2000 г. сентябрь — октябрь *т. 55, вып. 5(335)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.218

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПОЛЯ

А. Сошников

Статья содержит как хорошо известные, так и новые результаты о детерминантных случайных полях. В первом разделе статьи изложено доказательство теоремы о необходимом и достаточном условии для существования детерминантного случайного поля с эрмитовым ядром и также некоторые смежные технические результаты. Второй раздел посвящен примерам детерминантных случайных полей из квантовой механики, статистической механики, теории случайных матриц, теории вероятностей, теории представлений и эргодической теории. В связи с теорией процессов восстановления мы охарактеризовали все эрмитовы детерминантные случайные поля с независимыми одинаково распределенными спейсингами. В третьем разделе исследуются эргодические свойства трансляционно инвариантных детерминантных случайных точечных полей. В частности, доказываются свойство перемешивания любой кратности и абсолютная непрерывность спектра. В последней секции обсуждается доказательство центральной предельной теоремы для числа частиц в растущем интервале и функциональной центральной предельной теоремы для эмпирической функции распределения спейсингов.

Библиография: 92 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Определение и общие свойства детерминантных случайных точечных полей

Обозначим через E фазовое пространство частиц и через X – пространство конечных или счетных конфигураций частиц в E. В общем случае E является произвольным сепарабельным хаусдорфовым пространством, но для наших целей достаточно предполагать, что

$$E = \prod_{j=1}^{m} E_j, \quad \text{где} \quad E_j \cong \mathbb{R}^d \ (\text{или } \mathbb{Z}^d). \tag{1.1}$$

Если не оговорено противное, мы будем всегда предполагать, что $E = \mathbb{R}^d$, поскольку в случае (1.1) все рассуждения и доказательства остаются без изменения. Мы предполагаем, что каждая конфигурация $\xi = (x_i)$, $x_i \in E$, $i \in \mathbb{Z}^1$ (или $\mathbb{Z}^1_+$, если $d > 1$), является локально конечной, т.е. для каждого компактного множества $K \subset E$ число частиц, попавших в K, $\#_K(\xi) = \#(x_i \in K)$, конечно. Частицы в ξ упорядочены каким-нибудь естественным образом, например, $x_i \leqslant x_{i+1}$ для $d = 1$ и если $d > 1$, то $x_i = x_{i+1}$, или

$$|x_i| = \left(\sum_{j=1}^{d} (x_i^{(j)})^2\right)^{1/2} < |x_{i+1}| = \left(\sum_{j=1}^{d} (x_{i+1}^{(j)})^2\right)^{1/2}, \tag{1.2}$$

где $x_i = \bigl(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}\bigr)$, или $|x_i| = |x_{i+1}|$ и существует $1 \leqslant r \leqslant d$ такое, что $x_i^{(j)} \leqslant x_{i+1}^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant r-1$, и $x_i^{(r)} < x_{i+1}^{(r)}$.

Для того чтобы построить σ-алгебру измеримых подмножеств X, мы определим сначала так называемые цилиндрические множества. Пусть $B \subset E$ – произвольное борелевское множество и $n \geqslant 0$. Цилиндрическими множествами называются множества вида $C_n^B = \{\xi \in X : \#_B(\xi) = n\}$. Определим $\mathscr{B}$ как σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами (т.е. $\mathscr{B}$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей все C_n^B).

Определение 1. Пусть P есть некоторая вероятностная мера на $(X, \mathscr{B})$. Тогда триплет $(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$ называется случайным точечным полем.

В связи с определением 1 возникает естественный вопрос о способе задания вероятностных мер на $(X, \mathscr{B})$. Соответствующая теория была построена Ленардом в [1]–[3] для произвольного локально компактного пространства Хаусдорфа E со второй аксиомой счетности. В той или иной степени рассуждения опираются на фундаментальную теорему Колмогорова в теории случайных процессов [4] и становятся особенно простыми в случае (1.1). Пусть t и s – два вектора из E с рациональными координатами, $t = \bigl(t^{(1)}, \dots, t^{(d)}\bigr)$, $s = \bigl(s^{(1)}, \dots, s^{(d)}\bigr)$. Обозначим открытый параллелепипед $\bigl\{x = \bigl(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}\bigr) \in E : x^{(j)} = t^{(j)} + \theta_j(s^{(j)} - t^{(j)}),\ 0 < \theta_j < 1,\ j = 1, \dots, d\bigr\}$ через $\sqcap_{t,s}$. Обозначим семейство конечных объединений (открытых, замкнутых или полузамкнутых) параллелепипедов с рациональными t, s через $\mathscr{R}$. Предположим, что мы построили совместное распределение неотрицательных целочисленных случайных величин η_D, $D \in \mathscr{R}$ (идентифицируемое далее с $\#_D$), таким образом, что выполняется следующее свойство конечной аддитивности:

$$\eta_D = \sum_{i=1}^{n} \eta_{D_i} \quad (\text{п.в.}), \tag{1.3}$$

если $D = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i$, $D, D_i \in \mathscr{R}$, $i = 1, \dots, n$. Из конечной аддитивности (1.3) немедленно вытекает счетная аддитивность

$$\eta_D = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{D_i} \quad \text{(п.в.)}, \tag{1.4}$$

$D = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} D_i$, $D, D_i \in \mathscr{R}$, $i = 1, 2, \dots$. (Конечно, здесь существенен тот факт, что η_D принимают только неотрицательные целочисленные значения!)

Далее, нетрудно проверить, что совместное распределение случайных величин $\#_D = \eta_D$, $D \in \mathscr{R}$, с условием (1.3) (или (1.4)) единственным образом определяет вероятностное распределение на $(X, \mathscr{B})$.

Поскольку во многих ситуациях распределение случайных величин удобно задавать через моменты, вполне обосновано следующее определение.

Определение 2. Локально интегрируемая функция $\rho_k \colon E^k \to \mathbb{R}^1_+$ называется k-точечной корреляционной функцией случайного точечного поля $(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$, если для произвольных непересекающихся борелевских подмножеств $A_1, \dots, A_m$ пространства E при произвольных $k_i \in \mathbb{Z}^1_+$, $i = 1, \dots, m$, $\sum_{i=1}^{m} k_i = k$, имеет место следующее равенство:

$$\mathsf{E} \prod_{i=1}^{m} \frac{(\#_{A_i})!}{(\#_{A_i} - k_i)!} = \int_{A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}} \rho_k(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k, \tag{1.5}$$

где через E мы обозначаем математическое ожидание.

В частности, $\rho_1(x)$ является одночастичной плотностью, так как

$$\mathsf{E}\#_A = \int_A \rho_1(x)\, dx$$

для произвольного борелевского $A \subset E$. В общем случае $k \geqslant 1$ $\rho_k(x_1, \dots, x_k)$ удовлетворяет следующей вероятностной интерпретации: пусть $[x_1, x_i + dx_i]$, $i = 1, \dots, k$, есть бесконечно малые параллелепипедные окрестности x_i, тогда $\rho_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ $dx_1 \cdots dx_k$ – вероятность найти по частице в каждом из $[x_1, x_i + dx_i]$. Проблема существования и единственности случайного точечного поля, заданного его корреляционными функциями, изучалась в [1]–[3]. Не удивительно, что в работах Ленарда прослеживаются отчетливые параллели с классической проблемой моментов [5], [6]. В частности, случайное точечное поле единственным образом определяется своими корреляционными функциями, если распределение случайных величин $\{\#_A\}$ единственным образом определяется моментами. В работе [1] Ленардом было получено достаточное условие для единственности:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+j)!} \int_{A^{k+j}} \rho_{k+j}(x_1, \dots, x_{k+j})\, dx_1 \cdots dx_{k+j} \right)^{-\frac{1}{k}} = \infty \tag{1.6}$$

для произвольного ограниченного борелевского подмножества $A \subset E$ и произвольного целого $j \geqslant 0$. На самом деле нетрудно заметить, что из расходимости ряда при $j = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \int_{A^k} \rho_k(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k \right)^{-\frac{1}{k}} = \infty, \tag{1.6$'$}$$

следует расходимость (1.6) для произвольного $j \geqslant 0$. В работах [2], [3] Ленардом было получено необходимое и достаточное условие существования случайного точечного поля с заданными корреляционными функциями.

Теорема 1 (Ленард). *Локально интегрируемые функции* $\rho_k\colon E^k \to \mathbb{R}^1$, $k = 1, 2, \dots$, *являются корреляционными функциями некоторого случайного точечного поля тогда и только тогда, когда выполнены приведенные ниже условия* a), b).

a) *Условие симметричности*: ρ_k *инвариантно относительно действия любой группы симметрии* S_k, *т.е.*

$$\rho_k\bigl(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}\bigr) = \rho_k(x_1, \dots, x_k) \tag{1.7}$$

для произвольного $\sigma \in S_k$.

b) *Условие положительности*: *для произвольного конечного набора измеримых функций с компактным носителем* $\varphi_k\colon E^k \to \mathbb{R}^1$, $k = 0, 1, \dots, N$, *таких, что*

$$\varphi_0 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} \varphi_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \geqslant 0 \tag{1.8}$$

для всех $\xi = (x_i) \in X$, *должно выполняться неравенство*

$$\varphi_0 + \sum_{k=1}^{N} \int_{E^k} \varphi_k(x_1, \dots, x_k)\rho_k(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k \geqslant 0. \tag{1.9}$$

Доказательство необходимости условий a) и b) элементарно, поскольку оба условия имеют простую вероятностную интерпретацию. В частности, условие положительности означает, что для определенного класса неотрицательных случайных величин (1.8) математическое ожидание должно быть неотрицательным. Доказательство достаточности условий a) и b) намного более нетривиально и основано на аналоге теоремы Рисса о представлении неотрицательного линейного функционала и на теореме Рисса–Крейна (дальнем родственнике теоремы Хана–Банаха). Следует отметить еще раз, что результаты Ленарда справедливы для произвольного локально компактного пространства Хаусдорфа E со второй аксиомой счетности.

Несколько более слабый (но по-прежнему безнадежно неэффективный!) вариант условия положительности может быть получен приближением φ_k сверху линейными комбинациями индикаторов. Обозначим через $\mathscr{P}_k$ класс многочленов (от k переменных), принимающих неотрицательные значения на $\underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{\longleftarrow\ k \text{ раз}\ \longrightarrow}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Поскольку многочлены

$$\biggl\{\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{m_i - 1} (x_i - j),\ m_i \geqslant 0\biggr\}$$

образуют линейный базис в векторном пространстве всех многочленов от k переменных, мы можем представить произвольный многочлен $q(x_1, \dots, x_k) \in \mathscr{P}_k$ в виде

$$q(x_1, \dots, x_k) = \sum_{m_1, \dots, m_k \geqslant 0} a_{m_1, \dots, m_k} \cdot \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{m_i - 1} (x_i - j). \tag{1.10}$$

Условие положительности.* Для произвольного $q \in \mathscr{P}_k$, $k \geqslant 1$, и произвольных ограниченных борелевских множеств $A_1, \dots, A_k \subset E$ должно быть выполнено следующее условие:

$$a_{0,\dots,0} + \sum_{m \geqslant 1} \sum_{m_1+\dots+m_k=m} a_{m_1,\dots,m_k} \times \int_{\prod_{i=1}^k A_i^{m_i}} \rho_m(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \cdots dx_m \geqslant 0. \tag{1.11}$$

В самом деле, левая часть неравенства (1.11) равна

$$\mathsf{E} q(\#_{A_1}, \dots, \#_{A_k}) = \mathsf{E}\biggl[a_{0,\dots,0} + \sum_{m \geqslant 1} \sum_{m_1+\dots+m_k=m} a_{m_1,\dots,m_k} \times \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_m} \chi_{A_1^{m_1} \times \dots \times A_k^{m_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})\biggr]. \tag{1.12}$$

Полезно отметить, что условие положительности* аналогично условию на моменты неотрицательной целочисленной случайной величины.

В данной работе мы изучаем специальный класс случайных точечных полей, определенных Маччи в [7] (см. также [8]). Пусть $K\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ – некоторый неотрицательный оператор, который локально является оператором с конечным следом. Последнее условие означает, что для произвольного борелевского ограниченного множества $B \subset \mathbb{R}^d$ оператор $K \cdot \chi_B$ (где $\chi_B(x)$ – индикатор B) является оператором с конечным следом, так что

$$K \geqslant 0, \qquad \operatorname{Tr}(\chi_B K \chi_B) < +\infty. \tag{1.13}$$

Ядро $K(x,y)$ оператора K определено с точностью до множества лебеговской меры нуль в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Для наших целей удобно выбрать $K(x,y)$ так, чтобы для произвольного ограниченного измеримого B и произвольного положительного целого n

$$\operatorname{Tr}\bigl((\chi_B K \chi_B)^n\bigr) = \int_{B^n} K(x_1,x_2) \cdot K(x_2,x_3) \cdot \ldots \cdot K(x_n,x_1)\, dx_1 \cdots dx_n. \tag{1.14}$$

Доказательство возможности такого выбора следует из лемм 1 и 2.

Лемма 1 ([9], [10; замечание 3.4]). *Пусть K – оператор на $L^2(\mathbb{R}^d)$ с конечным следом. Тогда его операторное ядро может быть выбрано таким образом, что $M(x,y) \equiv K(x, x+y)$ является непрерывной функцией от y со значениями в $L^1(\mathbb{R}^d)$. Более того, если $m(y) = \int M(x,y)\,dx$, то $\operatorname{Tr} K = m(0) = \int K(x,x)\,dx$.*

Доказательство. Мы приводим доказательство только для случая, когда K неотрицателен. Общий случай аналогичен. Пусть $\{\lambda_j\}_{j \geqslant 1}$ – набор ненулевых собственных значений и $\{\varphi_j\}_{j \geqslant 1}$ – набор соответствующих собственных векторов оператора K. Каноническая форма оператора K (как самосопряженного компактного оператора) имеет вид

$$K = \sum_{j \geqslant 1} \lambda_j \cdot (\varphi_j, \cdot\,) \cdot \varphi_j. \tag{1.15}$$

Зафиксируем $y \in \mathbb{R}^d$ и рассмотрим $M(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot \varphi_j(x) \cdot \overline{\varphi_j(x+y)}$ как функцию x. Поскольку

$$\|\varphi_j(\,\cdot\,) \cdot \overline{\varphi_j(\,\cdot\,+y)}\,\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_j(x) \cdot \overline{\varphi_j(x+y)}|\,dx \leqslant \|\varphi_j\|_2 \cdot \|\varphi_j\|_2 = 1,$$

то ряд, определяющий $M(\,\cdot\,,y)$, сходится в $L^1(\mathbb{R}^d)$ при каждом y и $\|M(\,\cdot\,,y)\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \operatorname{Tr} K < +\infty$. Рассмотрим функцию $K(x,y) \equiv M(x,y-x)$; эта функция определена для почти всех $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ и задает ядро оператора K. L^1-непрерывность $M(\,\cdot\,,y)$ следует из неравенства

$$\Big\|\sum_{j\geqslant 1} \lambda_j \big(\varphi_j(\,\cdot\,)\overline{\varphi_j(\,\cdot+y_1)} - \varphi_j(\,\cdot\,)\cdot\overline{\varphi_j(\,\cdot\,+y_2)}\,\big)\Big\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot \|\varphi_j\|_2 \cdot \|\varphi_j(\,\cdot\,+y_1) - \varphi_j(\,\cdot\,+y_2)\|_2 + \sum_{j\geqslant N} \lambda_j.$$

Выбирая N достаточно большим, получаем $\sum_{j\geqslant N} \lambda_j < \frac{\varepsilon}{2}$. Выбирая y_1 достаточно близким к y_2 так, чтобы при любом $1 \leqslant j \leqslant N$

$$\|\varphi_j(\,\cdot\,) - \varphi_j(\,\cdot\,+y_2-y_1)\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2\sum_{j=1}^{N} \lambda_j},$$

мы получаем, что первая сумма также меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$.

