafel bezeichnet ν die Anzahl der Eigenfunktionen.

λ	λ_k	n	κ	k	ν	Typ
5.78318596	2.40482555	0	0	0.00000000	1	rot rot
14.00353173	3.55522038	±1	1	1.16787831	4	rot rot + rot + grad
14.68197064	3.83170597	0	0	0.00000000	1	rot
		1	0	0.00000000	2	rot rot
15.44219494	3.16013226	±1	2	2.33575662	4	rot rot + rot + grad
16.04591039	3.83170597	0	1	1.16787831	2	rot
20.13772963	3.83170597	0	2	2.33575662	2	rot
20.75026890	2.91115289	±1	3	3.50363493	4	rot rot + rot + grad
26.37461643	5.13562230	1	0	0.00000000	2	rot + rad
		2	0	0.00000000	2	rot rot
26.53943566	5.01751890	±2	1	1.16787831	4	rot rot + rot + grad
26.95742836	3.83170597	0	3	3.50363493	2	rot
27.10106525	5.07317706	0	1	1.16787831	2	rot rot + grad
28.19952031	5.18030699	±1	1	1.16787831	4	rot rot + rot + grad
28.28023245	4.77749656	±2	2	2.33575662	4	rot rot + rot + grad
29.49065461	2.76904652	±1	4	4.67151324	4	rot rot + rot + grad
29.69742364	4.92358250	0	2	2.33575662	2	rot rot + grad
30.47126234	5.52007811	0	0	0.00000000	1	rot rot
32.77224938	5.22651799	±1	2	2.33575662	4	rot rot + rot + grad
33.03561689	4.55633176	±2	3	3.50363493	4	rot rot + rot + grad
34.87484339	4.75388111	0	3	3.50363493	2	rot rot + grad
36.50500661	3.83170597	0	4	4.67151324	2	rot
39.80837362	5.24718170	±1	3	3.50363493	4	rot rot + rot + grad
40.70646582	6.38016189	2	0	0.00000000	2	rot + rad
		3	0	0.00000000	2	rot rot
41.11877055	4.39269104	±2	4	4.67151324	4	rot rot + rot + grad
41.22711826	6.31372936	±3	1	1.16787831	4	rot rot + rot + grad
41.30088185	2.68372654	±1	5	5.83939155	4	rot rot + rot + grad
42.45059017	6.40988692	±2	1	1.16787831	4	rot rot + rot + grad
43.01834131	4.60383593	0	4	4.67151324	2	rot rot + grad
43.37712401	6.15803256	±3	2	2.33575662	4	rot rot + rot + grad
47.18741703	6.46000449	±2	2	2.33575662	4	rot rot + rot + grad
48.09226325	5.98471432	±3	3	3.50363493	4	rot rot + rot + grad
48.52539446	6.86741980	±1	1	1.16787831	4	rot rot + rot + grad
48.78046433	3.83170597	0	5	5.83939155	2	rot
49.21845632	7.01558667	0	0	0.00000000	1	rot
		1	0	0.00000000	2	rot rot
49.43922306	5.25511057	±1	4	4.67151324	4	rot rot + rot + grad
49.65210407	6.64803317	±1	2	2.33575662	4	rot rot + rot + grad

B.2 Liste der Eigenfunktionen

Eigenfunktionen zu $\boldsymbol{\lambda = 5.78318596}$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0.46853621\, J_0(2.40482555\, r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\boldsymbol{\lambda = 14.00353173}$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.13046351\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad - 0.78735214\, J_1(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} 0.065231755\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad + 0.065231755\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.2310779212\, J_0(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.0275646912\, J_2(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} - 0.065231755\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ \quad + 0.065231755\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.2310779212\, J_0(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.0275646912\, J_2(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.13046351\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad - 0.78735214\, J_1(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} - 0.065231755\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.065231755\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.2310779212\, J_0(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ \quad + 0.0275646912\, J_2(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} - 0.065231755\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad + 0.065231755\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.2310779212\, J_0(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.0275646912\, J_2(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.13046351\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad + 0.78735214\, J_1(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} - 0.065231755\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.065231755\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad + 0.0275646862\, J_2(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.2310779262\, J_0(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} 0.065231755\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.065231755\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.0275646862\, J_2(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.2310779262\, J_0(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_5 = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.13046351\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad + 0.78735214\, J_1(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} 0.065231755\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.065231755\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.0275646862\, J_2(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.2310779262\, J_0(3.55522038\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} 0.065231755\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.065231755\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.0275646862\, J_2(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.2310779262\, J_0(3.55522038\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\boldsymbol{\lambda = 14.68197064}$

$$\mathbf{w}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.60393228\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin\varphi \\ -0.60393228\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_7 = \begin{pmatrix} 0.85408922\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_8 = \begin{pmatrix} 0.85408922\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 15.44219494$

$$\mathbf{w}_9 = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.08076469\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad - 0.6313356\, J_1(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.040382345\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad + 0.040382345\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.3792047164\, J_0(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad - 0.0874359764\, J_2(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.040382345\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad + 0.040382345\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.3792047164\, J_0(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad - 0.0874359764\, J_2(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{10} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.08076469\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad - 0.6313356\, J_1(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.040382345\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad - 0.040382345\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.3792047164\, J_0(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad + 0.0874359764\, J_2(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.040382345\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad + 0.040382345\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.3792047164\, J_0(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad - 0.0874359764\, J_2(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{11} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.08076469\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad + 0.6313356\, J_1(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.040382345\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.040382345\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad + 0.0874359764\, J_2(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.3792047164\, J_0(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.040382345\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.040382345\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad - 0.0874359764\, J_2(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.3792047164\, J_0(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{12} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.08076469\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad + 0.6313356\, J_1(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.040382345\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.040382345\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad - 0.0874359764\, J_2(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.3792047164\, J_0(3.16013226\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.040382345\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.040382345\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad - 0.0874359764\, J_2(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.3792047164\, J_0(3.16013226\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 16.04591039$

$$\mathbf{w}_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad + 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 20.13772963$

$$\mathbf{w}_{15} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{16} = \begin{pmatrix} 0 \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad + 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 20.7502689$

$$\mathbf{w}_{17} = \begin{pmatrix} 0.02775964\, I_1(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - \varphi) \\ \quad - 0.46528314\, J_1(2.91115289\, r)\, \cos(3.50363493\, x - \varphi) \\ 0.01387982\, I_0(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ \quad + 0.01387982\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.4495941983\, J_0(2.91115289\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ \quad - 0.1103840383\, J_2(2.91115289\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.01387982\, I_0(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ \quad + 0.01387982\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.4495941983\, J_0(2.91115289\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ \quad - 0.1103840383\, J_2(2.91115289\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{18} = \begin{pmatrix} 0.02775964\, I_1(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - \varphi) \\ \quad - 0.46528314\, J_1(2.91115289\, r)\, \sin(3.50363493\, x - \varphi) \\ - 0.01387982\, I_0(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ \quad - 0.01387982\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.4495941983\, J_0(2.91115289\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ \quad + 0.1103840383\, J_2(2.91115289\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.01387982\, I_0(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ \quad + 0.01387982\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.4495941983\, J_0(2.91115289\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ \quad - 0.1103840383\, J_2(2.91115289\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{19} = \begin{pmatrix} -\,0.02775964\,I_1(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \\ +\,0.46528314\,J_1(2.91115289\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \\[1ex] -\,0.01387982\,I_2(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.01387982\,I_0(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x) \\ +\,0.1103840383\,J_2(2.91115289\,r)\,\sin(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.4495941983\,J_0(2.91115289\,r)\,\sin(3.50363493\,x) \\[1ex] 0.01387982\,I_2(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.01387982\,I_0(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x) \\ -\,0.1103840383\,J_2(2.91115289\,r)\,\cos(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.4495941983\,J_0(2.91115289\,r)\,\cos(3.50363493\,x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{20} = \begin{pmatrix} -\,0.02775964\,I_1(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \\ +\,0.46528314\,J_1(2.91115289\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \\[1ex] 0.01387982\,I_2(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.01387982\,I_0(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x) \\ -\,0.1103840383\,J_2(2.91115289\,r)\,\cos(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.4495941983\,J_0(2.91115289\,r)\,\cos(3.50363493\,x) \\[1ex] 0.01387982\,I_2(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.01387982\,I_0(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x) \\ -\,0.1103840383\,J_2(2.91115289\,r)\,\sin(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.4495941983\,J_0(2.91115289\,r)\,\sin(3.50363493\,x) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 26.37461643$

$$\mathbf{w}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.506364605\,J_2(5.1356223\,r)\,\sin(2\,\varphi) \\ 0.06698165 - 0.506364605\,J_2(5.1356223\,r)\,\cos(2\,\varphi) \\ +\,0.506364605\,J_0(5.1356223\,r) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\,0.06698165 - 0.506364605\,J_2(5.1356223\,r)\,\cos(2\,\varphi) \\ -\,0.506364605\,J_0(5.1356223\,r) \\[1ex] -0.506364605\,J_2(5.1356223\,r)\,\sin(2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{23} = \begin{pmatrix} 1.01272921\,J_2(5.1356223\,r)\,\cos(2\,\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{24} = \begin{pmatrix} 1.01272921\,J_2(5.1356223\,r)\,\sin(2\,\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 26.53943566$

$$\mathbf{w}_{25} = \begin{pmatrix} -\,0.20506255\,I_2(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.96553133\,J_2(5.0175189\,r)\,\cos(1.16787831\,x-2\,\varphi) \\[1ex] -\,0.102531275\,I_1(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x-\varphi) \\ -\,0.102531275\,I_3(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x-3\,\varphi) \\ -\,0.214502525\,J_1(5.0175189\,r)\,\sin(1.16787831\,x-\varphi) \\ +\,0.010234665\,J_3(5.0175189\,r)\,\sin(1.16787831\,x-3\,\varphi) \\[1ex] 0.102531275\,I_1(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x-\varphi) \\ -\,0.102531275\,I_3(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x-3\,\varphi) \\ +\,0.214502525\,J_1(5.0175189\,r)\,\cos(1.16787831\,x-\varphi) \\ +\,0.010234665\,J_3(5.0175189\,r)\,\cos(1.16787831\,x-3\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{26} = \begin{pmatrix} -\,0.20506255\,I_2(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.96553133\,J_2(5.0175189\,r)\,\sin(1.16787831\,x-2\,\varphi) \\[1ex] 0.102531275\,I_1(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x-\varphi) \\ +\,0.102531275\,I_3(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x-3\,\varphi) \\ +\,0.214502525\,J_1(5.0175189\,r)\,\cos(1.16787831\,x-\varphi) \\ -\,0.010234665\,J_3(5.0175189\,r)\,\cos(1.16787831\,x-3\,\varphi) \\[1ex] 0.102531275\,I_1(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x-\varphi) \\ -\,0.102531275\,I_3(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x-3\,\varphi) \\ +\,0.214502525\,J_1(5.0175189\,r)\,\sin(1.16787831\,x-\varphi) \\ +\,0.010234665\,J_3(5.0175189\,r)\,\sin(1.16787831\,x-3\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{27} = \begin{pmatrix} -\,0.20506255\,I_2(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.96553133\,J_2(5.01751889\,r)\,\cos(1.16787831\,x+2\,\varphi) \\[1ex] -\,0.102531275\,I_3(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.102531275\,I_1(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+\varphi) \\ +\,0.0102346652\,J_3(5.01751889\,r)\,\sin(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.2145025252\,J_1(5.01751889\,r)\,\sin(1.16787831\,x+\varphi) \\[1ex] 0.102531275\,I_3(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.102531275\,I_1(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x+\varphi) \\ -\,0.0102346652\,J_3(5.01751889\,r)\,\cos(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.2145025252\,J_1(5.01751889\,r)\,\cos(1.16787831\,x+\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{28} = \begin{pmatrix} -\,0.20506255\,I_2(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.96553133\,J_2(5.01751889\,r)\,\sin(1.16787831\,x+2\,\varphi) \\[1ex] 0.102531275\,I_3(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ +\,0.102531275\,I_1(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x+\varphi) \\ -\,0.0102346652\,J_3(5.01751889\,r)\,\cos(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ +\,0.2145025252\,J_1(5.01751889\,r)\,\cos(1.16787831\,x+\varphi) \\[1ex] 0.102531275\,I_3(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.102531275\,I_1(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+\varphi) \\ -\,0.0102346652\,J_3(5.01751889\,r)\,\sin(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.2145025252\,J_1(5.01751889\,r)\,\sin(1.16787831\,x+\varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 26.95742836$

$$\mathbf{w}_{29} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.42704461\,J_1(3.83170597\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \\ -\,0.42704461\,J_1(3.83170597\,r)\,\sin(3.50363493\,x-\varphi) \\[1ex] -\,0.42704461\,J_1(3.83170597\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \\ -\,0.42704461\,J_1(3.83170597\,r)\,\cos(3.50363493\,x-\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{30} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\,0.42704461\,J_1(3.83170597\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \\ +\,0.42704461\,J_1(3.83170597\,r)\,\cos(3.50363493\,x-\varphi) \\[1ex] -\,0.42704461\,J_1(3.83170597\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \\ -\,0.42704461\,J_1(3.83170597\,r)\,\sin(3.50363493\,x-\varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 27.10106525$

$$\mathbf{w}_{31} = \begin{pmatrix} 0.11035476\,I_0(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x) \\ +\,0.98675262\,J_0(5.07317706\,r)\,\cos(1.16787831\,x) \\[1ex] 0.05517738\,I_1(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+\varphi) \\ +\,0.05517738\,I_1(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x-\varphi) \\ +\,0.1135784311\,J_1(5.07317706\,r)\,\sin(1.16787831\,x+\varphi) \\ +\,0.1135784311\,J_1(5.07317706\,r)\,\sin(1.16787831\,x-\varphi) \\[1ex] -\,0.05517738\,I_1(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x+\varphi) \\ +\,0.05517738\,I_1(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x-\varphi) \\ -\,0.1135784311\,J_1(5.07317706\,r)\,\cos(1.16787831\,x+\varphi) \\ +\,0.1135784311\,J_1(5.07317706\,r)\,\cos(1.16787831\,x-\varphi) \end{pmatrix}$$

$$
\mathbf{w}_{32} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} 0.11035476\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad + 0.98675262\, J_0(5.07317706\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \end{array} \\
\begin{array}{l} - 0.05517738\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ - 0.05517738\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ - 0.1135784311\, J_1(5.07317706\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ - 0.1135784311\, J_1(5.07317706\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \end{array} \\
\begin{array}{l} - 0.05517738\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ + 0.05517738\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ - 0.1135784311\, J_1(5.07317706\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ + 0.1135784311\, J_1(5.07317706\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 28.19952031$

$$
\mathbf{w}_{33} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} - 0.08208688\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad - 0.16531234\, J_1(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \end{array} \\
\begin{array}{l} - 0.04104344\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.04104344\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\, \varphi) \\ - 0.4808407959\, J_0(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.5181097641\, J_2(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\, \varphi) \end{array} \\
\begin{array}{l} 0.04104344\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ - 0.04104344\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\, \varphi) \\ + 0.4808407959\, J_0(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ - 0.5181097641\, J_2(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\, \varphi) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{34} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} - 0.08208688\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad - 0.16531234\, J_1(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \end{array} \\
\begin{array}{l} 0.04104344\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ + 0.04104344\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\, \varphi) \\ + 0.4808407959\, J_0(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ + 0.5181097641\, J_2(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\, \varphi) \end{array} \\
\begin{array}{l} 0.04104344\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.04104344\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\, \varphi) \\ + 0.4808407959\, J_0(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.5181097641\, J_2(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\, \varphi) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{35} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} 0.08208688\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad + 0.16531234\, J_1(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \end{array} \\
\begin{array}{l} 0.04104344\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\, \varphi) \\ + 0.04104344\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ + 0.5181097641\, J_2(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\, \varphi) \\ + 0.4808407959\, J_0(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \end{array} \\
\begin{array}{l} - 0.04104344\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\, \varphi) \\ + 0.04104344\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ - 0.5181097641\, J_2(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\, \varphi) \\ + 0.4808407959\, J_0(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{36} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} 0.08208688\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad + 0.16531234\, J_1(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \end{array} \\
\begin{array}{l} - 0.04104344\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\, \varphi) \\ - 0.04104344\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ - 0.5181097641\, J_2(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\, \varphi) \\ - 0.4808407959\, J_0(5.18030699\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \end{array} \\
\begin{array}{l} - 0.04104344\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\, \varphi) \\ + 0.04104344\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.5181097641\, J_2(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\, \varphi) \\ + 0.4808407959\, J_0(5.18030699\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 28.28023245$