Используя лемму 1, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *Пусть K – неотрицательный оператор на $L^2(\mathbb{R}^d)$, локально имеющий конечный след. Тогда его интегральное ядро может быть выбрано таким образом, что для каждого ограниченного борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^d$ и произвольного положительного целого k функция*

$$M_B^{(k)}(x,y) = \big(\underbrace{(K \cdot \chi_B) \cdot \ldots \cdot (K \cdot \chi_B)}_{\longleftarrow\, k \text{ раз} \,\longrightarrow}\big)(x, x+y)$$

является непрерывной функцией от y со значениями в $L^2(B)$. Более того,

$$\operatorname{Tr}(\chi_B K \chi_B)^k = \int_{B^k} K(x_1,x_2) \cdot \ldots \cdot K(x_k,x_1)\,dx_1 \cdots dx_k.$$

Доказательство. Пусть $K_n = \chi_{[-n,n]^d} K \chi_{[-n,n]^d}$. Согласно лемме 1 мы можем выбрать ядро $K_n(x,y)$ такое, что $K_n(\,\cdot\,,\,\cdot\,+y)$ непрерывно по y в $L^1([-n,n]^d)$-норме. Обозначим $M_n(x,y) = K_n(x,x+y)$. Поскольку $K_{n+1}(x,y) = K_n(x,y)$ для почти всех $(x,y) \in [-n,n]^d \times [-n,n]^d$, мы заключаем, что для почти всех $|y| \leqslant n$ справедливо равенство $M_{n+1}(x,y) = M_n(x,y)$ для п.в. $|x| \leqslant n - |y|$. L^1-непрерывность $M_{n+1}(\,\cdot\,,y)$, $M_n(\,\cdot\,,y)$ позволяет заменить “для почти всех $|y| \leqslant n$” на “для всех $|y| \leqslant n$”. Тем самым, для каждого y и для почти всех x предельные значения $M_n(x,y)$ совпадают.

Обозначим это предельное значение через $M(x,y)$. Функция $M(\,\cdot\,,y)$ наследует локальную L^1-непрерывность функции $\{M_n(\,\cdot\,,y)\}$. Далее, пусть, как и ранее, B – некоторое ограниченное борелевское подмножество $\mathbb{R}^d$. Тогда, полагая $K_B=\chi_B K\chi_B$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
&\int\Bigl|\underbrace{(K_B\cdot\ldots\cdot K_B)}_{\longleftarrow k \text{ раз} \longrightarrow}(x,x+y_1)-\underbrace{(K_B\cdot\ldots\cdot K_B)}_{\longleftarrow k \text{ раз} \longrightarrow}(x,x+y_2)\Bigr|\,dx \\
&\quad\leqslant\int|K_B(x,x_1)|\cdot\ldots\cdot|K_B(x_{k-2},x_{k-1})| \\
&\qquad\times|K_B(x_{k-1},x+y_1)-K_B(x_{k-1},x+y_2)|\,dx_1\cdots dx_{k-1}\,dx \\
&\quad\leqslant\int\biggl(\prod_{i=1}^{k-2}K_B(x_i,x_i)\biggr)\cdot K_B(x,x)^{1/2}\cdot K_B(x_{k-1},x_{k-1})^{1/2} \\
&\qquad\times|K_B(x_{k-1},x+y_1)-K_B(x_{k-1},x+y_2)|\,dx_1\cdots dx_{k-1}\,dx
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

(в последнем неравенстве мы воспользовались положительной определенностью $K_B(x,y)$). Интегрируя по $x_1,\ldots,x_{k-2}$, получаем

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{Tr}K_B)^{k-2}\cdot\int K_B(x,x)^{1/2}\cdot K_B(x_{k-1},x_{k-1})^{1/2} \\
&\qquad\times|K_B(x_{k-1},x+y_1)-K_B(x_{k-1},x+y_2)|\,dx\,dx_{k-1}.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Заметим, что подынтегральная функция в (1.17) ограничена сверху величиной

$$
\begin{aligned}
&K_B(x,x)^{1/2}\cdot K_B(x_{k-1},x_{k-1})^{1/2}\cdot\Bigl(K_B(x_{k-1},x_{k-1})^{1/2}\cdot K_B(x+y_1,x+y_1)^{1/2} \\
&\qquad+K_B(x_{k-1},x_{k-1})^{1/2}\cdot K_B(x+y_2,x+y_2)^{1/2}\Bigr) \\
&\quad\leqslant K_B(x_{k-1},x_{k-1})\cdot\Bigl(\frac12K_B(x,x)+\frac12K_B(x+y_1,x+y_1) \\
&\qquad+\frac12K_B(x,x)+\frac12K_B(x+y_2,x+y_2)\Bigr) \\
&\quad=K_B(x_{k-1},x_{k-1})\cdot K_B(x,x)+\frac12K_B(x_{k-1},x_{k-1})\cdot K_B(x+y_1,x+y_1) \\
&\qquad+\frac12K_B(x_{k-1},x_{k-1})\cdot K_B(x+y_2,x+y_2).
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Выберем произвольно большое N. Интеграл в (1.17) представляется в виде суммы двух интегралов, первый – по множеству

$$
\bigl\{(x,x_{k-1}):K_B(x,x)^{1/2}\cdot K_B(x_{k-1},x_{k-1})^{1/2}\leqslant N\bigr\},
$$

второй – по его дополнению. Значение первого интеграла ограничено величиной

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{Tr}K_B)^{k-2}\cdot N\cdot\int\bigl|K_B(x_{k-1},x_{k-1}+(x-x_{k-1})+y_1) \\
&\qquad-K_B(x_{k-1},x_{k-1}+(x-x_{k-1})+y_2)\bigr|\,dx_{k-1}\,dx.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Поскольку $K_B(\,\cdot\,,\,\cdot\,+y)$ равномерно непрерывна в L^1-норме, когда y принимает значения в компактном множестве B, мы заключаем, что (1.19) стремится к нулю при $y_1 \to y_2$. Второй интеграл ограничен сверху значением интеграла от выражения в правой части (1.18) по множеству

$$\big\{(x, x_{k-1}) : K_B(x,x)^{1/2} \cdot K_B(x_{k-1}, x_{k-1})^{1/2} > N\big\}. \tag{1.20}$$

При достаточно большом N мера Лебега множества (1.20) произвольно мала. Из интегрируемости $K_B(x,x) \cdot K_B(x_{k-1}, x_{k-1})$ следует, что второй интеграл также стремится к нулю. Из приведенного ниже замечания 2 вытекает, что (1.14) является следствием L^1-непрерывности ядра в окрестности диагонали.

Определение 3. Случайное точечное поле в E называется детерминантным (или фермионным), если его n-точечные корреляционные функции имеют вид

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det\big(K(x_i, x_j)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}. \tag{1.21}$$

В случае $E = \bigsqcup_{j=1}^m E_j$, $E_j \cong \mathbb{R}^d$, это определение принимает следующий вид. Пусть K – интегральный оператор с конечным следом, действующий на $\underbrace{L^2(\mathbb{R}^d) \oplus \dots \oplus L^2(\mathbb{R}^d)}_{\longleftarrow\, m \text{ раз} \,\longrightarrow}$. Тогда K имеет матричнозначное ядро $\big(K_{rs}(x,y)\big)_{1 \leqslant r,s \leqslant m}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Определение 3′. Случайное точечное поле в E называется детерминантным (или фермионным), если его n-точечные корреляционные функции имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_n(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1i_1}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mi_m})&\\ = \det\big(K_{rs}(x_{ri}, x_{sj})\big)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant i_s,\ s=1,\dots,m,\\ 1 \leqslant i \leqslant i_r,\ r=1,\dots,m}}&\end{aligned} \tag{1.21′}$$

где $n = i_1 + i_2 + \dots + i_m$, $x_{ri} \in E_r$, $1 \leqslant r \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant i_r$.

Замечание 1. В случае, когда ядро является эрмитово-симметричным, неотрицательность n-точечных корреляционных функций влечет неотрицательную определенность ядра $K(x,y)$ и, как следствие, неотрицательность оператора K. Следует однако отметить, что существуют детерминантные случайные точечные поля, соответствующие неэрмитовым ядрам (см. замечание после (1.36) и примеры в разделах 2.2 и 2.5).

Замечание 2. Условие (1.13) выполнено для всех непрерывных неотрицательно определенных ядер (см. [11; раздел III.10] или [12; т. 3, раздел XI.4]). В общей ситуации, когда $K(x,x)$ локально суммируемо, из неотрицательной определенности $K(x,y)$ следует, что K_B – оператор Гильберта–Шмидта и мы можем воспользоваться теоремой Гохберга–Крейна [11; раздел III.10, теорема 10.1], которая утверждает, что неотрицательный оператор Гильберта–Шмидта A имеет конечный след тогда и только тогда, когда

$$\varlimsup_{h \to 0} \frac{1}{(2h)^{2d}} \int \prod_{j=1}^{d} \big[2h - |x^j - y^j|\big]_+ A(x,y)\,dx\,dy < \infty, \tag{1.22}$$

где $t_+ = \max(t, 0)$, $x = (x^1, \dots, x^d)$, $y = (y^1, \dots, y^d)$, причем $\operatorname{Tr} A$ в этом случае равен в точности (1.22). Нетрудно видеть, что L^1-непрерывность $A(\,\cdot\,,\,\cdot\,+y)$ влечет

$\operatorname{Tr} A = \int A(x,x)\,dx$. Согласно классической формуле Фредгольма (см., например, [13; гл. 3]), если оператор A имеет непрерывное (в обычном смысле) ядро и конечный след, то справедлива формула

$$\operatorname{Tr}\bigl(\wedge^n(A)\bigr) = \frac{1}{n!}\int \det\bigl(A(x_i,x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\,dx_1\cdots dx_n. \tag{1.23}$$

В общем случае ядро $K(x,y)$ может не быть непрерывной функцией. Однако из (1.14) и теоремы Лидского (см., например, [12; т. IV, раздел XIII.17] или [13; теорема 3.7]) следует, что

$$\int_{B^n} K(x_1,x_2)\cdot\ldots\cdot K(x_n,x_1)\,dx_1\cdots dx_n = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^n(K_B), \tag{1.24}$$

$$\operatorname{Tr}\bigl(\wedge^n(K_B)\bigr) = \sum_{j_1<\cdots<j_n}\lambda_{j_1}(K_B)\cdot\ldots\cdot\lambda_{j_n}(K_B). \tag{1.25}$$

Комбинируя (1.24) и (1.25), мы получаем

$$\operatorname{Tr}\bigl(\wedge^n(K_B)\bigr) = \frac{1}{n!}\int_{B^n}\det\bigl(K(x_i,x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\,dx_1\cdots dx_n. \tag{1.26}$$

Поскольку $L^1(B)$-непрерывность $K(\,\cdot\,,\,\cdot\,+y)$ влечет также

$$\operatorname{Tr}(K\cdot\chi_{B_1})\cdot\ldots\cdot(K\cdot\chi_{B_n}) = \int_{B_1\times\cdots\times B_n} K(x_1,x_2)\cdot\ldots\cdot K(x_n,x_1)\,dx_1\cdots dx_n$$

(доказательство аналогично доказательству леммы 2), мы также получаем

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}\bigl((K\cdot\chi_{B_1})\wedge\cdots\wedge(K\cdot\chi_{B_n})\bigr)\\ &\qquad=\frac{1}{n!}\int\det\bigl(K(x_i,x_j)\cdot\chi_{B_j}(x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\,dx_1\cdots dx_n.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Определение 4. Пусть ядро K удовлетворяет предположениям леммы 2. Мы будем говорить, что это ядро задает детерминантное случайное точечное поле $(X,\mathscr{B},\mathsf{P})$, если справедлива формула (1.21).

Теорема 2. *Пусть $(X,\mathscr{B},\mathsf{P})$ – детерминантное случайное точечное поле с ядром K. Тогда для любого конечного числа непересекающихся ограниченных борелевских множеств $B_j\subset E$, $j=1,\dots,n$, производящая функция вероятностного распределения $\#_{B_j}=\#\{x_i\in B_j\}$ задается формулой*

$$\mathsf{E}\prod_{j=1}^{n} z_j^{\#_{B_j}} = \det\biggl(\operatorname{Id}+\chi_B\sum_{j=1}^{n}(z_j-1)\cdot K\cdot\chi_{B_j}\biggr). \tag{1.28}$$

Замечание 3. Формула (1.28) есть равенство двух целых функций. Правая часть (1.28) корректно определена как определитель Фредгольма оператора с конечным следом (см., например, [12; т. IV, раздел XIII.17] или [13; раздел 3]).

Напомним, что по определению

$$\mathsf{E}\prod_{j=1}^{n} z^{\#_{B_j}} = \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} \mathsf{P}\big(\#_{B_j}=k_j,\ j=1,\dots,n\big)\cdot\prod_{j=1}^{n} z_j^{k_j} \tag{1.29}$$

и

$$\begin{aligned}\det\Big(\mathrm{Id}+\chi_B\sum_{j=1}^{n}(z_j-1)\cdot K\cdot\chi_{B_j}\Big)\\ = 1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m}(z_{j_\ell}-1)\cdot\mathrm{Tr}\big(\chi_B\cdot K\cdot\chi_{B_{j_1}}\wedge\dots\wedge\chi_B\cdot K\cdot\chi_{B_{j_m}}\big).\end{aligned} \tag{1.30}$$

Доказательство теоремы 2. Разложение Тейлора производящей функции в окрестности $(z_1,\dots,z_n)=(1,\dots,1)$ задается формулой

$$\mathsf{E}\prod_{j=1}^{n} z_j^{\#_{B_j}} = 1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m_1+\dots+m_n=m}\mathsf{E}\prod_{j=1}^{n}\frac{(\#_{B_j})!}{(\#_{B_j}-m_j)!\,(m_j)!}\cdot\prod_{j=1}^{n}(z_j-1)^{m_j}. \tag{1.31}$$

Радиус сходимости (1.30) равен бесконечности, поскольку

$$\mathrm{Tr}\big(K\cdot\chi_{B_{j_1}}\wedge\dots\wedge K\cdot\chi_{B_{j_m}}\big)\leqslant\frac{1}{m!}\,\mathrm{Tr}(K\cdot\chi_B)^m,\quad \text{где}\quad B=\bigsqcup_{j=1}^{n}B_j. \tag{1.32}$$

Следовательно, достаточно проверить, что коэффициенты в (1.30) и (1.31) совпадают. Для случая $n=1$ это следует из (1.5), (1.21) и (1.26). Используя (1.27) вместо (1.26), данное утверждение можно доказать и для случая $n\geqslant 1$.

Замечание 4. Теорема 2 хорошо известна в теории случайных точечных полей (см. [8; с. 140, упр. 5.4.9]) и в теории случайных матриц (см. [14]).

Как мы уже отмечали выше, если оператор K задает детерминантное случайное точечное поле, то K является неотрицательным вследствие неотрицательности его корреляционных функций. Из теоремы 2 (формула (1.28)) также следует, что K должен быть ограничен сверху единичным оператором, т.е. $K\leqslant 1$. В самом деле, предположим от противного, что $\|K\|>1$. Тогда существует ограниченное борелевское подмножество $B\subset E$ такое, что $\|K_B\|>1+\frac{\|K\|-1}{2}>1$. Пусть $\lambda_1(K_B)\geqslant\lambda_2(K_B)\geqslant\lambda_3(K_B)\geqslant\cdots$ – собственные значения оператора K_B. Выберем $0<z_0<1$ такое, что $1+(z_0-1)\cdot\lambda_1(K_B)=0$. Тогда $\mathsf{E}z_0^{\#_B}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(\#_B=k)z_0^k=\det(\mathrm{Id}+(z_0-1)\cdot K_B)=$ (согласно теореме XIII.106 из [12]) $=\prod_{j\geqslant 1}(1+(z_0-1)\cdot\lambda_j(K_B))=0$. Следовательно, $\mathsf{P}(\#_B=k)=0$ для любого k, т.е. мы пришли к противоречию. С другой стороны, предположим, что $0\leqslant K\leqslant 1$, и пусть (1.28) задает нечто, что, как мы надеемся, является распределением неотрицательных целочисленных случайных величин $\{\#_B\}$.

Лемма 3. *Пусть* $0 \leqslant K \leqslant 1$ *и* K *– оператор с локально конечным следом. Тогда* (1.28) *задает распределение неотрицательных целочисленных случайных величин* $\{\#_B\}$ *таких, что если* $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$, *то*

$$\#_B = \sum_{i=1}^n \#_{B_i} \quad \text{(п.в.).} \tag{1.33}$$

Нам необходимо доказать три утверждения: во-первых, что (1.28) задает некоторые конечномерные распределения; во-вторых, что эти конечномерные распределения удовлетворяют условию аддитивности (1.33); и, в-третьих, что эти конечномерные распределения согласованы и, следовательно, мы можем применить фундаментальную теорему Колмогорова для доказательства существования распределения $\{\#_B\}$. Поскольку определитель Фредгольма в (1.28) равен 1 при $z_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, первое утверждение будет доказано, если мы покажем неотрицательность коэффициентов Тейлора разложения определителя Фредгольма при $z_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $0 \leqslant z_i \leqslant 1$, $i = 1, \dots, n$, и предположим сначала, что $\|K\| < 1$ (утверждение в случае $\|K\| = 1$ будет доказано далее с помощью предельного перехода). Пусть $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$. Тогда $\|K_B\| < 1$ и $(\mathrm{Id} - K_B)^{-1}$ – ограниченный линейный оператор такой, что $(\mathrm{Id} - K_B)^{-1} - \mathrm{Id} = K_B \cdot (\mathrm{Id} - K_B)^{-1}$ – оператор с конечным следом. Применяя теорему XIII из [12; т. 4, с. 105], мы получаем

$$\begin{aligned}
&\det\Bigl(\mathrm{Id} + \chi_B \sum_{j=1}^n (z_j - 1) \cdot K \cdot \chi_{B_j}\Bigr) \\
&\quad= \det\Bigl((\mathrm{Id} - K_B) \cdot \Bigl(\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^n z_j \cdot (\mathrm{Id} - K_B)^{-1} \cdot \chi_B \cdot K \cdot \chi_{B_j}\Bigr)\Bigr) \\
&\quad= \det(\mathrm{Id} - K_B) \cdot \det\Bigl(\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^n z_j \cdot (\mathrm{Id} - K_B)^{-1} \cdot \chi_B \cdot K \cdot \chi_{B_j}\Bigr) \\
&\quad= \det(\mathrm{Id} - K_B) \cdot \sum_{k=1}^\infty \mathrm{Tr}\Bigl(\wedge^k \Bigl(\sum_{j=1}^n z_j \cdot (\mathrm{Id} - K_B)^{-1} \cdot \chi_B \cdot K \cdot \chi_{B_j}\Bigr)\Bigr) \\
&\quad= \sum_{k_1, \dots, k_n \geqslant 0} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!} \prod_{j=1}^n z_j^{k_j} \cdot \det(\mathrm{Id} - K_B) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{Tr}\bigl(\wedge_{j=1}^n \bigl(\wedge^{k_j} \bigl(\chi_{B_j} \cdot (\mathrm{Id} - K_B)^{-1} \cdot \chi_B \cdot K \cdot \chi_{B_j}\bigr)\bigr)\bigr).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Как следует из (1.34), с точностью до некоторых положительных множителей коэффициенты Тейлора являются следом внешнего произведения неотрицательных операторов и, следовательно, неотрицательны. Отсюда следует, что (1.28) задает некоторые конечномерные распределения.

Второе утверждение есть простое следствие теоремы 2, так как

$$\mathsf{E} \prod_{i=1}^n z^{\#_{B_i}} = \det\Bigl(\mathrm{Id} + \chi_B \sum_{i=1}^n (z - 1) K \chi_{B_i}\Bigr) = \det(\mathrm{Id} + (z - 1) \cdot K_B) = \mathsf{E} z^{\#_B},$$

и, следовательно, $\#_B = \sum_{i=1}^n \#_{B_i}$ (п.в.). Формула (1.28) задает конечномерные распределения случайных величин $\{\#_{B_i}\}$ для непересекающихся компактных множеств $\{B_i\}$. В случае пересекающихся $\{B_i\}$ мы представляем B_i в виде объединения $\sqcup C_{k_i}$ непересекающихся множеств C_k, задаем распределения $\#_{C_k}$ и, пользуясь свойством аддитивности (1.33), задаем распределения случайных величин $\#_{B_i}$.

Докажем теперь согласованность распределений случайных величин $\#_{B_i}$. Вследствие условия аддитивности (1.33), достаточно доказать эту согласованность для непересекающихся $B_1, \dots, B_{n+1}$. Последнее утверждение очевидным образом следует из соотношения

$$\det\biggl(\mathrm{Id} + \chi_B \sum_{j=1}^n (z_j - 1) \cdot K \cdot \chi_{B_j} + \chi_B (1-1) \cdot K \cdot \chi_{B_{n+1}}\biggr) = \det\biggl(\mathrm{Id} + \chi_B \sum_{j=1}^n (z_j - 1) \cdot K \cdot \chi_{B_j}\biggr).$$

Этим завершается доказательство леммы 3 для случая $\|K\| < 1$. Пусть теперь $\|K\| = 1$. Обозначим $K^{(\varepsilon)} := K \cdot (1-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и пусть случайные величины $\#_B^{(\varepsilon)}$ соответствуют детерминантному случайному точечному полю с ядром $K^{(\varepsilon)}$. Поскольку $\|K^{(\varepsilon)}\| < 1$, из приведенных выше аргументов следует справедливость леммы 3 для $K^{(\varepsilon)}$. Нетрудно проверить, что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathsf{E} \prod_{i=1}^n z_i^{\#_{B_i}^{(\varepsilon)}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \mathsf{E} \prod_{j=1}^n \frac{(\#_{B_j^{(\varepsilon)}})!}{(\#_{B_j^{(\varepsilon)}} - m_j)! \cdot (m_j)!} \cdot \prod_{j=1}^n (z_1 - 1)^{m_j}$$

равномерно сходится (вместе со всеми производными) на компактных множествах к $\mathsf{E} \prod_{i=1}^n z_i^{\#_{B_i}}$. Лемма 3 доказана.

Из полученных выше результатов вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть K – эрмитов оператор на $L^2(E)$, являющийся локально оператором с конечным следом. Тогда K задает детерминантное случайное точечное поле в E тогда и только тогда, когда $0 \leqslant K \leqslant 1$. Если соответствующее случайное точечное поле существует, то оно единственно.*

Доказательство. Необходимое и достаточное условие существования случайного поля доказано выше. Единственность следует из общего критерия $(1.6')$, так как

$$\frac{1}{k!} \int_{A^k} \rho_k(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k = \mathrm{Tr}(\wedge^k(K_A)) \leqslant \frac{\mathrm{Tr}(K_A)^k}{k!} \leqslant \frac{1}{k!}\,.$$

Рассмотрим произвольное ограниченное борелевское множество $B \subset E$. Тогда $\mathrm{Tr}(K_B) = \mathsf{E}\#_B < \infty$, и, следовательно, число частиц в B конечно с вероятностью 1. Положим $X = \bigsqcup_{0 \leqslant k < \infty} C_k^B$, где, как и ранее, $C_k^B = \{\xi \in X : \#_B(\xi) = k\}$. Согласно лемме 1 мы можем выбрать ядро оператора $\chi_B \cdot K \cdot \chi_B$ так, чтобы

$$(\chi_B \cdot K \cdot \chi_B)(x, x+y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(B) \cdot \varphi_i(x) \cdot \overline{\varphi_i(x+y)}$$

была непрерывной функцией y в $L^1(B)$-норме. Предположим сначала, что $K_B < 1$. Тогда

$$L_B(x, x+y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i(B)}{1-\lambda_i(B)} \cdot \varphi_i(x) \cdot \overline{\varphi_i(x+y)} \tag{1.35}$$

также является непрерывной функцией y в $L^1(B)$-норме и задает ядро оператора $L_B = (\mathrm{Id} - K_B)^{-1} K_B$. Выбирая параллелепипеды B_j в (1.34) бесконечно малыми, можно показать, что для каждого C_k^B распределение k частиц $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_k$ в B абсолютно непрерывно по отношению к мере Лебега. Обозначая соответствующую плотность через $p_k(x_1, \dots, x_k)$, мы получаем

$$p_k(x_1, \dots, x_k) = \det(\mathrm{Id} - K_B) \cdot \det\bigl(L_B(x_i, x_j)\bigr)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}. \tag{1.36}$$

(Следует заметить, что функция (1.36) может быть неотрицательной даже для неэрмитового ядра K; нетрудно видеть, что такие ядра K должны иметь неотрицательные миноры.) Из определения k-точечных корреляционных функций следует, что

$$\begin{aligned} \rho_k(x_1, \dots, x_k) \\ = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{B^j} p_{k+j}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j})\, dx_{k+1} \cdots dx_{k+j}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Эта система уравнений может быть обращена:

$$\begin{aligned} p_k(x_1, \dots, x_k) \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_{B^j} \rho_{k+j}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j})\, dx_{k+1} \cdots dx_{k+j}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Функции $p_k(x_1, \dots, x_k)$ называются вероятностными плотностями Джаноссi (см. [8; с. 122]) или исключающими вероятностными плотностями (см. [7]). Легко проверить, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{B_j} p_j(x_1, \dots, x_j)\, dx_1 \cdots dx_j = 1. \tag{1.39}$$

Правая часть (1.36) корректно определена и при $\|K_B\| = \lambda_1(B) = 1$ (тем самым, вероятностные плотности $p_k(x_1, \dots, x_k)$ корректно определены и в этом случае тоже). В самом деле, определитель $\det(\mathrm{Id} - K_B) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - \lambda_j(B))$ как функция λ_1 имеет нуль первого порядка в точке $\lambda_1 = 1$. Можно показать, что $\det(L(x_i, x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ имеет полюс в точке $\lambda_1 = 1$ тоже первого порядка. Чтобы убедиться в этом, запишем $L = \tilde{L} + \tilde{\tilde{L}}$, где

$$\tilde{L}_{i,j} = \frac{\lambda_1(B)}{1-\lambda_1(B)} \cdot \varphi_1(x_i) \cdot \overline{\varphi_1(x_j)}, \qquad \tilde{\tilde{L}} = \sum_{\ell \geqslant 2} \frac{\lambda_\ell(B)}{1-\lambda_\ell(B)} \cdot \varphi_\ell(x_i) \cdot \overline{\varphi_\ell(x_j)}.$$

Тогда

$$\det\bigl(L(x_i, x_j)\bigr)_{1 \leqslant i,j \leqslant k} = \wedge^k\bigl(L(x_i, x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\bigr),$$

и мы воспользуемся тем, что $\operatorname{rank}(\tilde{L}) = 1$. Если 1 является кратным собственным значением K_B, например, $\lambda_1(B) = \lambda_2(B) = \dots = \lambda_m(B) = 1 > \lambda_{m+1}(B)$, то можно положить

$$\tilde{L}_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\lambda_\ell(B)}{1-\lambda_\ell(B)}\, \varphi_\ell(x_i) \cdot \overline{\varphi_\ell(x_j)}$$

и повторить вышеприведенные рассуждения.

Замечание 5. Следуя Маччи, мы назовем случайное точечное поле регулярным, если для любого борелевского множества $B \subset E$ такого, что $\#_B < \infty$ (P-п.в.), производящая функция $\mathsf{E}z^{\#_B}$ является целой. Из полученных нами результатов (см. также теорему 4 ниже) следует, что каждое детерминантное случайное точечное поле регулярно.

Замечание 6. В работе [7; теорема 12, с. 113] (см. также [8; с. 138]) Маччи по существу утверждает, что условие $0 \leqslant K < 1$ является необходимым и достаточным условием того, что интегральный оператор K, имеющий локально конечный след, задает регулярное фермионное (детерминантное, в нашей терминологии) случайное точечное поле. Как следует из доказанной выше теоремы 3, это условие является достаточным, но не необходимым (как утверждается в теореме 3, необходимое и достаточное условие состоит в том, что $0 \leqslant K \leqslant 1$). Для полноты изложения следует отметить, что Маччи изучала случай непрерывного ядра $K(x, y)$ с $\operatorname{Tr} K < \infty$.

Замечание 7. Формула (1.36) была установлена в [7; с. 113] (см. также [8; с. 138] и [14; с. 820]).

Мы заканчиваем § 1 доказательством двух утверждений общего характера относительно детерминантных случайных точечных полей.

Теорема 4.

a) *Вероятность того, что число частиц конечно, есть либо* 0, *либо* 1, *в зависимости от того, конечен* $\operatorname{Tr} K$ *или нет.*

b) *Число частиц меньше или равно* n *с вероятностью* 1 *тогда и только тогда, когда* K *является оператором конечного ранга с* $\operatorname{rank}(K) \leqslant n$.

c) *Число частиц равно* n *с вероятностью* 1 *тогда и только тогда, когда* K *является ортогональным проектором с* $\operatorname{rank}(K) = n$.

d) *Для произвольного детерминантного случайного точечного поля с вероятностью* 1 *никакие две частицы не совпадают.*

e) *Для того чтобы утверждения* a)–d) *оставались в силе при* $B \subset E$, *необходимо заменить* K *на* K_B.

Доказательство. a) Утверждение очевидно в одну сторону. В самом деле, если $\operatorname{Tr} K = \mathsf{E}\#_E < +\infty$, то $\#_E < +\infty$ с вероятностью 1. Предположим теперь, что $\operatorname{Tr} K = +\infty$. Рассмотрим монотонное поглощающее семейство компактных множеств $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ (т.е. таких множеств, что $B_i \subset B_{i+1}$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = E$). Тогда $\operatorname{Tr} K_{B_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Зафиксируем произвольно большое N. По построению семейства $\{B_j\}$ мы имеем

$$\mathsf{P}(\#_E \leqslant N) = \lim_{j\to\infty} \mathsf{P}(\#_{B_j} \leqslant N).$$

Так как

$$\mathsf{P}(\#_{B_j} \leqslant N) \leqslant 2^N \cdot \mathsf{E}2^{-\#_{B_j}} = 2^N \cdot \det\left(\mathrm{Id} - \frac{1}{2} \cdot K_{B_j}\right) \leqslant 2^N \cdot e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(K_{B_j})} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то утверждение следует.

b) Пусть $\operatorname{rank}(K)=n$. Тогда, представляя $K(x,y)=\sum_{i=1}^n \lambda_i\cdot\varphi_i(x)\cdot\overline{\varphi_i(y)}$ (п.в.) и полагая $\rho_n(x_1,\dots,x_n)=\det(K(x_i,x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, мы видим, что $\rho_m(x_1,\dots,x_m)=0$ (п.в.) для произвольного $m>n$. Следовательно,

$$\mathsf{E}\#_E\cdot(\#_E-1)\cdot\ldots\cdot(\#_E-n)=\int\rho_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_1\cdots dx_{n+1}=0,$$

откуда следует, что $\#_E\leqslant n$ с вероятностью 1.

В обратную сторону, пусть $\#_E\leqslant n$ (п.в.). Тогда мы имеем

$$\int_{B^{n+1}}\rho_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_1\dots dx_{n+1}=0$$

для произвольного ограниченного борелевского $B\subset E$, вследствие чего $\operatorname{Tr}(\wedge^{n+1}(K_B))=0$. Поскольку $K\geqslant 0$, мы получаем, что $\operatorname{rank}(K_B)\leqslant n$ для произвольного компактного B, откуда следует, что $\operatorname{rank}(K)\leqslant n$.

c) вытекает из b) и формулы

$$\mathsf{D}(\#_E)=\operatorname{Tr}(K-K^2)=\prod_{i=1}^n\lambda_i\cdot(1-\lambda_i).$$

d) Пусть $B_n=[-n,n]^d$. Достаточно показать, что для любого n с вероятностью 1 никакие две частицы не совпадают внутри B_n. Пусть ε произвольно мало. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\bigl\{\exists\, i\neq j: x_i=x_j\in B_n\bigr\}&\leqslant\mathsf{P}\bigl\{\exists\, i\neq j:|x_i-x_j|<\varepsilon,\ x_i\in B_n,\ x_j\in B_n\bigr\}\\&\leqslant\int_{B_n}\biggl(\int_{|x-y|<\varepsilon}\rho_2(x,y)\,dx\biggr)\,dy.\end{aligned}$$

Поскольку $\rho_2(x,y)$ локально суммируема, последний интеграл можно сделать сколь угодно малым, устремляя ε к нулю.

Следующий результат дает критерий слабой сходимости распределений детерминантных случайных точечных полей на цилиндрических множествах.

Теорема 5. *Пусть* P *и* P_n, $n=1,2,\dots,$ – *вероятностные меры на* $(X,\mathscr{B})$, *соответствующие детерминантным случайным точечным полям, заданным эрмитовыми ядрами* K *и* K_n. *Пусть* K_n *сходится к* K *в слабой операторной топологии и*

$$\operatorname{Tr}(\chi_B K_n\chi_B)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\operatorname{Tr}(\chi_B K\chi_B)$$

для каждого ограниченного борелевского $B\subset E$. *Тогда вероятностные меры* P_n *слабо сходятся к* P *на цилиндрических множествах.*

Доказательство. Как вытекает из [13; теорема 2.20, с. 40], в предположениях нашей теоремы справедливо следующее свойство

$$\operatorname{Tr}|(K_n-K)_B|=\|(K_n-K)_B\|_1\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{1.40}$$

Как следствие (1.40) мы имеем

$$\operatorname{Tr}(K_n\cdot\chi_{B_1}\cdot\ldots\cdot K_n\cdot\chi_{B_m})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\operatorname{Tr}(K\cdot\chi_{B_1}\cdot\ldots\cdot K\cdot\chi_{B_m}) \tag{1.41}$$

для любых компактных $B_1,\dots,B_m$.

Из (1.26) и (1.27) вытекает, что совместные моменты случайных величин $\{\#_B\}$ относительно меры P_n сходятся к совместным моментам относительно P. Поскольку моменты $\#_B$ в случае детерминантных случайных точечных полей единственным образом определяют вероятностное распределение $\#_B$, нетрудно доказать (упражнение для читателя) и сходимость вероятностных распределений на цилиндрических множествах.