$$\mathbf{w}_{37} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -0.10094555\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ +\, 0.85580313\, J_2(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -0.050472775\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ -\, 0.050472775\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ -\, 0.3715823931\, J_1(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ +\, 0.0468266631\, J_3(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.050472775\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ -\, 0.050472775\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ +\, 0.3715823931\, J_1(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ +\, 0.0468266631\, J_3(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{38} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -0.10094555\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ +\, 0.85580313\, J_2(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.050472775\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ +\, 0.050472775\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ +\, 0.3715823931\, J_1(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ -\, 0.0468266631\, J_3(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.050472775\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ -\, 0.050472775\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ +\, 0.3715823931\, J_1(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ +\, 0.0468266631\, J_3(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{39} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -0.10094555\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ +\, 0.85580313\, J_2(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -0.050472775\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ -\, 0.050472775\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ +\, 0.0468266631\, J_3(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ -\, 0.3715823931\, J_1(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.050472775\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ -\, 0.050472775\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ -\, 0.0468266631\, J_3(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ -\, 0.3715823931\, J_1(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{40} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -0.10094555\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ +\, 0.85580313\, J_2(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.050472775\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ +\, 0.050472775\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ -\, 0.0468266631\, J_3(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ +\, 0.3715823931\, J_1(4.77749656\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.050472775\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ -\, 0.050472775\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ -\, 0.0468266631\, J_3(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ -\, 0.3715823931\, J_1(4.77749656\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 29.49065461$

$$\mathbf{w}_{41} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.00805393\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \\ -\, 0.34535334\, J_1(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.004026965\, I_0(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \\ +\, 0.004026965\, I_2(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \\ +\, 0.4756418988\, J_0(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \\ -\, 0.1069856188\, J_2(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -0.004026965\, I_0(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \\ +\, 0.004026965\, I_2(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \\ -\, 0.4756418988\, J_0(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \\ -\, 0.1069856188\, J_2(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{42} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.00805393\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad - 0.34535334\, J_1(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.004026965\, I_0(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \\ - 0.004026965\, I_2(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.4756418988\, J_0(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \\ + 0.1069856188\, J_2(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.004026965\, I_0(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \\ + 0.004026965\, I_2(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.4756418988\, J_0(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \\ - 0.1069856188\, J_2(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{43} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.00805393\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ \quad + 0.34535334\, J_1(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.004026965\, I_2(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.004026965\, I_0(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \\ + 0.1069856188\, J_2(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.4756418988\, J_0(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.004026965\, I_2(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.004026965\, I_0(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \\ - 0.1069856188\, J_2(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.4756418988\, J_0(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{44} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.00805393\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ \quad + 0.34535334\, J_1(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.004026965\, I_2(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ + 0.004026965\, I_0(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \\ - 0.1069856188\, J_2(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ + 0.4756418988\, J_0(2.76904652\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.004026965\, I_2(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.004026965\, I_0(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \\ - 0.1069856188\, J_2(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.4756418988\, J_0(2.76904652\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 29.69742364$

$$\mathbf{w}_{45} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.06353986\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad + 0.91279441\, J_0(4.9235825\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.03176993\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ + 0.03176993\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ + 0.2165156759\, J_1(4.9235825\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ + 0.2165156759\, J_1(4.9235825\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.03176993\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ + 0.03176993\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ - 0.2165156759\, J_1(4.9235825\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ + 0.2165156759\, J_1(4.9235825\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{46} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.06353986\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad + 0.91279441\, J_0(4.9235825\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.03176993\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ - 0.03176993\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ - 0.2165156759\, J_1(4.9235825\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ - 0.2165156759\, J_1(4.9235825\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.03176993\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ + 0.03176993\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ - 0.2165156759\, J_1(4.9235825\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ + 0.2165156759\, J_1(4.9235825\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 30.47126234$

$$\mathbf{w}_{47} = \begin{pmatrix} 0.71485324\, J_0(5.52007811\, r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 32.77224938$

$$\mathbf{w}_{48} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.03143699\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad -\,0.19791474\, J_1(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} -\,0.015718495\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.015718495\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad -\,0.4514551292\, J_0(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.5399042008\, J_2(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} 0.015718495\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.015718495\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.4514551292\, J_0(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.5399042008\, J_2(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{49} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.03143699\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad -\,0.19791474\, J_1(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} 0.015718495\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad +\,0.015718495\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.4514551292\, J_0(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad +\,0.5399042008\, J_2(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} 0.015718495\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.015718495\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.4514551292\, J_0(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.5399042008\, J_2(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{50} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.031437\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad +\,0.19791474\, J_1(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} 0.0157185\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.0157185\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad +\,0.5399042008\, J_2(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.4514551292\, J_0(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} -\,0.0157185\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.0157185\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.5399042008\, J_2(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.4514551292\, J_0(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{51} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.031437\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad +\,0.19791474\, J_1(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} -\,0.0157185\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad -\,0.0157185\, I_0(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.5399042008\, J_2(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad -\,0.4514551292\, J_0(5.22651799\, r)\, \cos(2.33575662\, x) \end{array} \\[1ex] \begin{array}{l} -\,0.0157185\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.0157185\, I_0(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \\ \quad -\,0.5399042008\, J_2(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad +\,0.4514551292\, J_0(5.22651799\, r)\, \sin(2.33575662\, x) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 33.03561689$

$$\mathbf{w}_{52} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.03741755\,I_2(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.7224599\,J_2(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x-2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\,0.018708775\,I_1(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x-\varphi) \\ -\,0.018708775\,I_3(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x-3\,\varphi) \\ -\,0.4739497085\,J_1(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x-\varphi) \\ +\,0.0815927485\,J_3(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x-3\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.018708775\,I_1(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x-\varphi) \\ -\,0.018708775\,I_3(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x-3\,\varphi) \\ +\,0.4739497085\,J_1(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x-\varphi) \\ +\,0.0815927485\,J_3(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x-3\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{53} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.03741755\,I_2(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.7224599\,J_2(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x-2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.018708775\,I_1(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x-\varphi) \\ +\,0.018708775\,I_3(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x-3\,\varphi) \\ +\,0.4739497085\,J_1(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x-\varphi) \\ -\,0.0815927485\,J_3(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x-3\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.018708775\,I_1(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x-\varphi) \\ -\,0.018708775\,I_3(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x-3\,\varphi) \\ +\,0.4739497085\,J_1(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x-\varphi) \\ +\,0.0815927485\,J_3(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x-3\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{54} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.03741755\,I_2(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.7224599\,J_2(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x+2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\,0.018708775\,I_3(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.018708775\,I_1(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \\ +\,0.0815927485\,J_3(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.4739497085\,J_1(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.018708775\,I_3(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.018708775\,I_1(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \\ -\,0.0815927485\,J_3(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.4739497085\,J_1(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{55} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.03741755\,I_2(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.7224599\,J_2(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x+2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.018708775\,I_3(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+3\,\varphi) \\ +\,0.018708775\,I_1(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \\ -\,0.0815927485\,J_3(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x+3\,\varphi) \\ +\,0.4739497085\,J_1(4.55633176\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.018708775\,I_3(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.018708775\,I_1(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \\ -\,0.0815927485\,J_3(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x+3\,\varphi) \\ -\,0.4739497085\,J_1(4.55633176\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 34.87484339$