Остальные разделы данной работы организованы следующим образом. Параграф 2 посвящен разнообразным примерам детерминантных случайных точечных полей, возникающих в квантовой механике, статистической механике, теории случайных матриц, теории представлений и теории вероятностей. В § 3 обсуждаются эргодические свойства трансляционно инвариантных детерминантных случайных точечных полей. Мы также отмечаем специальную роль синус-ядра $K(x,y) = \dfrac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$. В § 4 мы обсуждаем центральную предельную теорему для считающих множеств и функциональную центральную предельную теорему для эмпирической функции распределения спейсингов.

Автор считает своей приятной обязанностью поблагодарить Я. Г. Синая за идею написания данной статьи, Б. Саймона за объяснение результата леммы 1, Г. И. Ольшанского за многочисленные ценные замечания, А. М. Бородина, Б. А. Хоруженко, Р. Киллипа и Ю. Г. Кондратьева за полезные обсуждения.

2. Примеры детерминантных случайных точечных полей

2.1. Ферми-газ. Пусть $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ – оператор Шрёдингера, действующий на $L^2(E)$, и $\{\varphi_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис собственных функций, $H\varphi_\ell = \lambda_\ell \cdot \varphi_\ell$, $\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$. Рассмотрим n-ю внешнюю степень H, $\wedge^n(H)\colon \wedge^n(L^2(E)) \to \wedge^n(L^2(E))$, где $\wedge^n(L^2(E)) = A_n L^2(E^n)$ – пространство квадратично интегрируемых антисимметричных функций от n переменных и $\wedge^n(H) = \sum_{i=1}^n \bigl(-\frac{d^2}{dx_i^2} + V(x_i)\bigr)$. В квантовой механике $\wedge^n(H)$ описывает Ферми-газ n частиц. Основное состояние Ферми-газа задается функцией

$$
\begin{aligned}
\psi(x_1,\dots,x_n) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^n \varphi_{i-1}(x_{\sigma(i)}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \det\bigl(\varphi_{i-1}(x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

(Следует отметить, что $\psi(x_1,\dots,x_n)$ совпадает с точностью до знака $\varepsilon(x_1,\dots,x_n)$ с основным состоянием оператора $\sum_{i=1}^n \bigl(-\frac{d^2}{dx_i^2} + V(x_i)\bigr)$, действующего на $S_n L^2(E^n)$ с граничными условиями $\psi\big|_{x_i=x_j} = 0$.) Согласно основному постулату квантовой механики квадрат абсолютной величины основного состояния задает вероятностное распределение n частиц. В нашем случае

$$
\begin{aligned}
p(x_1,\dots,x_n) &= |\psi(x_1,\dots,x_n)|^2 \\
&= \frac{1}{n!} \det\bigl(\varphi_{i-1}(x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \cdot \det\bigl(\overline{\varphi_{j-1}(x_i)}\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \\
&= \frac{1}{n!} \det\bigl(K_n(x_i,x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n},
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где $K_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{i-1}(x)\overline{\varphi_{i-1}(y)}$ – ядро ортогонального проектора на подпространство, порожденное первыми n собственными функциями H. Мы утверждаем, что (2.2) задает детерминантное случайное точечное поле. В самом деле, k-точечные корреляционные функции равны

$$\rho_k^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \frac{n!}{(n-k)!}\int p_n(x_1,\dots,x_n)\,dx_{k+1}\cdots dx_n = \det\bigl(K_n(x_i,x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant k}. \tag{2.3}$$

Последнее равенство в (2.3) вытекает из следующей леммы, хорошо известной в теории случайных матриц.

Лемма 4 ([15; с. 89]). *Пусть $(E,d\mu)$ – измеримое пространство и ядро $K\colon E^2 \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условиям*

$$\int_E K(x,y)\cdot K(y,z)\,d\mu(y) = K(x,z), \tag{2.4}$$

$$\int_E K(x,x)\,d\mu(x) = \mathrm{const}. \tag{2.5}$$

Тогда

$$\int_E \det\bigl(K(x_i,x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n} d\mu(x_n) = (\mathrm{const} - n + 1)\cdot \det\bigl(K(x_i,x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}. \tag{2.6}$$

Мы рассмотрим более подробно два специальных случая. Первый случай относится к гармоническому осциллятору.

а) $H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, $E = \mathbb{R}^1$. Тогда функции

$$\varphi_\ell(x) = \frac{(-1)^\ell}{\pi^{\frac14}\cdot(2^\ell\cdot \ell!)^{1/2}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{d^\ell}{dx^\ell}\bigl(\exp(-x^2)\bigr) \tag{2.7}$$

известны как функции Вебера–Эрмита. Для того чтобы перейти к термодинамическому пределу $n\to\infty$, сделаем масштабное преобразование

$$x_i = \frac{\pi}{(2n)^{1/2}}\,y_i, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{2.8}$$

Тогда из формулы Кристоффеля–Дарбу с учетом асимптотики Планшереля–Роты многочленов Эрмита (см. [16]) следует, что ядро

$$K_n(x_1,x_2) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\varphi_\ell(x_1)\varphi_\ell(x_2) = \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{\varphi_n(x_1)\varphi_{n-1}(x_2) - \varphi_n(x_2)\varphi_{n-1}(x_1)}{x_1 - x_2}\right]$$

имеет предел при $n\to+\infty$

$$K_n(x_1,x_2)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K(y_1,y_2) = \frac{\sin\pi(y_1-y_2)}{\pi(y_1-y_2)}. \tag{2.9}$$

Сходимость ядер влечет сходимость k-точечных корреляционных функций, что в свою очередь влечет слабую сходимость распределения

$$\left(\frac{\pi}{(2n)^{1/2}}\right)^n p_n\left(\frac{\pi}{(2n)^{1/2}}y_1,\dots,\frac{\pi}{(2n)^{1/2}}y_n\right)dy_1\cdots dy_n$$

к трансляционно инвариантному детерминантному случайному точечному полю с синус-ядром $K(y_1,y_2)=\dfrac{\sin\pi(y_1-y_2)}{\pi(y_1-y_2)}$.

b) В качестве другого примера рассмотрим случай, когда $E=S^1=\{z=e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi\}$, $H=-\dfrac{d^2}{d\theta^2}$. Тогда

$$\varphi_\ell(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\ell\theta},$$

$$p_n(\theta_1,\dots,\theta_n)=\frac{1}{n!}\det\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}e^{i\ell(\theta_j-\theta_k)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} \tag{2.10}$$
$$=\frac{1}{n!}\det\bigl(K_n(\theta_i,\theta_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

где

$$K_n(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot(\theta_2-\theta_1)\right)}{\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}. \tag{2.11}$$

После масштабной замены $\frac{n}{2\pi}\theta_i=y_i$, $i=1,\dots,n$, перемасштабированные корреляционные функции имеют тот же предел, что и в (2.9), в частности,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}K_n\left(\frac{2\pi}{n}y_1,\frac{2\pi}{n}y_2\right)=\frac{\sin\pi(y_2-y_1)}{\pi(y_2-y_1)}.$$

За дополнительной информацией мы отсылаем читателя к работам [17]–[22].

2.2. Кулоновский газ при $\beta=2$. Примеры a) и b) из раздела 2.1 допускают интерпретацию как равновесное распределение n единичных зарядов на прямой (пример 2.1a)) или на единичной окружности (пример 2.1b)), отталкивающихся друг от друга согласно закону Кулона двумерной электростатики. Записывая потенциальную энергию в виде

$$H(z_1,\dots,z_n)=-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\log|z_i-z_j|+\sum_{i=1}^n V(z_i),$$

где V – внешний потенциал, мы видим, что функция Больцмана

$$\frac{1}{Z}\exp\bigl(-\beta H(z_1,\dots,z_n)\bigr),\qquad \beta=2,$$

в случае $V(z)=\frac12 z^2$ есть в точности $p_n(z_1,\dots,z_n)$ примера 2.1a), а в случае $V(z)=0$, $z_j=e^{i\theta_j}$, $j=1,\dots,n$, есть $p_n(\theta_1,\dots,\theta_n)$ примера 2.1b).

Однокомпонентный двумерный кулоновский газ (двумерная однокомпонентная плазма) изучался многими авторами, в том числе в [23]–[28]. Это направление исследований тесно связано с теорией неэрмитовых гауссовских случайных матриц (см. далее раздел 2.3d). Двухкомпонентный двумерный кулоновский газ (т.е. система положительно и отрицательно заряженных частиц) изучался в работах [29]–[34]. Мы начнем наше рассмотрение с нейтральной системы, состоящей из n положительно и n отрицательно заряженных частиц. Обозначая комплексные координаты этих частиц соответственно через u_j и v_j, $j = 1, \dots, n$, мы записываем функцию Больцмана при $\beta = 2$ в виде

$$\exp\biggl(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\log|u_i-u_j|+\log|v_i-v_j|)-2\sum\log|u_i-v_j|\biggr)$$
$$=\frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|u_i-u_j|^2\cdot|v_i-v_j|^2}{\prod_{i,j}|u_i-v_j|^2}=\left|\det\left(\frac{1}{u_i-v_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right|^2.$$

В дискретном случае положительным частицам разрешается занимать только точки решетки $\gamma\cdot\mathbb{Z}^2$, а отрицательным частицам – только точки решетки $\gamma\cdot(\mathbb{Z}^2+(\frac12,\frac12))$. Большой канонический ансамбль задается большой статистической суммой, которая при $\gamma = 1$ имеет вид

$$Z=1+\sum_{u,v}\lambda_+(u)\lambda_-(v)\cdot\frac{1}{|u-v|^2}$$
$$+\left(\frac{1}{2!}\right)^2\sum_{u_1,u_2,v_1,v_2}\lambda_+(u_1)\lambda_+(u_2)\lambda_+(v_1)\lambda_+(v_2)\cdot\left|\det\left(\frac{1}{u_i-v_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\right|^2+\cdots,$$

где $\lambda_+(u)=e^{-V(u)}$ и $\lambda_-(u)=e^{V(u)}$ – летучести, а V – внешний потенциал. Последнее представление можно переписать в следующем виде:

$$Z=\det\biggl(\mathrm{Id}+\biggl(\lambda_+\frac{1+\sigma_z}{2}+\lambda_-\frac{1-\sigma_z}{2}\biggr)$$
$$\times\biggl(\frac{\sigma_x+i\sigma_y}{2}\cdot\frac{1}{z-z'}+\frac{\sigma_x-i\sigma_y}{2}\cdot\frac{1}{\overline{z}-\overline{z'}}\biggr)\biggr),$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – (2×2)-матрицы Паули. В частности, мы видим, что большой канонический ансамбль является дискретным фермионным случайным точечным полем. (Появление матричнозначного ядра отражает тот факт, что $E=\mathbb{Z}^2\sqcup(\mathbb{Z}^2+(\frac12,\frac12))$.) Переходя к непрерывному пределу ($\gamma = 0$), нетрудно видеть, что k-точечные корреляционные функции при $k\geqslant 2$ имеют конечный предел и предельное ядро K может быть выражено в терминах функции Грина дифференциального оператора Дирака, а именно,

$$K=\biggl(m_+\cdot\frac{1+\sigma_z}{2}+m_-\cdot\frac{1-\sigma_z}{2}\biggr)$$
$$\times\biggl(\sigma_x\partial_x+\sigma_y\partial_y+m_+\cdot\frac{1+\sigma_z}{2}+m_-\cdot\frac{1-\sigma_z}{2}\biggr)^{-1},$$

где m_+, m_- – перемасштабированные летучести. В специальном случае $m_+=m_-\equiv$ const (т.е. $V\equiv 0$) ядро $K=\begin{pmatrix}K++, & K+-\\ K-+, & K--\end{pmatrix}$ может быть выражено в терминах модифицированных функций Бесселя (подробнее см., например, [32]).

2.3. Случайные матрицы.

a) Унитарно инвариантные ансамбли случайных матриц. Вероятностное распределение в 2.1a) (формулы (2.2) и (2.7)) допускает еще одну интерпретацию. В теории случайных матриц это распределение хорошо известно как распределение собственных значений в гауссовском унитарном ансамбле (G.U.E.). Напомним определение гауссовского унитарного ансамбля. Рассмотрим пространство эрмитовых $(n\times n)$-матриц

$$\bigl\{A=(A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n},\ \operatorname{Re}(A_{ij})=\operatorname{Re}(A_{ji}),\ \operatorname{Im}(A_{ij})=-\operatorname{Im}(A_{ji})\bigr\}.$$

G.U.E.-случайная матрица задается своим вероятностным распределением

$$\mathsf{P}(dA)=\operatorname{const}_n\cdot\exp(-\operatorname{Tr}A^2)\,dA, \tag{2.12}$$

где dA – мера Лебега, т.е.

$$dA=\prod_{i<j}d\operatorname{Re}(A_{ij})\,d\operatorname{Im}(A_{ij})\prod_{k=1}^{n}dA_{kk}.$$

Определение G.U.E.-случайной матрицы эквивалентно требованию, чтобы набор $\bigl\{\operatorname{Re}(A_{ij}),\ \operatorname{Im}(A_{ij}),\ 1\leqslant i<j\leqslant n, A_{kk},\ 1\leqslant k\leqslant n\bigr\}$ являлся набором независимых случайных величин и $\operatorname{Re}(A_{ij})\sim N(0,\frac14)$, $\operatorname{Im}(A_{ij})\sim N(0,\frac14)$, $A_{kk}\sim N(0,\frac12)$. Собственные значения случайной эрмитовой матрицы являются вещественнозначными случайными величинами. Вывод их совместного распределения читатель может найти в [35; разделы 5.3–5.4] и [15; гл. 3 и 5]. Оказывается, что плотность совместного распределения относительно меры Лебега задается в точности формулами (2.2) и (2.7).

Заметим, что распределение G.U.E.-случайной матрицы инвариантно относительно унитарного преобразования $A\to UAU^{-1}$, $U\in U(n)$. Естественным обобщением (2.12), сохраняющим унитарную инвариантность, является

$$\mathsf{P}(dA)=\operatorname{const}_n\cdot\exp(-2\cdot\operatorname{Tr}V(A))\,dA \tag{2.13}$$

где $V(x)$ может быть, например, многочленом четной степени с положительным главным коэффициентом (см. [35; раздел 5]). Вывод формулы для совместного распределения собственных значений аналогичен случаю гауссовского унитарного ансамбля. Плотность $p_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ задается формулой (2.2), где $\bigl\{\varphi_\ell(x)\cdot e^{-V(x)}\bigr\}_{\ell=0}^{n-1}$ – n первых ортонормированных многочленов с весом $\exp(-2V(x))$. При этом ядро $K_n(x,y)$ по-прежнему является ядром проектора и вследствие этого удовлетворяет условиям леммы 4.

b) Случайные унитарные матрицы. Рассмотрим группу $(n\times n)$-унитарных матриц $U(n)$. Известно, что на $U(n)$ существует единственная трансляционно инвариантная вероятностная мера (см. [36]), называемая мерой Хаара и обозначаемая нами далее как μ_{Haar}. Вероятностная плотность индуцированного распределения собственных значений задается формулой

$$p_n(\theta_1,\dots,\theta_n)=(2\pi)^{-n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\prod_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}|e^{i\theta_k}-e^{i\theta_\ell}|^2,$$

что совпадает с формулами (2.10) и (2.11) (см. [15; гл. 9 и 10], [17]–[19]). В последней формуле мы использовали обозначения

$$\lambda_1 = e^{i\theta_1}, \ \dots, \ \lambda_n = e^{i\theta_n}.$$

Если на унитарной группе вместо меры Хаара мы будем исходить из вероятностной меры $\mathrm{const}_n \cdot e^{-\operatorname{Tr} V(U)} d\mu_{\mathrm{Haar}}(U)$ и заменим мономы $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i\ell\theta}$ на $\psi_\ell(\theta) \cdot e^{-\frac{1}{2}V(\theta)}$, где $\{\psi_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ – набор n первых ортонормированных многочленов от $e^{i\theta}$ с весом $e^{-V(\theta)}\, d\theta$, мы получим аналог формулы (2.10) для k-точечных корреляционных функций.

c) Случайные ортогональные и симплектические матрицы. Распределение собственных значений случайной (распределенной по мере Хаара) ортогональной или симплектической матрицы тоже имеет форму детерминантного случайного точечного поля с фиксированным числом частиц. Для удобства читателя мы приводим ниже таблицу ядер, возникающих в ансамблях случайных матриц из классических компактных групп.

	$K_n(x,y)$	
$U(n)$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$;	$E=[0,2\pi]$
$SO(2n)$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{2}\cdot(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{2}\cdot(x+y)\right)}{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}\right)$;	$E=[0,\pi]$
$SO(2n+1)$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\sin(n\cdot(x-y))}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)} - \frac{\sin(n\cdot(x+y))}{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}\right)$;	$E=[0,\pi]$
$Sp(n)$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\cdot(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\cdot(x+y)\right)}{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}\right)$;	$E=[0,\pi]$
$0_-(2n+2)$	то же, что и для $Sp(n)$	

За дополнительной информацией мы отсылаем читателя к работам [37]–[42].

d) Комплексные неэрмитовы гауссовские случайные матрицы. В [23] Жинибр рассмотрел ансамбль комплексных неэрмитовых гауссовских случайных $(n \times n)$-матриц, у которых все $2n^2$ параметров $\{\operatorname{Re} A_{ij},\ \operatorname{Im} A_{ij},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ являются независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевым средним и дисперсией, равной $\frac{1}{2}$. В этом случае совместное вероятностное распределение матричных элементов задается формулой

$$\begin{gathered} \mathsf{P}(dA) = \mathrm{const}_n \cdot \exp\bigl(-\operatorname{Tr}(A^* \cdot A)\bigr)\, dA, \\ dA = \prod_{1\leqslant j,k\leqslant n} d\operatorname{Re} A_{jk} \cdot d\operatorname{Im} A_{jk}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Эквивалентное определение ансамбля (2.14) заключается в том, что $A = \tilde{A} + i \cdot \tilde{\tilde{A}}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{\tilde{A}}$ – матрицы из двух независимых гауссовских унитарных ансамблей. Собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A являются комплексными случайными величинами. Было показано, что их совместное распределение задается детерминантным случайным точечным полем в $\mathbb{R}^2$ с фиксированным числом частиц ($\# = n$) и корреляционными функциями

$$\rho_k^{(n)}(z_1,\dots,z_k) = \det\big(K_n(z_j,\bar z_m)\big)_{1\leqslant j,m\leqslant n}, \tag{2.15}$$

где

$$K_n(z_1,\bar z_2) = \frac{1}{\pi}\exp\bigg(-\frac{|z_1|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{2}\bigg)\cdot\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{z_1^\ell \bar z_2^\ell}{\ell!}\,.$$

Мы отметим здесь же, что ядро $K_n(z_1,\bar z_2)$ сходится к ядру

$$K(z_1,\bar z_2) = \frac{1}{\pi}\exp\bigg(-\frac{|z_1|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{2} + z_1\cdot\bar z_2\bigg), \tag{2.16}$$

задающему предельное случайное точечное поле. Проблема обобщения формулы (2.14) изучалась в [43]–[47]. Пусть $A = \tilde A + i\cdot v\cdot\tilde{\tilde A}$, где $\tilde A$ и $\tilde{\tilde A}$ – как и выше, две независимые G.U.E.-матрицы и v – некоторый вещественный параметр (достаточно рассмотреть случай $0\leqslant v\leqslant 1$). Введем новый параметр $\tau = \dfrac{1-v^2}{1+v^2}$. Распределение матричных элементов задается формулой

$$\mathsf{P}(dA) = \mathrm{const}_n\cdot\exp\bigg(-\frac{1}{1-\tau^2}\,\mathrm{Tr}\big(A^*A - \tau\,\mathrm{Re}(A^2)\big)\bigg)\,dA. \tag{2.17}$$

(2.17) индуцирует распределение собственных значений

$$\begin{aligned} p_n(z_1,\dots,z_n)\prod_{j=1}^n dz_j\,d\bar z_j = \mathrm{const}_n\cdot\exp\bigg[-\frac{1}{1-\tau^2}\cdot\sum_{j=1}^n\bigg(|z_j|^2 - \frac{\tau}{2}(z_j^2+\bar z_j^2)\bigg)\bigg] \\ \times\prod_{j<k}|z_j-z_k|^2\cdot\prod_{j=1}^n dz_j\,d\bar z_j. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Следует отметить, что выражение (2.18) было получено также в работах [27] и [28] как функция Больцмана двумерной однокомпонентной плазмы. Что касается вычисления соответствующих корреляционных функций, мы отсылаем читателя к работам [27], [28], [46], [47]. В этих вычислениях решающая роль состоит в введении ортонормированных многочленов с весом

$$w^2(z) = \exp\bigg[-\frac{1}{1-\tau^2}\bigg(|z|^2 - \frac{\tau}{2}(z^2+\bar z^2)\bigg)\bigg]. \tag{2.19}$$

Эти многочлены могут быть представлены в терминах многочленов Эрмита

$$\psi_\ell(z) = \frac{\tau^{\frac{\ell}{2}}}{\pi^{1/2}\cdot(\ell!)^{\frac12}\cdot(1-\tau^2)^{\frac14}}\,H_\ell\left(\frac{z}{\sqrt{\tau}}\right),\qquad \ell = 0,1,\dots, \tag{2.20}$$

где

$$\sum_{n=0}^\infty H_n(z)\cdot\frac{t^n}{n!} = \exp\bigg(zt - \frac{t^2}{2}\bigg).$$

Отметим, что при $\tau = 0$ (случай, соответствующий ансамблю Жинибра) $\psi_\ell(z) = \left(\pi^{1/2} \cdot (\ell!)^{1/2}\right)^{-1} \cdot z^\ell$. Соответствующая формула для корреляционных функций (при произвольном τ) обобщает формулу (2.15):

$$\begin{gathered}\rho_k^{(n)} = \det\bigl(K_n(z_i, \bar z_j)\bigr)_{1 \leqslant i,j \leqslant k},\\ K_n(z_1, \bar z_2) = w(z_1)w(\bar z_2) \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_\ell(z_1)\psi_\ell(\bar z_2).\end{gathered} \tag{2.21}$$

В пределе $n \to \infty$ ядро $K_n(z_1, \bar z_2)$ сходится к

$$\begin{aligned}K(z_1, \bar z_2) &= \lim_{n\to\infty} K_n(z_1, \bar z_2)\\ &= \frac{1}{\pi(1-\tau^2)} \exp\biggl(-\frac{1}{1-\tau^2}\biggl(\frac{|z_1|^2}{2} + \frac{|z_2|^2}{2} - z_1 \bar z_2\biggr)\biggr).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Заметим, что последняя формула отличается от (2.16) только тривиальной заменой координат $z \to z \cdot \sqrt{1-\tau^2}$. Специальный режим, называемый в физической литературе режимом слабой неэрмитовости, был обнаружен для модели (2.17) Федоровым, Хоруженко и Соммерсом в работах [46] и [47]. Пусть

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_1) &= n^{1/2} \cdot x + n^{-\frac12} x_1,\\ \operatorname{Re}(z_2) &= n^{1/2} \cdot x + n^{-\frac12} x_2,\\ \operatorname{Im}(z_1) &= n^{-\frac12} \cdot y_1,\\ \operatorname{Im}(z_2) &= n^{-\frac12} \cdot y_2.\end{aligned}$$

Предположим, что параметры x, x_1, x_2, y_1, y_2 зафиксированы, и рассмотрим предел $n \to \infty$ при условии, что $\lim_{n\to\infty} n \cdot (1-\tau) = \alpha^2/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac1n K_n(z_1, z_2) = \frac{1}{\pi\alpha} &\cdot \exp\biggl[-\frac{y_1^2 + y_2^2}{\alpha^2} + i \cdot x \cdot \frac{y_1 - y_2}{2}\biggr]\\ &\times g_\alpha\biggl(\frac{y_1 + y_2}{2} - i \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}\biggr),\end{aligned} \tag{2.23}$$

где

$$g_\alpha(y) = \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \exp\biggl[-\frac{\alpha^2 u^2}{2} - 2uy\biggr] \tag{2.24}$$

(при $x > 2$ предельное выражение в (2.23) равно нулю). Формулы (2.23) и (2.24) задают детерминантное случайное точечное поле в $\mathbb{R}^2$, отличное от (2.16).

e) Положительные эрмитовы случайные матрицы. Следуя Бронку [48], определим ансамбль Лагерра положительных эрмитовых $(n \times n)$-матриц. Как известно, произвольная положительная эрмитова матрица M может быть записана в виде $M = A^*A$, где A – некоторая комплексная матрица. Вероятностное распределение случайной матрицы M задается формулой

$$\mathrm{const}_n \cdot \exp(-\operatorname{Tr} A^*A) \cdot [\det(A^*A)]^\alpha \, dA, \tag{2.25}$$

где dA определена как в (2.14) и $\alpha > -1$ (особый интерес представляют значения $\alpha = \pm\frac{1}{2}, 0$). Индуцированное этим вероятностное распределение положительных собственных значений имеет вид

$$\mathrm{const}_n \cdot \exp\biggl(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\biggr) \cdot \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\alpha} \cdot \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n. \tag{2.26}$$

С помощью ассоциированных многочленов Лагерра

$$L_m^{\alpha}(x) \equiv \frac{1}{m!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^m}{dx^m}\bigl(e^{-x} x^{m+\alpha}\bigr), \qquad m = 0, 1, \dots,$$

можно переписать (2.26) в виде

$$\frac{1}{n!} \det\bigl(K_n(x_i, x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \tag{2.27}$$

где

$$K_n(x, y) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \varphi_\ell^{(\alpha)}(x) \cdot \varphi_\ell^{(\alpha)}(y) \tag{2.28}$$

и

$$\biggl\{\varphi_\ell^{(\alpha)}(x) = \biggl(\Gamma(\alpha+1) \cdot \binom{n+\alpha}{n}\biggr)^{-\frac{1}{2}} L_\ell^{\alpha}(x)\biggr\}_{\ell=0}^{\infty}$$

– ортонормированный базис с весом $e^{-x} \cdot x^{\alpha}$ на вещественной полуоси. Используя снова лемму 4, мы можем точно вычислить k-точечные корреляционные функции и показать, что они задаются детерминантами $(k \times k)$-матриц с ядром (2.28).

f) Цепь коррелированных эрмитовых матриц. Пусть $A_1, \dots, A_p$ – комплексные эрмитовы случайные $(n \times n)$-матрицы с совместной вероятностной плотностью

(2.29)
$$\begin{aligned}\mathrm{const}_n \cdot \exp\biggl[-\mathrm{Tr}\biggl(&\frac{1}{2} V_1(A_1) + V_2(A_2) + \dots + V_{p-1}(A_{p-1}) + \frac{1}{2} V_p(A_p) \\ &+ c_1 A_1 A_2 + c_2 A_2 A_3 + \dots + c_{p-1} A_{p-1} A_p\biggr)\biggr].\end{aligned}$$

Мы обозначаем вещественнозначные собственные значения A_j через $\widetilde{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn})$, $j = 1, \dots, p$. Тогда соответствующая индуцированная вероятностная плотность совместного распределения собственных значений задается формулой

$$\begin{aligned}p_n(\widetilde{\lambda}_1, \dots, \widetilde{\lambda}_p) = \mathrm{const}_n \cdot &\biggl[\prod_{1\leqslant r<s\leqslant n} (\lambda_{1r} - \lambda_{1s})(\lambda_{pr} - \lambda_{ps})\biggr] \\ &\times \biggl[\prod_{k=1}^{p-1} \det\bigl[w_k(\lambda_{kr}, \lambda_{k+1,s})\bigr]_{r,s=1,\dots,n}\biggr],\end{aligned} \tag{2.30}$$

где

$$w_k(x, y) = \exp\biggl(-\frac{1}{2} V_k(x) - \frac{1}{2} V_{k+1}(y) + c_k x y\biggr). \tag{2.31}$$

Эйнард и Мехта установили [49], что корреляционные функции

$$\rho_{k_1,\dots,k_p}(\lambda_{11},\dots,\lambda_{1k_1};\dots;\lambda_{p1},\dots,\lambda_{pk_p}) \\ = \prod_{j=1}^{p}\frac{n!}{(n-k_j)!}\int p_n(\widetilde{\lambda}_1,\dots,\widetilde{\lambda}_p)\cdot\prod_{j=1}^{p}\prod_{r_j=k_j+1}^{n}d\lambda_{jr_j}$$

этой модели могут быть записаны как $(k\times k)$-определитель

$$\det\bigl[K_{ij}(\lambda_{ir},\lambda_{js})\bigr]_{r=1,\dots,k_i;\,s=1,\dots,k_j;\,i,j=1,\dots,p} \tag{2.32}$$

с $k=k_1+\dots+k_p$. За явными формулами для ядер $K_{ij}(x,y)$ мы отсылаем читателя к работе [49] (см. также [50]). Заметим, что (2.32) задает детерминантное случайное точечное поле, одночастичное пространство которого, E, является объединением p копий $\mathbb{R}^1$.

g) Универсальность в теории случайных матриц. Случайные точечные поля Эйри, Бесселя и синус-поля. Мы начнем рассмотрение с общего класса ядер вида

$$K(x,y)=\frac{\varphi(x)\psi(y)-\varphi(y)\psi(x)}{x-y}\,, \tag{2.33}$$

где

$$\begin{aligned} m(x)\varphi'(x)&=A(x)\varphi(x)+B(x)\psi(x),\\ m(x)\psi'(x)&=-C(x)\varphi(x)-A(x)\psi(x) \end{aligned} \tag{2.34}$$

и $m(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – многочлены. Трейси и Видом показали [51], что определители Фредгольма интегральных операторов с ядрами вида (2.33) и (2.34), ограниченными на объединение конечного числа интервалов, удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям в частных производных. Ядра Эйри, Бесселя и синус-ядра являются частными случаями (2.33) и (2.34). Для определения синус-ядра положим

$$\varphi(x)\equiv\frac{1}{\pi}\sin(\pi x),\qquad \psi(x)\equiv\varphi'(x) \\ \bigl(m(x)\equiv 1,\ \ A(x)\equiv 0,\ \ B(x)\equiv 1,\ \ C(x)\equiv\pi^2\bigr);$$

для ядра Эйри положим

$$\varphi(x)\equiv A_i(x),\qquad \psi(x)\equiv\varphi'(x) \\ \bigl(m(x)\equiv 1,\ \ A(x)\equiv 0,\ \ B(x)\equiv 1,\ \ C(x)\equiv -x\bigr);$$

и наконец для ядра Бесселя положим

$$\varphi(x)\equiv J_\alpha(\sqrt{x}\,),\qquad \psi(x)\equiv x\varphi'(x) \\ \bigl(m(x)\equiv x,\ \ A(x)\equiv 0,\ \ B(x)\equiv 1,\ \ C(x)\equiv\frac{1}{4}(x-\alpha^2)\bigr).$$

Здесь $\mathscr{A}_i(x)$ – функция Эйри и $J_\alpha(x)$ – функция Бесселя порядка α (см. [16]). Для соответствующих ядер справедливы следующие точные представления (см. [51]–[53])

$$K_{\mathrm{sine}}(x,y) = \frac{\sin\pi(x-y)}{\pi(x-y)}, \tag{2.35}$$

$$K_{\mathrm{Airy}}(x,y) = \frac{\mathscr{A}_i(x)\cdot\mathscr{A}_i'(y)-\mathscr{A}_i(y)\cdot\mathscr{A}_i'(x)}{x-y} = \int_0^\infty \mathscr{A}_i(x+t)\cdot\mathscr{A}_i(y+t)\,dt, \tag{2.36}$$

$$K_{\mathrm{Bessel}}(x,y) = \frac{J_\alpha(\sqrt{x})\cdot\sqrt{y}\cdot J_\alpha'(\sqrt{y}\,)-\sqrt{x}\cdot J_\alpha'(\sqrt{x}\,)\cdot J_\alpha(\sqrt{y}\,)}{2\cdot(x-y)} = \frac{\sqrt{x}\cdot J_{\alpha+1}(\sqrt{x}\,)\cdot J_\alpha(\sqrt{y}\,)-J_\alpha(\sqrt{x}\,)\sqrt{y}\cdot J_{\alpha+1}(\sqrt{y}\,)}{2\cdot(x-y)}. \tag{2.37}$$

Как отмечалось выше, синус-ядро возникает как скейлинговый предел внутри спектра в гауссовском унитарном ансамбле [15; гл. 5]. В свою очередь ядро Эйри возникает как скейлинговый предел у края спектра в гауссовском унитарном ансамбле и у правого (“мягкого”) края спектра в ансамбле Лагерра, а ядро Бесселя возникает как скейлинговый предел у левого (“твердого”) края спектра в ансамбле Лагерра [52]–[54]. Гипотеза универсальности в теории случайных матриц предполагает, что такие пределы являются универсальными для широкого класса эрмитовых случайных матриц. Недавно гипотеза универсальности была доказана для унитарно инвариантных ансамблей (2.13) внутри спектра [55]–[57], [35] и для некоторых классов матриц Вигнера внутри спектра [58] и на краю [59].