$$\mathbf{w}_{56} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.02771369\,I_0(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x) \\ +\,0.8075035\,J_0(4.75388111\,r)\,\cos(3.50363493\,x) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.013856845\,I_1(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \\ +\,0.013856845\,I_1(3.50363493\,r)\,\sin(3.50363493\,x-\varphi) \\ +\,0.297567125\,J_1(4.75388111\,r)\,\sin(3.50363493\,x+\varphi) \\ +\,0.297567125\,J_1(4.75388111\,r)\,\sin(3.50363493\,x-\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\,0.013856845\,I_1(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \\ +\,0.013856845\,I_1(3.50363493\,r)\,\cos(3.50363493\,x-\varphi) \\ -\,0.297567125\,J_1(4.75388111\,r)\,\cos(3.50363493\,x+\varphi) \\ +\,0.297567125\,J_1(4.75388111\,r)\,\cos(3.50363493\,x-\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$
\mathbf{w}_{57} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} 0.02771369\, I_0(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ \quad + 0.8075035\, J_0(4.75388111\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} - 0.013856845\, I_1(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + \varphi) \\ - 0.013856845\, I_1(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - \varphi) \\ - 0.297567125\, J_1(4.75388111\, r)\, \cos(3.50363493\, x + \varphi) \\ - 0.297567125\, J_1(4.75388111\, r)\, \cos(3.50363493\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} - 0.013856845\, I_1(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + \varphi) \\ + 0.013856845\, I_1(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - \varphi) \\ - 0.297567125\, J_1(4.75388111\, r)\, \sin(3.50363493\, x + \varphi) \\ + 0.297567125\, J_1(4.75388111\, r)\, \sin(3.50363493\, x - \varphi) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 36.50500661$

$$
\mathbf{w}_{58} = \begin{pmatrix}
0 \\
\begin{array}{l} 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{59} = \begin{pmatrix}
0 \\
\begin{array}{l} - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ + 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 39.80837362$

$$
\mathbf{w}_{60} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} - 0.01089233\, I_1(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - \varphi) \\ \quad - 0.19661168\, J_1(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} - 0.005446165\, I_0(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ - 0.005446165\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.4285446025\, J_0(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ - 0.5598256575\, J_2(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} 0.005446165\, I_0(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ - 0.005446165\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.4285446025\, J_0(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ - 0.5598256575\, J_2(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{61} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} - 0.01089233\, I_1(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - \varphi) \\ \quad - 0.19661168\, J_1(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} 0.005446165\, I_0(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ + 0.005446165\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.4285446025\, J_0(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ + 0.5598256575\, J_2(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} 0.005446165\, I_0(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ - 0.005446165\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.4285446025\, J_0(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ - 0.5598256575\, J_2(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{62} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{l} 0.01089233\, I_1(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + \varphi) \\ \quad + 0.19661168\, J_1(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x + \varphi) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} 0.005446165\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ + 0.005446165\, I_0(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ + 0.5598256575\, J_2(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ + 0.4285446025\, J_0(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} - 0.005446165\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ + 0.005446165\, I_0(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ - 0.5598256575\, J_2(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ + 0.4285446025\, J_0(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \end{array}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{63} = \begin{pmatrix} 0.01089233\, I_1(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + \varphi) \\ \quad + 0.19661168\, J_1(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x + \varphi) \\ - 0.005446165\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.005446165\, I_0(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ \quad - 0.5598256575\, J_2(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.4285446025\, J_0(5.2471817\, r)\, \cos(3.50363493\, x) \\ - 0.005446165\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.005446165\, I_0(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \\ \quad - 0.5598256575\, J_2(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.4285446025\, J_0(5.2471817\, r)\, \sin(3.50363493\, x) \end{pmatrix}
$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 40.70646582$

$$
\mathbf{w}_{64} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.10783189\, r\, \sin\varphi + 0.57663966\, J_3(6.38016189\, r)\, \sin(3\,\varphi) \\ \quad + 0.57663966\, J_1(6.38016189\, r)\, \sin\varphi \\ 0.10783189\, r\, \cos\varphi - 0.57663966\, J_3(6.38016189\, r)\, \cos(3\,\varphi) \\ \quad + 0.57663966\, J_1(6.38016189\, r)\, \cos\varphi \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{65} = \begin{pmatrix} 0 \\ - 0.10783189\, r\, \cos\varphi - 0.57663966\, J_3(6.38016189\, r)\, \cos(3\,\varphi) \\ \quad - 0.57663966\, J_1(6.38016189\, r)\, \cos\varphi \\ 0.10783189\, r\, \sin\varphi - 0.57663966\, J_3(6.38016189\, r)\, \sin(3\,\varphi) \\ \quad + 0.57663966\, J_1(6.38016189\, r)\, \sin\varphi \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{66} = \begin{pmatrix} 1.15327932\, J_3(6.38016189\, r)\, \cos(3\,\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{67} = \begin{pmatrix} 1.15327932\, J_3(6.38016189\, r)\, \sin(3\,\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 41.11877055$

$$
\mathbf{w}_{68} = \begin{pmatrix} - 0.01191756\, I_2(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.59641748\, J_2(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.00595878\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad - 0.00595878\, I_3(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5347711173\, J_1(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad + 0.0995034373\, J_3(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 3\,\varphi) \\ 0.00595878\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad - 0.00595878\, I_3(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5347711173\, J_1(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad + 0.0995034373\, J_3(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 3\,\varphi) \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{w}_{69} = \begin{pmatrix} - 0.01191756\, I_2(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.59641748\, J_2(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 2\,\varphi) \\ 0.00595878\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad + 0.00595878\, I_3(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5347711173\, J_1(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad - 0.0995034373\, J_3(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x - 3\,\varphi) \\ 0.00595878\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad - 0.00595878\, I_3(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5347711173\, J_1(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad + 0.0995034373\, J_3(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x - 3\,\varphi) \end{pmatrix}
$$

$$\mathbf{w}_{70} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.01191756\, I_2(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ +\,0.59641748\, J_2(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} -\,0.00595878\, I_3(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 3\,\varphi) \\ -\,0.00595878\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ +\,0.0995034373\, J_3(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 3\,\varphi) \\ -\,0.5347711173\, J_1(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} 0.00595878\, I_3(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 3\,\varphi) \\ -\,0.00595878\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ -\,0.0995034373\, J_3(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 3\,\varphi) \\ -\,0.5347711173\, J_1(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{71} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.01191756\, I_2(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \\ +\,0.59641748\, J_2(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} 0.00595878\, I_3(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 3\,\varphi) \\ +\,0.00595878\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ -\,0.0995034373\, J_3(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x + 3\,\varphi) \\ +\,0.5347711173\, J_1(4.39269104\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} 0.00595878\, I_3(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 3\,\varphi) \\ -\,0.00595878\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ -\,0.0995034373\, J_3(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x + 3\,\varphi) \\ -\,0.5347711173\, J_1(4.39269104\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 41.22711826$

$$\mathbf{w}_{72} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.61588187\, I_3(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \\ -\,1.11723152\, J_3(6.31372936\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} 0.307940935\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ +\,0.307940935\, I_4(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 4\,\varphi) \\ +\,0.2015150459\, J_2(6.31372936\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ -\,0.0051441859\, J_4(6.31372936\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 4\,\varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} -\,0.307940935\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ +\,0.307940935\, I_4(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 4\,\varphi) \\ -\,0.2015150459\, J_2(6.31372936\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ -\,0.0051441859\, J_4(6.31372936\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 4\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{73} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.61588187\, I_3(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \\ -\,1.11723152\, J_3(6.31372936\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} -\,0.307940935\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ -\,0.307940935\, I_4(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 4\,\varphi) \\ -\,0.2015150459\, J_2(6.31372936\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ +\,0.0051441859\, J_4(6.31372936\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 4\,\varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} -\,0.307940935\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ +\,0.307940935\, I_4(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 4\,\varphi) \\ -\,0.2015150459\, J_2(6.31372936\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ -\,0.0051441859\, J_4(6.31372936\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 4\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{74} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.61588187\, I_3(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ +\,1.11723152\, J_3(6.31372936\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} -\,0.307940935\, I_4(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 4\,\varphi) \\ -\,0.307940935\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ +\,0.0051441859\, J_4(6.31372936\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 4\,\varphi) \\ -\,0.2015150459\, J_2(6.31372936\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\ \begin{array}{l} 0.307940935\, I_4(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 4\,\varphi) \\ -\,0.307940935\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ -\,0.0051441859\, J_4(6.31372936\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 4\,\varphi) \\ -\,0.2015150459\, J_2(6.31372936\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{75} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.61588187\,I_3(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+3\,\varphi) \\ +\,1.11723152\,J_3(6.31372936\,r)\,\sin(1.16787831\,x+3\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.307940935\,I_4(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x+4\,\varphi) \\ +\,0.307940935\,I_2(1.16787831\,r)\,\cos(1.16787831\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.0051441859\,J_4(6.31372936\,r)\,\cos(1.16787831\,x+4\,\varphi) \\ +\,0.2015150459\,J_2(6.31372936\,r)\,\cos(1.16787831\,x+2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.307940935\,I_4(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+4\,\varphi) \\ -\,0.307940935\,I_2(1.16787831\,r)\,\sin(1.16787831\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.0051441859\,J_4(6.31372936\,r)\,\sin(1.16787831\,x+4\,\varphi) \\ -\,0.2015150459\,J_2(6.31372936\,r)\,\sin(1.16787831\,x+2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 41.30088185$