В следующем разделе мы полностью охарактеризуем детерминантные случайные точечные поля в $\mathbb{R}^1$ ($\mathbb{Z}^1$) с независимыми одинаково распределенными спейсингами.

2.4. Детерминантные случайные точечные поля с независимыми одинаково распределенными спейсингами. Процессы восстановления. Мы начнем с некоторых основных фактов теории процессов восстановления (см., например, [60], [8]). Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и τ_0 – некоторая неотрицательная случайная величина, независимая от $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ (в общем случае распределение τ_0 будет другим). Определим

$$x_k = \sum_{j=0}^{k}\tau_j, \qquad k\geqslant 0. \tag{2.38}$$

Этим задается случайная последовательность $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ в $\mathbb{R}^1_+$. В теории вероятностей случайная последовательность $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ известна как процесс восстановления с запаздыванием. Предположим, что распределение τ_k, $k\geqslant 1$, имеет плотность $f(x)$, называемую плотностью распределения интервалов, и конечное математическое ожидание $\mathsf{E}\tau_1 = \int_0^\infty xf(x)\,dx$. Тогда плотность восстановления задается следующим образом:

$$u(x) = \sum_{k=1}^\infty f^{k*}(x) = f(x) + \int_0^x f(x-y)f(y)\,dy + \int_0^x\int_0^{x-y_2} f(x-y_1-y_2)f(y_1)f(y_2)\,dy_1\,dy_2 + \cdots. \tag{2.39}$$

Корреляционные функции высших порядков процесса восстановления нетрудно выразить через соответствующую одноточечную корреляционную функцию и плотность восстановления. В самом деле (см. [8; с. 136]), для $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_k$ и $k > 1$ справедлива следующая формула:

$$\rho_k(t_1, \dots, t_k) = \rho_1(t_1) \cdot u(t_2 - t_1) \cdot u(t_3 - t_2) \cdot \ldots \cdot u(t_k - t_{k-1}). \tag{2.40}$$

Из вышеприведенных определений немедленно следует, что случайное точечное поле в $\mathbb{R}^1_+$ имеет независимые одинаково распределенные спейсинги тогда и только тогда, когда оно является процессом восстановления (2.38). Для того, чтобы этот процесс был трансляционно инвариантным, вероятностная плотность τ_0 должна задаваться соотношением

$$\frac{1}{\mathsf{E}\tau_1} \int_x^{+\infty} f(t)\, dt \qquad ([8; с. 72], [60; раздел XI.3]). \tag{2.41}$$

При этом одноточечная корреляционная функция тождественно равна константе, $\rho_1(x) \equiv \rho > 0$, и, тем самым, из (2.40) следует, что распределение процесса однозначно определяется плотностью восстановления (в частности, константа ρ определяется по $u(x)$, так как $\rho = (\mathsf{E}\tau_1)^{-1}$ и преобразования Лапласа функций f и u связаны между собой). Маччи [7] рассмотрела специальный класс трансляционно инвариантных процессов восстановления с плотностью распределения спейсингов, задаваемой формулой

$$f(x) = 2\rho(1 - 2\rho\alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{\alpha}} \cdot \sinh\left((1 - 2\rho\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \tag{2.42}$$

где

$$2\rho\alpha \leqslant 1, \quad \rho > 0, \quad \alpha > 0, \tag{2.43}$$

и показала, что такие процессы являются детерминантными случайными точечными полями с ядром

$$K(x, y) = \rho \cdot \exp(-|x - y|/\alpha) \tag{2.44}$$

(условия (2.43) означают в точности то, что $0 < K \leqslant \mathrm{Id}$).

В следующей теореме мы классифицируем все процессы восстановления с запаздыванием, которые одновременно являются детерминантными случайными точечными полями в $\mathbb{R}^1_+$.

Теорема 6. *Детерминантное случайное точечное поле в* $\mathbb{R}^1_+$ *с эрмитовым ядром имеет независимые одинаково распределенные спейсинги тогда и только тогда, когда соответствующий ему интегральный оператор, локально с конечным следом, в дополнение к условию* $0 \leqslant K \leqslant \mathrm{Id}$ *удовлетворяет следующим двум условиям.*

a) *Для почти всех* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$

$$K(x_1, x_2) \cdot K(x_2, x_3) = K(x_1, x_3) \cdot K(x_2, x_2). \tag{2.45}$$

b) *Для почти всех* $x_1 \leqslant x_2$ *функция*

$$K(x_2, x_2) - \frac{K(x_1, x_2) \cdot K(x_2, x_1)}{K(x_2, x_1)} \tag{2.46}$$

зависит только от разности $x_2 - x_1$. *Если детерминантное случайное точечное поле является к тому же трансляционно инвариантным, то оно задается формулами* (2.42)–(2.44).

Замечание 8. Разумеется, трансляционно инвариантное детерминантное случайное точечное поле в $\mathbb{R}^1_+$ может быть единственным образом продолжено до трансляционно инвариантного детерминантного случайного точечного поля в $\mathbb{R}^1$.

Доказательство теоремы 6. Сначала мы докажем сформулированное в теореме условие необходимости. Предположим, что детерминантное случайное точечное поле с ядром $K(x,y)$ является процессом восстановления с запаздыванием. Как следствие соотношения (2.40) с $k=2,3$ мы получаем формулу для плотности восстановления

$$u(y-x) = K(y,y) - \frac{K(x,y)\cdot K(y,x)}{K(x,x)}, \qquad y \geqslant x, \tag{2.47}$$

и выражение для $\rho_3(x_1,x_2,x_3)$ при $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$:

$$\begin{aligned}\rho_3(x_1,x_2,x_3) &= K(x_1,x_1)\cdot u(x_2-x_1)\cdot u(x_3-x_2)\\ &= K(x_1,x_1)\cdot\left(K(x_2,x_2) - \frac{K(x_1,x_2)\cdot K(x_2,x_1)}{K(x_1,x_1)}\right)\\ &\quad\times\left(K(x_3,x_3) - \frac{K(x_2,x_3)\cdot K(x_3,x_2)}{K(x_2,x_2)}\right).\end{aligned} \tag{2.48}$$

Поскольку с вероятностью 1 частицы отсутствуют вне множества $A=\{x: K(x,x) > 0\}$, мы всегда можем рассматривать случайное точечное поле, ограниченное на A.

Сравнивая

$$\rho_3(x_1,x_2,x_3) = \det\bigl(K(x_i,x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \tag{2.49}$$

с (2.48), мы получаем

$$\begin{aligned}&K(x_1,x_2)\cdot K(x_2,x_1)\cdot K(x_2,x_3)\cdot K(x_3,x_2)\cdot\frac{1}{K(x_2,x_2)}\\ &\quad= -K(x_1,x_3)\cdot K(x_3,x_1)\cdot K(x_2,x_2) + K(x_1,x_2)\cdot K(x_2,x_3)\cdot K(x_3,x_1)\\ &\qquad + K(x_1,x_3)\cdot K(x_3,x_2)\cdot K(x_2,x_1),\end{aligned}$$

что эквивалентно равенству

$$\begin{aligned}&\frac{1}{K(x_2,x_2)}\cdot\Bigl(K(x_1,x_2)\cdot K(x_2,x_3) - K(x_2,x_2)\cdot K(x_1,x_3)\Bigr)\\ &\qquad\times\Bigl(K(x_3,x_2)\cdot K(x_2,x_1) - K(x_3,x_1)\cdot K(x_2,x_2)\Bigr) = 0.\end{aligned}$$

Поскольку третий множитель в последнем равенстве является комплексно сопряженным ко второму множителю, мы получаем (2.45). Условие b) теоремы следует из (2.47). В случае трансляционно инвариантного детерминантного случайного точечного поля ядро $K(x,y)$ зависит только от разности $x-y$, вследствие чего $K(x,y) = \rho\cdot e^{-|x-y|/\alpha}\cdot e^{i\beta(x-y)}$, а унитарно эквивалентное ядро $e^{-i\beta x}K(x,y)\cdot e^{i\beta y}$ совпадает с (2.44). Докажем теперь условие достаточности теоремы. Итак, если ядро удовлетворяет (2.45) и (2.46), то функция плотности восстановления должна удовлетворять соотношению

$$u(x_2-x_1) = K(x_2,x_2) - \frac{K(x_1,x_2)\cdot K(x_2,x_1)}{K(x_1,x_1)}$$

для почти всех $x_1 \leqslant x_2$. Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_k$. Нам необходимо вывести алгебраическое тождество

$$\det\bigl(K(x_i,x_i)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant k} = K(x_1,x_1)\cdot\prod_{i=1}^{k-1}\left(K(x_{i+1},x_{i+1}) - \frac{K(x_i,x_{i+1})\cdot K(x_{i+1},x_i)}{K(x_i,x_i)}\right) \tag{2.50}$$

из базисных тождеств для коммутирующих величин $K(x_i,x_j)$ и $\overline{K(x_i,x_j)}$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$K(x_i,x_j)\cdot K(x_j,x_\ell) = K(x_i,x_\ell)\cdot K(x_j,x_j), \qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant \ell\leqslant k,$$
$$K(x_i,x_j) = \overline{K(x_j,x_i)}.$$

Введем функции $a(x) = K(x,x)\cdot K(0,x)^{-1}$ и $b(x) = K(0,x)^{-1}$. Тогда для $i\leqslant j$

$$K(x_i,x_j) = a(x_i)\cdot b(x_j)^{-1},$$
$$K(x_j,x_i) = \overline{a(x_i)}\cdot\overline{b(x_j)}^{-1}.$$

Это позволяет нам записать детерминант в виде

$$\begin{vmatrix} a(x_1)\cdot b(x_1)^{-1}, & a(x_1)\cdot b(x_2)^{-1}, & \dots & ,a(x_1)\cdot b(x_n)^{-1} \\ \overline{a(x_1)}\cdot\overline{b(x_2)}^{-1}, & a(x_2)\cdot b(x_2)^{-1}, & \dots & ,a(x_2)\cdot b(x_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a(x_1)}\cdot\overline{b(x_n)}^{-1}, & \overline{a(x_2)}\cdot\overline{b(x_n)}^{-1}, & \dots & ,a(x_n)\cdot b(x_n)^{-1} \end{vmatrix} \tag{2.51}$$

$$= a(x_1)\cdot b(x_1)^{-1}\prod_{i=1}^{n-1}\Bigl(b(x_{i+1})^{-1}\cdot\overline{b(x_{i+1})}^{-1}\cdot\bigl(a(x_{i+1})\cdot\overline{b(x_{i+1})} - \overline{a(x_i)}\cdot b(x_i)\bigr)\Bigr),$$

что в точности совпадает с правой частью (2.50). Поскольку мы установили, что

$$\rho_k(x_1,\dots,x_k) = \rho_1(x_1)\cdot\prod_{i=1}^{n-1} u(x_{i+1}-x_i), \qquad x_1\leqslant x_2\leqslant\dots\leqslant x_k,$$

оставшаяся часть доказательства не представляет труда. Пусть $p_k(x_1,\dots,x_k)$ – плотность Джаносси, т.е. плотность вероятности иметь частицы в точках $x_1,\dots,x_k$ и ничего между ними. Напомним, что

$$p_k(x_1,\dots,x_k) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\cdot\int \rho_{k+j}(x_1,\dots,x_k;y_{k+1},\dots,y_{k+j})\,dy_{k+1}\cdots dy_{k+j},$$

где интегрирование для j-го члена производится по области $\underbrace{(x_1,x_k)\times\dots\times(x_1,x_k)}_{\longleftarrow\ j\ \text{раз}\ \longrightarrow}$.

Мы утверждаем, что

$$p_k(x_1,\dots,x_k) = \rho_1(x_1)\cdot\prod_{i=1}^{k-1} f(x_{i+1}-x_i), \tag{2.52}$$

где плотность распределения интервалов f и плотность восстановления u связаны уравнением свертки

$$u = f + u * f. \tag{2.53}$$

Теорема 6 доказана.

Замечание 9. Аналог теоремы 6 справедлив и в дискретном случае. Доказательство аналогично. Необходимо только заменить (2.42) решением дискретного уравнения свертки (2.53) с $u(n) = 1-\rho\cdot e^{-2\beta n}$, $K(n_1,n_2) = \rho\cdot e^{-\beta|n_1-n_2|}$, $0<\rho\leqslant 1$, $\beta>0$, так что

$$\widehat{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{int} = \frac{(1-\rho)-(e^{-2\beta}-\rho)\cdot e^{it}}{(2-\rho)-(2e^{-2\beta}-\rho+1)\cdot e^{it}+e^{-2\beta}e^{2it}}. \tag{2.54}$$

Замечание 10. Теорема 6 допускает обобщение на случай, когда мультипликативное тождество (2.45) по-прежнему справедливо, но плотность восстановления

$$u(x_1,x_2) = K(x_2,x_2) - \frac{K(x_1,x_2)\cdot K(x_2,x_1)}{K(x_1,x_1)}$$

уже не является функцией только от разности x_1 и x_2. Такие процессы имеют независимые, но не обязательно одинаково распределенные интервалы, так как распределение интервалов $f(x,y)\,dy$ зависит от координаты x левой частицы. Таким образом,

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) &+ \int_{x_1}^{x_2} f(x_1,y_1)\cdot f(y_1,x_2)\,dy_1 \\ &+ \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{y_2} f(x_1,y_1)\cdot f(y_1,y_2)\cdot f(y_2,x_2)\,dy_1\,dy_2+\cdots, \end{aligned} \tag{2.55}$$

где $f(x,y)$ – однопараметрическое семейство вероятностных плотностей таких, что

$$\operatorname{supp} f(x,\cdot)\subset[x,+\infty], \qquad f\geqslant 0, \qquad \int f(x,y)\,dy = 1.$$

Напомним формулу обращения для уравнения (2.55):

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) &- \int_{x_1}^{x_2} u(x_1,y_1)u(y_1,x_2)\,dy_1 \\ &+ \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{y_2} u(x_1,y_1)\cdot u(y_1,y_2)\cdot u(y_2,x_2)\,dy_1\,dy_2-\cdots. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Записывая $K(x,y) = a(x)b(y)^{-1}$, $x\leqslant y$, где $a(x) = \dfrac{K(x,x)}{K(0,x)}$, $b(y) = \dfrac{1}{K(0,y)}$ и $u(x,y) = \dfrac{1}{|b(y)|^2}\cdot\bigl(a(y)\overline{b(y)}-\overline{a(x)}b(x)\bigr)$, мы видим, что в принципе уравнение (2.56) описывает класс соответствующих плотностей распределения интервалов $u(x,y)$.