$$\mathbf{w}_{76} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.00225538\,I_1(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x-\varphi) \\ -\,0.26689274\,J_1(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x-\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.00112769\,I_0(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x) \\ +\,0.00112769\,I_2(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.4843757406\,J_0(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x) \\ -\,0.0963433406\,J_2(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x-2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} -\,0.00112769\,I_0(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x) \\ +\,0.00112769\,I_2(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x-2\,\varphi) \\ -\,0.4843757406\,J_0(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x) \\ -\,0.0963433406\,J_2(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x-2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{77} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.00225538\,I_1(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x-\varphi) \\ -\,0.26689274\,J_1(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x-\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} -\,0.00112769\,I_0(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x) \\ -\,0.00112769\,I_2(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x-2\,\varphi) \\ -\,0.4843757406\,J_0(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x) \\ +\,0.0963433406\,J_2(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x-2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} -\,0.00112769\,I_0(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x) \\ +\,0.00112769\,I_2(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x-2\,\varphi) \\ -\,0.4843757406\,J_0(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x) \\ -\,0.0963433406\,J_2(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x-2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{78} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.00225538\,I_1(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x+\varphi) \\ +\,0.26689274\,J_1(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x+\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} -\,0.00112769\,I_2(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.00112769\,I_0(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x) \\ +\,0.0963433406\,J_2(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.4843757406\,J_0(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.00112769\,I_2(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.00112769\,I_0(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x) \\ -\,0.0963433406\,J_2(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.4843757406\,J_0(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{79} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\,0.00225538\,I_1(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x+\varphi) \\ +\,0.26689274\,J_1(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x+\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.00112769\,I_2(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.00112769\,I_0(5.83939155\,r)\,\cos(5.83939155\,x) \\ -\,0.0963433406\,J_2(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.4843757406\,J_0(2.68372654\,r)\,\cos(5.83939155\,x) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.00112769\,I_2(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.00112769\,I_0(5.83939155\,r)\,\sin(5.83939155\,x) \\ -\,0.0963433406\,J_2(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.4843757406\,J_0(2.68372654\,r)\,\sin(5.83939155\,x) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 42.45059017$

$$\mathbf{w}_{80} = \begin{pmatrix} 0.28697758\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.18187525\, J_2(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\[1ex] 0.14348879\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad + 0.14348879\, I_3(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5527369235\, J_1(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad + 0.5858745065\, J_3(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \\[1ex] - 0.14348879\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad + 0.14348879\, I_3(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5527369235\, J_1(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad + 0.5858745065\, J_3(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{81} = \begin{pmatrix} 0.28697758\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.18187525\, J_2(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\[1ex] - 0.14348879\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad - 0.14348879\, I_3(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5527369235\, J_1(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad - 0.5858745065\, J_3(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \\[1ex] - 0.14348879\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad + 0.14348879\, I_3(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5527369235\, J_1(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ \quad + 0.5858745065\, J_3(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 3\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{82} = \begin{pmatrix} 0.28697758\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.18187525\, J_2(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\[1ex] 0.14348879\, I_3(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.14348879\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad + 0.5858745065\, J_3(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5527369235\, J_1(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\[1ex] - 0.14348879\, I_3(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.14348879\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad - 0.5858745065\, J_3(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5527369235\, J_1(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{83} = \begin{pmatrix} 0.28697758\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.18187525\, J_2(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\[1ex] - 0.14348879\, I_3(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ \quad - 0.14348879\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad - 0.5858745065\, J_3(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5527369235\, J_1(6.40988692\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\[1ex] - 0.14348879\, I_3(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.14348879\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad - 0.5858745065\, J_3(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5527369235\, J_1(6.40988692\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 43.01834131$

$$\mathbf{w}_{84} = \begin{pmatrix} 0.01009855\, I_0(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \\ \quad + 0.69588914\, J_0(4.60383593\, r)\, \cos(4.67151324\, x) \\[1ex] 0.005049275\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ \quad + 0.005049275\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad + 0.3530594248\, J_1(4.60383593\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ \quad + 0.3530594248\, J_1(4.60383593\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \\[1ex] - 0.005049275\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ \quad + 0.005049275\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \\ \quad - 0.3530594248\, J_1(4.60383593\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ \quad + 0.3530594248\, J_1(4.60383593\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{85} = \begin{pmatrix} 0.01009855\, I_0(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \\ + 0.69588914\, J_0(4.60383593\, r)\, \sin(4.67151324\, x) \\[1ex] - 0.005049275\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ - 0.005049275\, I_1(4.67151324\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \\ - 0.3530594248\, J_1(4.60383593\, r)\, \cos(4.67151324\, x + \varphi) \\ - 0.3530594248\, J_1(4.60383593\, r)\, \cos(4.67151324\, x - \varphi) \\[1ex] - 0.005049275\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ + 0.005049275\, I_1(4.67151324\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \\ - 0.3530594248\, J_1(4.60383593\, r)\, \sin(4.67151324\, x + \varphi) \\ + 0.3530594248\, J_1(4.60383593\, r)\, \sin(4.67151324\, x - \varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 43.37712401$

$$\mathbf{w}_{86} = \begin{pmatrix} 0.18672979\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ - 1.02921875\, J_3(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\[1ex] 0.093364895\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.093364895\, I_4(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 4\,\varphi) \\ + 0.3622498186\, J_2(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.0281353386\, J_4(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 4\,\varphi) \\[1ex] - 0.093364895\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.093364895\, I_4(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 4\,\varphi) \\ - 0.3622498186\, J_2(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.0281353386\, J_4(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 4\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{87} = \begin{pmatrix} 0.18672979\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ - 1.02921875\, J_3(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\[1ex] - 0.093364895\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.093364895\, I_4(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 4\,\varphi) \\ - 0.3622498186\, J_2(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.0281353386\, J_4(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 4\,\varphi) \\[1ex] - 0.093364895\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.093364895\, I_4(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 4\,\varphi) \\ - 0.3622498186\, J_2(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.0281353386\, J_4(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 4\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{88} = \begin{pmatrix} - 0.18672979\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ + 1.02921875\, J_3(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\[1ex] - 0.093364895\, I_4(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.093364895\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ + 0.0281353386\, J_4(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.3622498186\, J_2(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\[1ex] 0.093364895\, I_4(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.093364895\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.0281353386\, J_4(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.3622498186\, J_2(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{89} = \begin{pmatrix} - 0.18672979\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ + 1.02921875\, J_3(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\[1ex] 0.093364895\, I_4(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 4\,\varphi) \\ + 0.093364895\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.0281353386\, J_4(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 4\,\varphi) \\ + 0.3622498186\, J_2(6.15803256\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\[1ex] 0.093364895\, I_4(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.093364895\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.0281353386\, J_4(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.3622498186\, J_2(6.15803256\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 47.18741703$

$$\mathbf{w}_{90} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.07786987\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.26821958\, J_2(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.038934935\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad + 0.038934935\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5111319876\, J_1(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad + 0.6081126724\, J_3(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\, 0.038934935\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad + 0.038934935\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5111319876\, J_1(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad + 0.6081126724\, J_3(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{91} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.07786987\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.26821958\, J_2(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\, 0.038934935\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad - 0.038934935\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5111319876\, J_1(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad - 0.6081126724\, J_3(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\, 0.038934935\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad + 0.038934935\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5111319876\, J_1(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x - \varphi) \\ \quad + 0.6081126724\, J_3(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x - 3\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{92} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.07786987\, I_2(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.26821958\, J_2(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.038934935\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.038934935\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad + 0.6081126724\, J_3(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5111319876\, J_1(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\, 0.038934935\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.038934935\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad - 0.6081126724\, J_3(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5111319876\, J_1(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{93} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.07786987\, I_2(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.26821958\, J_2(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\, 0.038934935\, I_3(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ \quad - 0.038934935\, I_1(2.33575662\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad - 0.6081126724\, J_3(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ \quad - 0.5111319876\, J_1(6.46000449\, r)\, \cos(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\, 0.038934935\, I_3(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.038934935\, I_1(2.33575662\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \\ \quad - 0.6081126724\, J_3(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x + 3\,\varphi) \\ \quad + 0.5111319876\, J_1(6.46000449\, r)\, \sin(2.33575662\, x + \varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 48.09226325$

$$\mathbf{w}_{94} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.05968849\, I_3(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.9175031\, J_3(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 3\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 0.029844245\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.029844245\, I_4(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 4\,\varphi) \\ \quad + 0.4786274628\, J_2(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.0585069328\, J_4(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 4\,\varphi) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -\, 0.029844245\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ \quad + 0.029844245\, I_4(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 4\,\varphi) \\ \quad - 0.4786274628\, J_2(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ \quad - 0.0585069328\, J_4(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 4\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{95} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} 0.05968849\, I_3(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 3\,\varphi) \\ \quad - 0.9175031\, J_3(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 3\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.029844245\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.029844245\, I_4(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 4\,\varphi) \\ - 0.4786274628\, J_2(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.0585069328\, J_4(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x - 4\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.029844245\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.029844245\, I_4(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 4\,\varphi) \\ - 0.4786274628\, J_2(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.0585069328\, J_4(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x - 4\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{96} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.05968849\, I_3(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 3\,\varphi) \\ + 0.9175031\, J_3(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 3\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.029844245\, I_4(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.029844245\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ + 0.0585069328\, J_4(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.4786274628\, J_2(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.029844245\, I_4(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.029844245\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.0585069328\, J_4(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.4786274628\, J_2(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{97} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.05968849\, I_3(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 3\,\varphi) \\ + 0.9175031\, J_3(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 3\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.029844245\, I_4(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 4\,\varphi) \\ + 0.029844245\, I_2(3.50363493\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.0585069328\, J_4(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 4\,\varphi) \\ + 0.4786274628\, J_2(5.98471432\, r)\, \cos(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.029844245\, I_4(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.029844245\, I_2(3.50363493\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \\ - 0.0585069328\, J_4(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 4\,\varphi) \\ - 0.4786274628\, J_2(5.98471432\, r)\, \sin(3.50363493\, x + 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 48.52539446$

$$\mathbf{w}_{98} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.07281069\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \\ - 1.12074038\, J_1(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} - 0.036405345\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.036405345\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ + 0.1681857442\, J_0(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.02240816422\, J_2(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.036405345\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ - 0.036405345\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.1681857442\, J_0(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ - 0.02240816422\, J_2(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{99} = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} - 0.07281069\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \\ - 1.12074038\, J_1(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x - \varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.036405345\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ + 0.036405345\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.1681857442\, J_0(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ + 0.02240816422\, J_2(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \end{array} \\[2ex] \begin{array}{l} 0.036405345\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.036405345\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \\ - 0.1681857442\, J_0(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ - 0.02240816422\, J_2(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x - 2\,\varphi) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{100} = \begin{pmatrix} 0.07281069\, I_1(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad + 1.12074038\, J_1(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x + \varphi) \\[1ex] 0.036405345\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.036405345\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad + 0.02240816422\, J_2(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.1681857442\, J_0(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\[1ex] - 0.036405345\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.036405345\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.02240816422\, J_2(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.1681857442\, J_0(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{101} = \begin{pmatrix} 0.07281069\, I_1(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\ \quad + 1.12074038\, J_1(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x + \varphi) \\[1ex] - 0.036405345\, I_2(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.036405345\, I_0(1.16787831\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.02240816422\, J_2(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.1681857442\, J_0(6.8674198\, r)\, \cos(1.16787831\, x) \\[1ex] - 0.036405345\, I_2(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad + 0.036405345\, I_0(1.16787831\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \\ \quad - 0.02240816422\, J_2(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x + 2\,\varphi) \\ \quad - 0.1681857442\, J_0(6.8674198\, r)\, \sin(1.16787831\, x) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 48.78046433$

$$\mathbf{w}_{102} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(5.83939155\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(5.83939155\, x - \varphi) \\[1ex] - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(5.83939155\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(5.83939155\, x - \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{103} = \begin{pmatrix} 0 \\ - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(5.83939155\, x + \varphi) \\ \quad + 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \cos(5.83939155\, x - \varphi) \\[1ex] - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(5.83939155\, x + \varphi) \\ \quad - 0.42704461\, J_1(3.83170597\, r)\, \sin(5.83939155\, x - \varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 49.21845632$

$$\mathbf{w}_{104} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.81048528\, J_1(7.01558667\, r)\, \sin\varphi \\ -0.81048528\, J_1(7.01558667\, r)\, \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{105} = \begin{pmatrix} 1.14619928\, J_1(7.01558667\, r)\, \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{106} = \begin{pmatrix} 1.14619928\, J_1(7.01558667\, r)\, \sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 49.43922306$

$$\mathbf{w}_{107} = \begin{pmatrix} -\,0.00366016\,I_1(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x-\varphi) \\ -\,0.19091665\,J_1(5.25511057\,r)\,\cos(4.67151324\,x-\varphi) \\[1ex] -\,0.00183008\,I_0(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x) \\ -\,0.00183008\,I_2(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x-2\,\varphi) \\ -\,0.4076092663\,J_0(5.25511057\,r)\,\sin(4.67151324\,x) \\ -\,0.5773239937\,J_2(5.25511057\,r)\,\sin(4.67151324\,x-2\,\varphi) \\[1ex] 0.00183008\,I_0(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x) \\ -\,0.00183008\,I_2(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.4076092663\,J_0(5.25511057\,r)\,\cos(4.67151324\,x) \\ -\,0.5773239937\,J_2(5.25511057\,r)\,\cos(4.67151324\,x-2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{108} = \begin{pmatrix} -\,0.00366016\,I_1(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x-\varphi) \\ -\,0.19091665\,J_1(5.25511057\,r)\,\sin(4.67151324\,x-\varphi) \\[1ex] 0.00183008\,I_0(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x) \\ +\,0.00183008\,I_2(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.4076092663\,J_0(5.25511057\,r)\,\cos(4.67151324\,x) \\ +\,0.5773239937\,J_2(5.25511057\,r)\,\cos(4.67151324\,x-2\,\varphi) \\[1ex] 0.00183008\,I_0(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x) \\ -\,0.00183008\,I_2(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.4076092663\,J_0(5.25511057\,r)\,\sin(4.67151324\,x) \\ -\,0.5773239937\,J_2(5.25511057\,r)\,\sin(4.67151324\,x-2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{109} = \begin{pmatrix} 0.00366016\,I_1(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x+\varphi) \\ +\,0.19091665\,J_1(5.25511056\,r)\,\cos(4.67151324\,x+\varphi) \\[1ex] 0.00183008\,I_2(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.00183008\,I_0(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x) \\ +\,0.5773239939\,J_2(5.25511056\,r)\,\sin(4.67151324\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.4076092661\,J_0(5.25511056\,r)\,\sin(4.67151324\,x) \\[1ex] -\,0.00183008\,I_2(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.00183008\,I_0(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x) \\ -\,0.5773239939\,J_2(5.25511056\,r)\,\cos(4.67151324\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.4076092661\,J_0(5.25511056\,r)\,\cos(4.67151324\,x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{110} = \begin{pmatrix} 0.00366016\,I_1(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x+\varphi) \\ +\,0.19091665\,J_1(5.25511056\,r)\,\sin(4.67151324\,x+\varphi) \\[1ex] -\,0.00183008\,I_2(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.00183008\,I_0(4.67151324\,r)\,\cos(4.67151324\,x) \\ -\,0.5773239939\,J_2(5.25511056\,r)\,\cos(4.67151324\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.4076092661\,J_0(5.25511056\,r)\,\cos(4.67151324\,x) \\[1ex] -\,0.00183008\,I_2(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.00183008\,I_0(4.67151324\,r)\,\sin(4.67151324\,x) \\ -\,0.5773239939\,J_2(5.25511056\,r)\,\sin(4.67151324\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.4076092661\,J_0(5.25511056\,r)\,\sin(4.67151324\,x) \end{pmatrix}$$