2.5. Мера Планшереля на разбиениях и ее обобщения – z-меры и меры Шура. Под разбиением числа $n=1,2,\dots$ мы понимаем набор неотрицательных целых чисел $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ такой, что $\lambda_1+\cdots+\lambda_m=n$ и $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m$. Множество всех разбиений n мы обозначаем через $\operatorname{Par}(n)$. Основные результаты, касающиеся разбиений, читатель может найти в монографиях [61]–[64]. В частности, напомним, что каждому разбиению λ числа n (обозначается как $\lambda\vdash n$) можно поставить в однозначное соответствие диаграмму Юнга с $|\lambda|=n$ клетками. Разбиение λ' соответствует транспонированной диаграмме. Пусть d – число диагональных клеток в λ (т.е. число диагональных клеток в диаграмме Юнга, соответствующей λ). Координаты Фробениуса разбиения λ обозначаются через $(p_1,\dots,p_d \mid q_1,\dots,q_k)$, где $p_j=\lambda_j-j$, $q_j=\lambda_j'-j$, $j=1,\dots,d$. Важную роль разбиений в теории представлений нетрудно увидеть из того факта, что элементы $\mathrm{Par}(n)$ однозначно соответствуют неприводимым представлениям симметрической группы S_n (см., например, [64], [62]). Мера Планшереля M_n на множестве $\mathrm{Par}(n)$ всех разбиений числа n задается следующей формулой:

$$M_n(\lambda)=\frac{(\dim\lambda)^2}{n!}\,, \tag{2.57}$$

где $\dim\lambda$ – размерность соответствующего представления S_n. Размерность $\dim\lambda$ может быть выражена в терминах координат Фробениуса посредством детерминантной формулы

$$\frac{\dim\lambda}{n!}=\det\biggl[\frac{1}{(p_i+q_j+1)\cdot p_i!\cdot q_i!}\biggr]_{1\leqslant i,j\leqslant d}, \tag{2.58}$$

где $|\lambda|=n$ [65; предложение 2.6, формула (2.7)]. Пусть $\mathrm{Par}=\bigsqcup_{n=0}^{\infty}\mathrm{Par}(n)$. Рассмотрим меру M^θ на Par, которую по аналогии со статистической механикой будем называть большим каноническим ансамблем:

$$M^\theta(\lambda)=e^{-\theta}\cdot\frac{\theta^n}{n!}M_n(\lambda), \quad \text{если} \quad \lambda\in\mathrm{Par}(n), \quad n=0,1,2,\dots, \quad 0\leqslant\theta<\infty. \tag{2.59}$$

Мера M^θ называется также пуассонизацией мер M_n. Из (2.59) следует, что $|\lambda|$ распределена по закону Пуассона со средним θ и M_n есть условная мера M^θ при условии $|\lambda|=n$. Используя координаты Фробениуса, меры M^θ и M_n могут быть представлены как случайные точечные поля на решетке $\mathbb{Z}^1$. Недавно Бородин, Окуньков и Ольшанский [66] и, независимо от них, Йоханссон [67] доказали, что M^θ является детерминантным случайным точечным полем (более точно, в [67] изучалось только ограничение M^θ на первую половину координат Фробениуса $\bigl(p_1,\dots,p_{d(\lambda)}\bigr)$, и, как следствие, была получена только та часть формулы (2.60), которая соответствует $xy>0$). Для того чтобы сформулировать результаты работ [66], [67], определим модифицированные координаты Фробениуса разбиения λ:

$$\mathrm{Fr}(\lambda):=\biggl\{p_1+\frac12,\dots,p_d+\frac12,-q_1-\frac12,\dots,-q_d-\frac12\biggr\}.$$

Пусть $\rho_k^\theta(x_1,\dots,x_k)$ – k-точечная корреляционная функция M^θ в модифицированных координатах Фробениуса, где

$$\{x_1,\dots,x_k\}\subset\mathbb{Z}^1+\frac12\,.$$

Тогда

$$\rho_k^\theta(x_1,\dots,x_k)=\det\bigl[K(x_i,x_j)\bigr]_{1\leqslant i,j\leqslant k},$$

где K – так называемое дискретное ядро Бесселя,

(2.60)

$$K(x,y)=\begin{cases}\sqrt{\theta}\cdot\dfrac{J_{|x|-\frac12}(2\sqrt{\theta})\cdot J_{|y|+\frac12}(2\sqrt{\theta})-J_{|x|+\frac12}(2\sqrt{\theta})\cdot J_{|y|-\frac12}(2\sqrt{\theta})}{|x|-|y|}, \\ \qquad \text{если } x\cdot y>0, \\ \sqrt{\theta}\cdot\dfrac{J_{|x|-\frac12}(2\sqrt{\theta})\cdot J_{|y|-\frac12}(2\sqrt{\theta})-J_{|x|+\frac12}(2\sqrt{\theta})\cdot J_{|y|+\frac12}(2\sqrt{\theta})}{x-y}, \\ \qquad \text{если } x\cdot y<0,\end{cases}$$

и $J_x(\,\cdot\,)$ – функция Бесселя порядка x. Заметим, что ядро $K(x,y)$ не является эрмитово симметричным. Однако сужения этого ядра на положительную и отрицательную полуоси являются эрмитово симметричными. Формула (2.60) может рассматриваться как предельный случай более общего результата, полученного Бородиным и Ольшанским для так называемых z-мер (см. теорему 3.3 в [68], а также [69]–[71] и приведенные в этих работах ссылки). Пусть z, z' – комплексные числа такие, что или

$$z'=\bar{z}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}, \tag{2.61}$$

или

$$[z]<\min(z,z')\leqslant\max(z,z')<[z]+1,$$

где z, z' – вещественны и $[z]$ – целая часть z. Обозначим $(x)_j=x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+j-1)$, $(x)_0=1$. Далее, введем двупараметрическое семейство вероятностных мер $M^{(n)}_{z,z'}$ на $\mathrm{Par}(n)$. Эти меры возникли в гармоническом анализе на бесконечной симметрической группе [71], [65]. По определению они задаются как

$$M^{(n)}_{z,z'}(\lambda)=\frac{(z\cdot z')^{d(\lambda)}}{(z\cdot z')_n}\cdot\prod_{i=1}^{d(\lambda)}(z+1)_{p_i}\cdot(z'+1)_{p_i} \\ \times(-z+1)_{q_i}\cdot(-z'+1)_{q_i}\cdot\frac{\dim^2\lambda}{|\lambda|!}. \tag{2.62}$$

Сформулированные выше условия на z и z' эквивалентны требованию, что $(z)_j\cdot(z')_j$ и $(-z)_j\cdot(-z')_j$ положительны при $j=1,2,\ldots$. Отметим, что $M^{(n)}_{z,z'}$ сходится к мере Планшереля M_n при $z,z'\to\infty$. Мера $M^{(n)}_{z,z'}$ называется z-мерой n-го уровня. Рассмотрим теперь отрицательное биномиальное распределение на неотрицательных целых числах

$$(1-\xi)^{z\cdot z'}\cdot\frac{(z\cdot z')_n}{n!}\xi^n, \qquad n=0,1,\ldots,$$

где ξ – дополнительный параметр, $0<\xi<1$. Соответствующая смесь z-мер уровней $n=0,1,2,\ldots$ задает меру $M_{z,z',\xi}$ на Par. Заметим, что мера $M_{z,z',\xi}$ вырождается в M^{θ}, если $z,z'\to\infty$ и $\xi\to0$ так, что $zz'\xi\to\theta$. В работе [68] было показано,что в модифицированных координатах Фробениуса $M_{z,z',\xi}$ является детерминантным случайным точечным полем на $\mathbb{Z}^1+\frac12$. Соответствующее ему ядро может быть выражено в терминах гипергеометрической функции Гаусса и называется гипергеометрическим ядром. Оказывается, что многие известные ядра могут быть получены как вырождения гипергеометрического ядра; в частности, ядро Эрмита ((2.2), (2.3), (2.7)), ядро

Лагерра ((2.2), (2.28)), ядро Мейкснера (см. далее (2.67)), ядро Шарлье. Иерархия вырождений гипергеометрического ядра более подробно изложена в [69; раздел 9]. Недавно Окуньков показал [72], что меры $M_{z,z',\xi}$ являются специальным случаем бесконечно параметрического семейства вероятностных мер на Par, называемых мерами Шура и определяемыми следующим образом:

$$M(\lambda) = \frac{1}{z} s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y), \tag{2.63}$$

где s_λ – функции Шура (определение функций Шура приводится в [61] и [63]), $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ – набор параметров таких, что величина

$$Z = \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}} s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} \tag{2.64}$$

конечна и $\{x_i\}_{i=1}^\infty = \overline{\{y_i\}_{i=1}^\infty}$. Меры $M_{z,z',\xi}$ формально соответствуют $\sum_{i=1}^\infty x_i^m = \xi^{\frac{m}{2}} \cdot z$, $\sum_{i=1}^\infty y_i^m = \xi^{\frac{m}{2}} \cdot z'$, $m = 1, 2 \dots$. Более точно, следует рассматривать степенные ряды Ньютона как вещественные параметры и выразить функции Шура как многочлены по этим степенным рядам. Вероятно, теперь читатель не слишком удивится, узнав, что меры Шура также могут рассматриваться как детерминантные случайные точечные поля [72; теоремы 1, 2]!

2.6. Модель двумерного случайного роста. В качестве последнего примера мы рассмотрим одну модель двумерного случайного роста [73]. Пусть $\{a_{ij}\}_{i,j \geqslant 1}$ – семейство независимых одинаково геометрически распределенных случайных величин

$$p(a_{ij} = k) = p \cdot q^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.65}$$

где $0 < q < 1$, $p = 1 - q$. Распределение (2.65) может рассматриваться как распределение момента первого успеха в последовательности испытаний Бернулли. Определим

$$G(M, N) = \max_\pi \sum_{(i,j) \in \pi} a_{ij}, \tag{2.66}$$

где максимум берется по всем “вверх/направо” путям π из (1,1) в (M, N), другими словами, по всем путям

$$\pi = \bigl\{(i_1, j_1) = (1, 1),\ (i_2, j_2), (i_3, j_3), \dots, (i_{M+N-1}, j_{M+N-1}) = (M, N)\bigr\}$$

таким, что $(i_{k+1}, j_{k+1}) - (i_k, j_k) \in \{(0,1), (1,0)\}$. Попутно отметим, что распределение случайных величин $\{G(M,N)\}$ может быть интерпретировано в терминах растущих случайным образом диаграмм Юнга и полностью асимметричных процессов исключения с дискретным временем (более детально см. [73]). Без потери общности можно предположить, что $M \geqslant N \geqslant 1$. Для того чтобы установить более явно связь с детерминантными случайными точечными полями, мы введем на неотрицательных целых числах $x = 0, 1, 2 \dots$ дискретный вес $w_K^q(x) = \binom{x+K-1}{x} \cdot q^x$, $K = M - N + 1$. Ортонормированные с весом w_K^q многочлены $\{M_n(x)\}_{n \geqslant 0}$ пропорциональны классическим многочленам Мейкснера [74]. Ядро

$$K_{M,N}(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} M_j(x) M_j(y) \bigl(w_K^q(x) w_K^q(y)\bigr)^{1/2} \tag{2.67}$$

удовлетворяет условиям леммы 4 с считающей мерой на неотрицательных целых числах. Следовательно,

$$p_N(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{N!}\det\bigl(K_{M,N}(x_i,x_j)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant N} \tag{2.68}$$

задает дискретное детерминантное случайное точечное поле. Йохансон показал, что распределение случайной величины $G(M,N)$ совпадает с распределением самой правой частицы в (2.68). После подходящей нормировки это распределение сходится в пределе $N\to\infty$, $M\to\infty$, $\dfrac{M}{N}\to\mathrm{const}$ к распределению самой правой частицы в случайном точечном поле Эйри (2.36). Дополнительную информацию по теме двух последних разделов можно найти в недавних работах [75]–[88].

3. Трансляционно инвариантные детерминантные случайные точечные поля

Как и ранее, обозначим через $(X,\mathscr{B},\mathsf{P})$ случайное точечное поле с одночастичным пространством E, т.е. X – пространство локально конечных конфигураций частиц в E, $\mathscr{B}$ – борелевская σ-алгебра измеримых подмножеств X и P – вероятностная мера на $(X,\mathscr{B})$. В данном разделе мы всегда предполагаем, что $E=\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d$. Действие непрерывных сдвигов $\{T^t\}_{t\in E}$ аддитивной группы E на X определим следующим естественным образом:

$$T^t\colon X\to X,\quad (T^t\xi)_i=(\xi)_i+t. \tag{3.1}$$

Определение 5. Случайное точечное поле $(X,\mathscr{B},\mathsf{P})$ называется *трансляционно инвариантным*, если для всех $A\in\mathscr{B}$ и $t\in E$

$$\mathsf{P}(T^{-t}A)=\mathsf{P}(A).$$

Трансляционная инвариантность случайного точечного поля влечет трансляционную инвариантность k-точечных корреляционных функций:

$$\rho_k(x_1+t,\dots,x_k+t)=\rho_k(x_1,\dots,x_k)\ \text{ п.в.},\qquad k=1,2,\dots,\quad t\in E. \tag{3.2}$$

С другой стороны, если $\{\rho_k\}$ инвариантны под действием $\{T^t\}$, то существует соответствующее случайное точечное поле, являющееся трансляционно инвариантным [3]. В частности, если трансляционно инвариантные корреляционные функции задают P единственным образом, то случайное точечное поле трансляционно инвариантно. Это приводит к следующему критерию в случае детерминантных случайных точечных полей: детерминантное случайное точечное поле трансляционно инвариантно тогда и только тогда, когда ядро K трансляционно инвариантно, т.е. $K(x,y)=K(x-y,0)=:K(x-y)$. В данном разделе мы будем изучать трансляционно инвариантные детерминантные случайные точечные поля. В первую очередь мы будем исследовать эргодические свойства динамической системы $(X,\mathscr{B},\mathsf{P},\{T^t\})$. Для удобства читателя напомним основные определения эргодической теории [89].

– Динамическая система называется эргодической, если мера $\mathsf{P}(A)$ каждого инвариантного множества A равна 0 или 1.

– Динамическая система обладает свойством перемешивающей кратности $r \geqslant 1$, если для любых функций $f_0, f_1, \dots, f_r \in L^{r+1}(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$ справедливо соотношение

$$\lim_{t_1,\dots,t_r\to\infty} \int_X f_0(\xi) f_1(T^{t_1}\xi) : \dots : f_r(T^{t_1+\dots+t_r}\xi)\, dF = \prod_{i=0}^{r} \int_X f_i(\xi)\, d\mathsf{P}. \tag{3.3}$$

– Динамическая система имеет абсолютно непрерывной спектр, если для всех функций $f \in L^2(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$, ортогональных одномерному подпространству констант,

$$\int_X f(\xi)\overline{f(T^t\xi)}\, d\mathsf{P} = \int e^{i(t\cdot\lambda)} h_f(\lambda)\, d\lambda, \tag{3.4}$$

где интегрирование в правой части производится по $\mathbb{R}^d$ в непрерывном случае и по $[0, 2\pi]^d$ в дискретном случае и $h_f(\lambda)\, d\lambda$ – конечная мера, абсолютно непрерывная по мере Лебега. Равенство (3.4) можно интерпретировать следующим образом. Определим d-параметрическую группу унитарных операторов $\{U^t\}_{t\in E}$ на $L^2(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$:

$$(U^t f)(\xi) = f(T^t\xi).$$

Обычно такое семейство унитарных операторов называется сопряженным к динамической системе. Легко показать, что операторы $\{U^t\}$ коммутируют друг с другом. Поскольку $L^2(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$ – сепарабельно и $(U^t\psi, \varphi)$ – измеримая функция t для всех $\psi, \varphi \in L^2(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$, по теореме фонНоймана [12; т. 1, теорема VIII.9] заключаем, что U^t сильно непрерывно. В случае $E = \mathbb{R}^d$ мы имеем $h_f(\lambda)\, d\lambda = d(f, Q_\lambda f)$, где dQ_λ – проекторнозначная мера, операторы

$$Q_\lambda = Q_{(-\infty,\lambda_1)\times\dots\times(-\infty,\lambda_d)} = \prod_{j=1}^{d} \chi_{(-\infty,\lambda_j)}(A_j)$$

и $\{A_j\}_{j=1}^d$ являются генераторами однопараметрических групп $U^{(0,\dots,t_j,0,\dots,0)}$, и $\chi_{(-\infty,t)}$ – характеристическая функция $(-\infty, t)$ [12; т. 1, теорема VIII.12]. В дискретном случае $E = \mathbb{Z}^d$, dQ_λ – проекторнозначная мера на d-мерном торе,

$$Q_{[1,e^{i\lambda_1}]\times\dots\times[1,e^{i\lambda_d}]} = \prod_{j=1}^{d} \chi_{[1,e^{i\lambda_j}]}(U_j), \qquad U_j = U^{(0,\dots,t_j=1,\dots,0)}.$$

Теорема 7. *Пусть* $(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$ – *трансляционно инвариантное детерминантное случайное точечное поле. Тогда динамическая система* $(X, \mathscr{B}, \mathsf{P}, \{T^t\})$ *эргодична, обладает свойством перемешивания любой кратности и имеет абсолютно непрерывный спектр.*

Замечание 11. Напомним, что из абсолютной непрерывности спектра следует свойство перемешивания кратности 1, откуда в свою очередь следует эргодичность [89].

Доказательство теоремы 7. Заметим, что линейные комбинации функций

$$f(\xi) = \prod_{j=1}^{N} S_{g_j}(\xi), \quad N \geqslant 1, \; S_g(\xi) = \sum_i g(x_i), \; g_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \; j = 1, \dots N, \tag{3.5}$$

плотны в $L^2(X, \mathscr{B}, \mathsf{P})$. Следовательно, достаточно установить (3.3) и (3.4) только для таких функций. Начнем доказательство с леммы, позволяющей вычислить математическое ожидание для (3.5).