Eigenfunktionen zu $\lambda = 49.65210407$

$$\mathbf{w}_{111} = \begin{pmatrix} -\,0.05445326\,I_1(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x-\varphi) \\ -\,1.06497685\,J_1(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x-\varphi) \\[1ex] -\,0.02722663\,I_0(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x) \\ -\,0.02722663\,I_2(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x-2\,\varphi) \\ +\,0.2828551935\,J_0(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x) \\ -\,0.0913196435\,J_2(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x-2\,\varphi) \\[1ex] 0.02722663\,I_0(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x) \\ -\,0.02722663\,I_2(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x-2\,\varphi) \\ -\,0.2828551935\,J_0(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x) \\ -\,0.0913196435\,J_2(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x-2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{112} = \begin{pmatrix} -\,0.05445326\,I_1(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x-\varphi) \\ -\,1.06497685\,J_1(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x-\varphi) \\[2mm] 0.02722663\,I_0(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x) \\ +\,0.02722663\,I_2(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x-2\,\varphi) \\ -\,0.2828551935\,J_0(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x) \\ +\,0.0913196435\,J_2(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x-2\,\varphi) \\[2mm] 0.02722663\,I_0(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x) \\ -\,0.02722663\,I_2(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x-2\,\varphi) \\ -\,0.2828551935\,J_0(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x) \\ -\,0.0913196435\,J_2(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x-2\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{113} = \begin{pmatrix} 0.05445326\,I_1(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x+\varphi) \\ +\,1.06497685\,J_1(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x+\varphi) \\[2mm] 0.02722663\,I_2(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.02722663\,I_0(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x) \\ +\,0.0913196435\,J_2(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.2828551935\,J_0(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x) \\[2mm] -\,0.02722663\,I_2(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.02722663\,I_0(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x) \\ -\,0.0913196435\,J_2(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.2828551935\,J_0(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{114} = \begin{pmatrix} 0.05445326\,I_1(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x+\varphi) \\ +\,1.06497685\,J_1(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x+\varphi) \\[2mm] -\,0.02722663\,I_2(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.02722663\,I_0(2.33575662\,r)\,\cos(2.33575662\,x) \\ -\,0.0913196435\,J_2(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.2828551935\,J_0(6.64803317\,r)\,\cos(2.33575662\,x) \\[2mm] -\,0.02722663\,I_2(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x+2\,\varphi) \\ +\,0.02722663\,I_0(2.33575662\,r)\,\sin(2.33575662\,x) \\ -\,0.0913196435\,J_2(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x+2\,\varphi) \\ -\,0.2828551935\,J_0(6.64803317\,r)\,\sin(2.33575662\,x) \end{pmatrix}$$

B.3 Besetzung der Koeffizientenmatrizen

Die Koeffizientensysteme sind sehr schwach besetzt. In den Abbildungen 1 und 2 symbolisieren die schwarzen Felder Nichtnulleinträge in den entsprechenden Matrizen.

In Abbildung 3 wird in gleicher Weise die Besetzung der b_{ijk} für zwei ausgewählte Werte von i gezeigt. Tatsächlich sind nur 23 172 der $114^3 = 1\,481\,544$ Einträge besetzt.

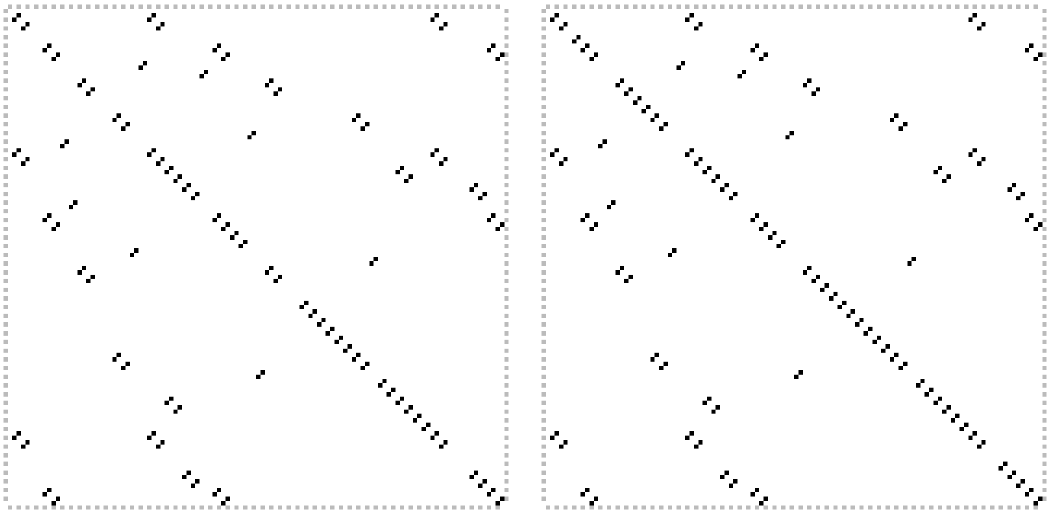

Abbildung 1: Besetzung der $q_{1ij}^{\cos}$ und der $q_{2ij}^{\cos}$

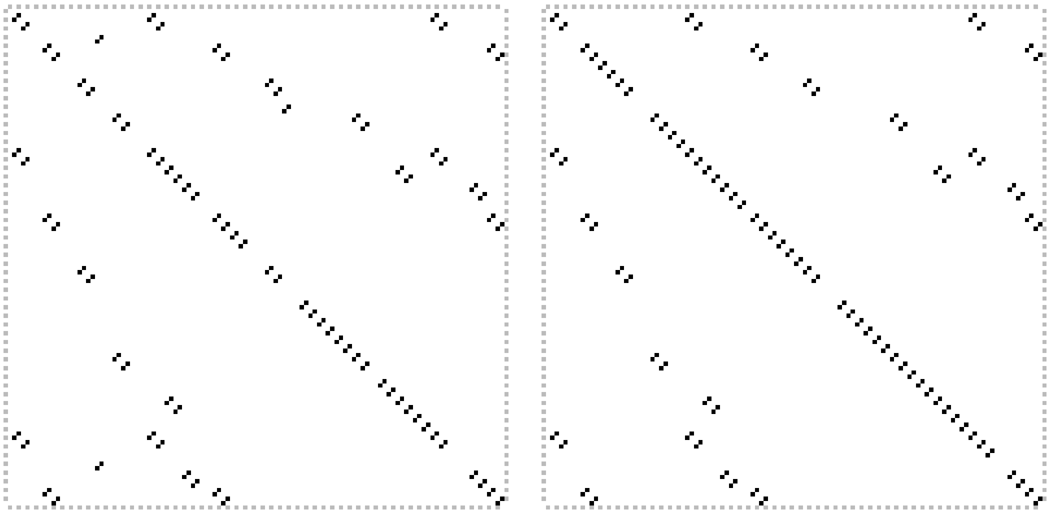

Abbildung 2: Besetzung der $q_{1ij}^{\sin}$ und der $q_{2ij}^{\sin}$

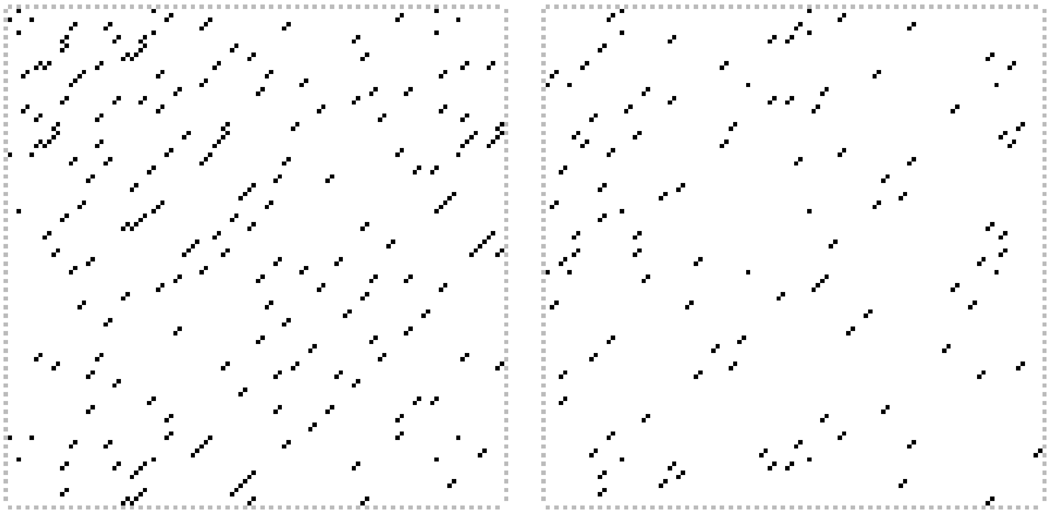

Abbildung 3: Besetzung der b_{ijk} (für $i = 2$ bzw. $i = 17$)

B.4 Erste Rechnungen für reine und gemischte Strömungen

Es wurden die folgenden Anfangsbedingungen vorgegeben:

$$\begin{aligned} g_{0,2} = g_{0,3} = g_{0,4} = g_{0,5} &= 0.1, \\ g_{0,9} = g_{0,10} = g_{0,11} = g_{0,12} &= 0.1, \\ g_{0,i} &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Wir betrachten die *Energie* des Korrekturfeldes zum Laminarfeld, gegeben durch

$$\|\hat{\mathbf{u}}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega_\ell)^3} = \sum_{i=1}^{N} g_i(t)^2. \tag{B.2}$$

Der zeitliche Verlauf der Energie für reine und gemischte Strömungen bei der gleichen Reynoldszahl $Re = 1500$ ist in Abbildung 4 dargestellt. Es ist bereits der Übergang von laminarem zu turbulentem Verhalten in Abhängigkeit vom Strömungsparameter ψ zu erkennen. Die Couette-Randbedingungen haben offenbar eine stabilisierende Wirkung: Selbst bei hohen Reynoldszahlen klingt die Energie der durch die Anfangsbedingungen eingebrachten Störung schnell ab (Abbildung 5).

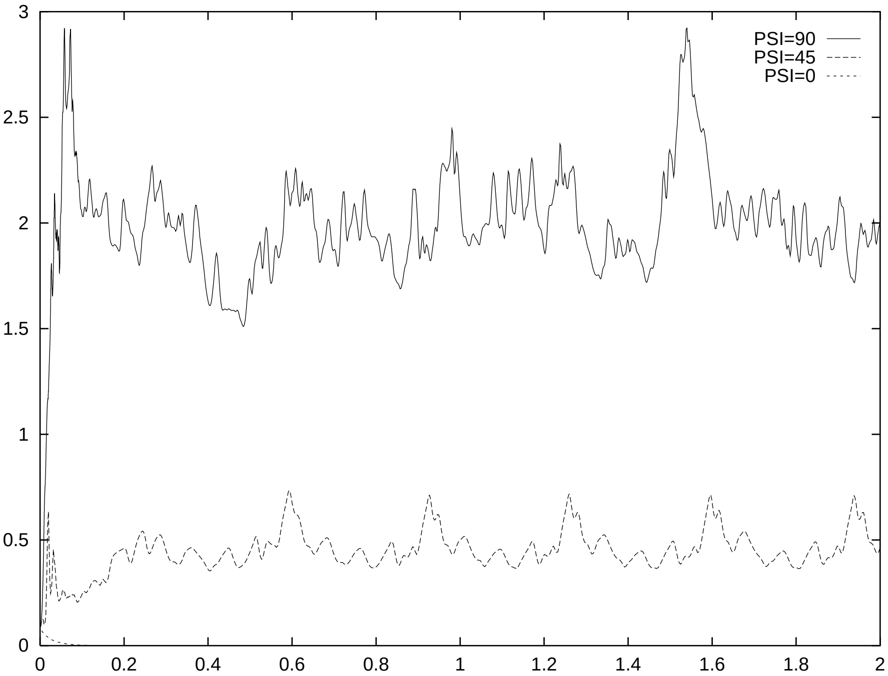

Abbildung 4: Zeitlicher Verlauf der Energie des Korrekturfeldes im Falle der reinen Couette-Strömung ($\psi = 0°$), der reinen Poiseuille-Strömung ($\psi = 90°$) und der gemischten Rohrströmung ($\psi = 45°$) bei einer Reynoldszahl von $Re = 1500$

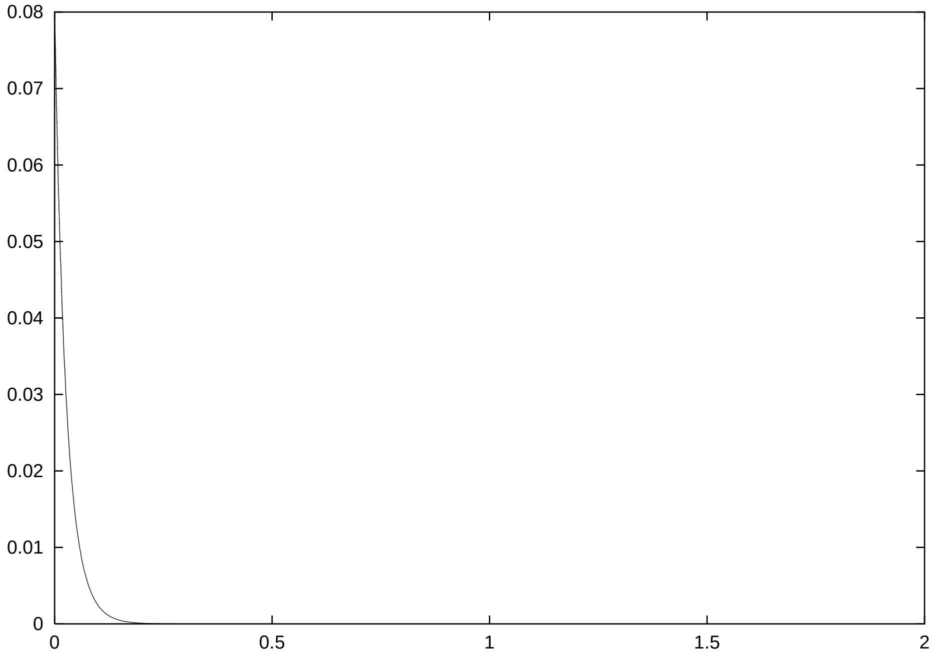

Abbildung 5: Zeitlicher Verlauf der Energie des Korrekturfeldes im Falle der reinen Couette-Strömung ($\psi = 0°$) bei einer Reynoldszahl von $Re = 4800$

Literatur

[BB88] Boberg, L. und U. Brosa: *Onset of turbulence in a pipe.* Z. Naturforsch., 43 a:697–726, 1988.

[Bro86] Brosa, U.: *Linear analysis of the currents in a pipe.* Z. Naturforsch., 41 a: 1141–1153, 1986.

[Dre75] Dreszer, Jerzy (Herausgeber): *Mathematik-Handbuch für Technik und Naturwissenschaft.* VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1. Auflage, 1975.

[RN95] Rummler, Bernd und Andreas Noske: *Der Einsatz des Computeralgebra-Systems Maple V bei der Entwicklung eines Programmpakets zur Berechnung der 3dimensionalen instationären ebenen Couette-Strömung.* Preprint Nr. 22, Fakultät für Mathematik, Universität Magdeburg, 1995.

[Rum97] Rummler, Bernd: *The eigenfunctions of the Stokes operator in special domains. I.* Z. angew. Math. Mech., 77(8):619–627, 1997.

[Rum98] Rummler, Bernd: *Die allgemeine Rohrströmung.* Unveröffentlicht, 1998.

[Sch98] Schlegel, Michael: *Untersuchung der gemischten Couette-/Poiseuille-Strömung im Kanal.* Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik, Universität Magdeburg, 1998.