Лемма 5. a)

$$\mathsf{E}_P \prod_{j=1}^{N} S_{g_j}(\xi) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{\text{по разбиениям} \\ \bigsqcup_{\ell=1}^{m} C_\ell = \{1,\dots,N\}}} \prod_{\ell=1}^{m} \Bigg[\sum_{k_\ell=1}^{\#(C_\ell)} \sum_{\substack{\text{по разбиениям} \\ \bigsqcup_{i=1}^{k_\ell} B_{\ell i} = C_\ell}} \left\{ \sum_{\sigma \in S^{k_\ell}} \frac{(-1)^\sigma}{k_\ell} \cdot \int \prod_{i=1}^{k_\ell} g_{B_{\ell i}}(x_{\sigma(i)}) \cdot K(x_{\sigma(i+1)} - x_{\sigma(i)})\, dx_1 \cdots dx_{k_\ell} \right\} \Bigg], \tag{3.6}$$

где $g_{B_{\ell i}}(x) = \prod_{j \in B_{\ell i}} g_j(x)$.

b) $\mathsf{E} \prod_{j=1}^{N_1+\dots+N_{r+1}} S_{g_j}(\xi) - \prod_{s=1}^{r+1} \big(\mathsf{E} \prod_{N_1+\dots+N_{s-1}+1}^{N_1+\dots+N_s} S_{g_j}(\xi)\big) =$ *выражение, аналогичное* (3.6), *с единственным отличием, состоящим в том, что разбиения*

$$\bigsqcup_{\ell=1}^{m} C_\ell = \left\{1, 2, \dots, \sum_{s=1}^{r+1} N_s \right\} \tag{3.7}$$

удовлетворяют условию $(*)$, *где*

- $(*)$ *Существует по крайней мере один элемент* C_ℓ *разбиения такой, что пересечения* C_ℓ *с по крайней мере двумя из наборов* $\{1, \dots N_1\}, \dots, \{N_1 + \dots + N_{s-1} + 1, \dots, N_1 + \dots + N_s\}, \dots, \{N_1 + \dots + N_r + 1, \dots, N_1 + \dots + N_{r+1}\}$ *не пусты.*

Доказательство. Доказательство части a) не составляет труда и полностью аналогично доказательству, приведенному в начале § 2 в [42] (см. формулы (2.1)–(2.7) указанной работы). Доказательство части b) следует из a).

Для вывода свойства перемешивания (3.3) заменим в формуле (3.7) $g_j(\,\cdot\,)$ для $N_1 + \dots + N_{s-1} + 1 \leqslant j \leqslant N_1 + \dots + N_s$, $s = 1, \dots, r+1$, на $g_j(\,\cdot\, + t_1 + \dots + t_{s-1})$. Зафиксируем разбиение $\bigsqcup_{\ell=1}^{m} C_\ell = \{1, 2, \dots, N_1 + \dots + N_{r+1}\}$. Поскольку функции $\{g_j\}$ ограничены и имеют компактный носитель, каждый из m множителей в правой части (3.6) ограничен. Утверждается, что тогда ℓ-й множитель (соответствующий C_ℓ, где ℓ – тот же индекс, что и в условии $(*)$) стремится к нулю. Для проверки этого факта зафиксируем произвольное разбиение C_ℓ, $\bigsqcup_{i=1}^{k_\ell} B_{\ell i} = C_\ell$. По предположению, C_ℓ содержит индексы $1 \leqslant u < v \leqslant N_1 + \dots + N_{r+1}$ такие, что u и v принадлежат различным подмножествам $\{1, \dots, N_1\}, \dots, \{N_1 + \dots + N_{s-1} + 1, \dots, N_1 + \dots + N_s\}, \dots, \{N_1 + \dots + N_r + 1, \dots, N_1 + \dots + N_{r+1}\}$. Покажем, что

$$\int \prod_{i=1}^{k_\ell} g_{B_{\ell i}}(x_{\sigma(i)}) \cdot K(x_{\sigma(i+1)} - x_{\sigma(i)})\, dx_1 \cdots dx_{k_\ell} \tag{3.8}$$

стремится к нулю при $\min\{t_s, 1 \leqslant s \leqslant r\} \to \infty$. В самом деле, если $\min\{t_s, 1 \leqslant s \leqslant r\}$ достаточно велик, то индексы u и v принадлежат различным $B_{\ell i}$ или, иначе, соответствующая величина $g_{B_{\ell i}}$ тождественно равна нулю (носители множителей в $g_{B_{\ell i}}$ не будут пересекаться). Если же u и v принадлежат различным $B_{\ell i}$, то аргумент в $K(x_{\sigma(i+1)} - x_{\sigma(i)})$ для некоторого i больше чем $\min\{t_s, 1 \leqslant s \leqslant r\}$. Поскольку преобразование Фурье ядра $K(x)$, $\widehat{K}(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int e^{ixt} K(x)\,dx$, – неотрицательная суммируемая функция (ограниченная сверху единицей), то по лемме Римана–Лебега получаем, что $K(x_{\sigma(i+1)} - x_{\sigma(i)})$ стремится к нулю. Остальные множители в (3.8) ограничены, и интегрирование производится по ограниченному множеству. Следовательно, (3.8) стремится к нулю, из чего следует справедливость свойства перемешивания.

Для доказательства абсолютной непрерывности спектра применим (3.7) к случаю, когда $r = 2$, $N_1 = N_2 = N$, $g_{N+j}(x) = \overline{g_j(x+t)}$, $j = 1, \dots, N$, $f(\xi) = \prod_{j=1}^N S_{g_j}(\xi)$, $\overline{f(T^t\xi)} = \prod_{j=1}^N S_{\overline{g_j}}(T^t\xi) = \prod_{j=N+1}^{2N} S_{\overline{g_j}}(\xi)$. Имеем

$$
\mathsf{E}(f(\xi) - \mathsf{E}f) \cdot (\overline{f(T^t\xi)} - \overline{\mathsf{E}f}) = \sum_{m=1}^{2N} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\text{по разбиениям} \\ \bigsqcup_{\ell=1}^m C_\ell = \{1,\dots,2N\}}} \prod_{\ell=1}^m \Bigg[\sum_{k_\ell=1}^{\#(C_\ell)} \sum_{\substack{\text{по разбиениям} \\ \bigsqcup_{i=1}^{k_\ell} B_{\ell i} = C_\ell}} \Bigg\{ \sum_{\sigma \in S^{k_\ell}} \frac{(-1)^\sigma}{k_\ell} \cdot \int \prod_{i=1}^{k_\ell} g_{B_{\ell\sigma(i)}}(x_i) \cdot K(x_{i+1} - x_i)\,dx_1 \cdots dx_{k_\ell} \Bigg\} \Bigg], \tag{3.9}
$$

где мы предполагаем, что в интеграле $x_{k_\ell+1} = x_1$, и суммирование в $\sum^*$ производится по разбиениям $\{C_1, \dots, C_m\}$ таким, что по крайней мере для одного элемента C_ℓ разбиения как $C_\ell \cap \{1, 2, \dots, N\}$, так и $C_\ell \cap \{N+1, \dots, 2N\}$ – непустые множества (выше мы обозначили последнее условие через $(*)$). Множители в произведении $\prod_{\ell=1}^m$, соответствующие тем ℓ, которые не удовлетворяют условию $(*)$, как функции от t являются константами. Зафиксируем теперь ℓ, удовлетворяющее условию $(*)$. Утверждается, что выражение

$$
\begin{aligned}
&\int \prod_{i=1}^{k_\ell} g_{B_{\ell\sigma(i)}}(x_i) \cdot K(x_{i+1} - x_i)\,dx_1 \cdots dx_{k_\ell} \\
&\quad = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k_\ell} \prod_{i=1}^{k_\ell} \widehat{g}_{B_{\ell\sigma(i)}}(y_{i+1} - y_i) \cdot \widehat{K}(y_{i+1})\,dy_1 \cdots dy_{k_\ell}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

может быть записано в виде $\displaystyle\int e^{i(t\cdot\lambda)} h(\lambda)\,d\lambda$, где $h(\lambda)$ – некоторая интегрируемая функция. Проверка этого утверждения не составляет труда и оставляется читателю. Мы заключаем, что (3.9) является линейной комбинацией преобразований Фурье интегрируемых функций. Так как произведение преобразований Фурье есть преобразование Фурье свертки, отсюда следует абсолютная непрерывность спектра. Теорема 7 доказана.

Нетрудно вычислить спектральную плотность центрированной линейной статистики

$$
S_g(\xi) = \mathsf{E}S_g = \sum_i g(x_i) - \mathsf{E}\sum_i g(x_i).
$$

А именно,

$$\mathsf{E}(S_g - \mathsf{E}S_g)(\overline{S_g(T^t\cdot)} - \mathsf{E}\overline{S_g}) = \int e^{i(t\lambda)} \cdot \big(K(0) - \widehat{|K|^2}(\lambda)\big) \frac{1}{2\pi} |\widehat{g}(\lambda)|^2 \, d\lambda,$$

$$h_{S_g}(\lambda) = (K(0) - \widehat{|K|^2}(\lambda)) \cdot \frac{1}{2\pi} |\widehat{g}(\lambda)|^2. \tag{3.11}$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\mu(d\lambda) = \big(K(0) - \widehat{|K|^2}(\lambda)\big)\, d\lambda \tag{3.12}$$

является спектральной мерой ограничения $\{U^t\}$ на подпространство центрированных линейных статистик. Поскольку $0 \leqslant \widehat{K}(\lambda) \leqslant 1$, $K(0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \widehat{K}(\lambda)\, d\lambda$, мы получаем

$$0 \leqslant \frac{d\mu}{d\lambda} = K(0) - \widehat{|K|^2}(\lambda) = K(0) - \frac{1}{2\pi} \int \widehat{K}(y) \widehat{K}(y - \lambda)\, dy \leqslant K(0).$$

Заметим, что $\dfrac{d\mu}{d\lambda} > 0$ для $\lambda \neq 0$ и $\dfrac{d\mu}{d\lambda}(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $\widehat{K}(\lambda)$ – индикатор. В частности, спектральная мера μ эквивалентна мере Лебега.

Прежде чем мы сформулируем следующую лемму, напомним, что через $\#_{[-L,L]^d}(\xi)$ мы обозначаем число частиц в $[-L, L]^d$.

Лемма 6.

$$\mathsf{D}(\#_{[-L,L]^d}) = \mathrm{Vol}([-L, L]^d) \cdot \left(\frac{d\mu}{d\lambda}(0) + o(1)\right) \quad \textit{при} \quad L \to \infty. \tag{3.13}$$

Доказательство. Специалисты по теории вероятностей хорошо знакомы с аналогом этого результата в теории случайных процессов: пусть $\{\eta_n\}$ – L^2-стационарная случайная последовательность и $h(\lambda)$ – ее спектральная плотность,

$$\mathsf{E}\eta_n \overline{\eta_m} = b(n - m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\cdot(n-m)} h(\lambda)\, d\lambda.$$

Тогда $\mathsf{D}(\eta_n + \dots + \eta_n) = (h(0) + o(1)) \cdot n$ [90; раздел XVIII.2]. Для доказательства леммы запишем

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(\#_{[-L,L]^d}) &= \int_{[-L,L]^d} \int_{[-L,L]^d} \big(\rho_2(x, y) - \rho_1(x)\rho_1(y)\big)\, dx\, dy + \int_{[-L,L]^d} \rho_1(x)\, dx \\
&= -\int_{[-L,L]^d} \int_{[-L,L]^d} |K|^2(x - y)\, dx\, dy + K(0)\, \mathrm{Vol}([-L, L]^d) \\
&= \left(K(0) - \int_{\mathbb{R}^d} |K|^2(x)\, dx + o(1)\right) \cdot \mathrm{Vol}([-L, L]^d) \\
&= \big(K(0) - \widehat{|K|^2}(0) + o(1)\big) \cdot \mathrm{Vol}([-L, L]^d).
\end{aligned}$$

Члены меньшего порядка в (3.13) также зависят от поведения $\dfrac{d\mu}{d\lambda}$ около нуля. Например, пусть $\widehat{K}(\lambda)$ – индикатор, $\widehat{K}(\lambda) = \chi_B(\lambda)$, и $B \subset \mathbb{R}^d$. Как было показано выше, это эквивалентно тому, что $\dfrac{d\mu}{d\lambda}(0) = 0$. Предположим для простоты, что $d = 1$. Если B есть объединение m непересекающихся интервалов, то

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{d\lambda}(\lambda) &= K(0) - \frac{1}{2\pi}\int \widehat{K}(y)\cdot\widehat{K}(y-\lambda)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\bigl[\mathrm{length}(B) - \mathrm{length}(B\cap(B+\lambda))\bigr] \\ &= \frac{m}{2\pi}\cdot|\lambda|\cdot\bigl(1+o(1)\bigr), \quad \lambda\to 0,\end{aligned} \tag{3.14}$$

и более тщательная оценка асимптотики выражения

$$\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}|K|^2(x-y)\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{|K|^2}(\lambda)\cdot\left(\frac{2\sin(L\cdot\lambda)}{\lambda}\right)^2 d\lambda$$

показывает, что

$$\mathsf{D}(\#_{[-L,L]^d}) = \frac{m}{\pi^2}\log L\cdot\bigl(1+o(1)\bigr), \tag{3.15}$$

Выбирая $m = 1$, $\widehat{K}(\lambda) = X_{[-\pi,\pi]}(\lambda)$, мы получаем синус-ядро $K(x-y) = \dfrac{\sin\pi(x-y)}{\pi(x-y)}$. Особая роль, присущая синус-ядру, проявляется в том, что скорость роста $\dfrac{1}{\pi^2}\log L$ для $\mathsf{D}(\#_{[-L,L]})$ является наименьшей среди всех трансляционно инвариантных ядер. Если $B = \bigsqcup_{n\geqslant 1}[n, n+1/n^\gamma]$, $\gamma > 1$, то $\dfrac{d\mu}{d\lambda} \sim |\lambda|^{1-\frac{1}{\gamma}}$ и $\mathsf{D}(\#_{[-L,L]}) \sim L^{\frac{1}{\gamma}}$. И вообще, $\dfrac{d\mu}{d\lambda} \sim |\lambda|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, влечет $\mathsf{D}(\#_{[-L,L]}) \sim L^{1-\alpha}$.

4. Центральная предельная теорема для считающей функции и для эмпирической функции распределения интервалов

В [91] Костин и Либовиц доказали центральную предельную теорему для $\#_{[-L,L]}$ в случае синус-ядра. Статья содержит также замечание (см. с. 71), сделанное Видомом, что полученный результат остается справедливым для более широкого класса случайных матричных моделей. В общей форме соответствующая теорема была опубликована в [41].

Теорема 8. *Пусть E определяется так же, как в* (1.1), $\{0 < K_t \leqslant 1\}$ – *семейство операторов в $L^2(E)$, локально имеющих след,* $\{(X, \mathscr{B}, \mathsf{P}_t)\}$ – *семейство соответствующих детерминантных случайных точечных полей в E и* $\{I_t\}$ – *семейство измеримых подмножеств в E таких, что*

$$\mathsf{D}_t\#_{I_t} = \mathrm{Tr}(K_t\cdot\chi_{I_t} - (K_t\cdot\chi_{I_t})^2) \to \infty \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \tag{4.1}$$

Тогда распределение нормализованного числа частиц в I_t (относительно P_t) сходится к нормальному закону, т.е.

$$\frac{\#_t - \mathsf{E}\#_{I_t}}{\sqrt{\mathsf{D}_t\#_t}} \xrightarrow{\mathrm{w}} N(0,1).$$

Замечание 12. В [41] было показано, что условию (4.1) теоремы 8 (рост дисперсии) удовлетворяют ядро Эйри ($K_t \equiv K$ из (2.36), с расширяющимся I_t), ядро Бесселя ($K_t \equiv K$ из (2.37), с расширяющимся I_t) и семейства ядер $\{K_n\}$, соответствующих случайным матрицам из классических компактных групп (§ 2.3b, § 2.3c). Во всех этих случаях $\mathsf{D}_t\#_{I_t}$ растет логарифмически по $\mathsf{E}_t\#_{I_t}$.

Замечание 13. Для того чтобы построить пример ядра $0 \leqslant K \leqslant \mathrm{Id}$ такого, что $\mathsf{E}\#_{[-n,n]} = \operatorname{Tr} K\cdot\chi_{[-n,n]} \to \infty$ при $n\to\infty$, но $\mathsf{D}\#_{[-n,n]} = \operatorname{Tr}(K\cdot\chi_{[-n,n]} - (K\cdot\chi_{[-n,n]})^2)$ остается ограниченной, рассмотрим набор функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям

a) $\operatorname{supp}\varphi_n \in (n, n+1)$,

b) $||\varphi_n||_{L^2} = 1$.

Тогда
$$K(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right)\cdot\varphi_n(x)\cdot\overline{\varphi_n(y)}$$
является искомым ядром. В самом деле,
$$\mathsf{E}\#_{[-n,n]} = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$
$$\mathsf{D}\#_{[-n,n]} = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)\cdot\frac{1}{k^2+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)\cdot\frac{1}{k^2+1} < \infty.$$
С другой стороны, если $0 \leqslant K \leqslant \mathrm{Id}$ – компактный оператор, локально имеющий след, и $\operatorname{Tr} K\cdot\chi_{[-n,n]} \to +\infty$, то $\operatorname{Tr} K\cdot\chi_{[-n,n]} - (K\cdot X_{[-n,n]})^2 \to +\infty$.

Результат теоремы 8 может быть обобщен на случай конечного числа интервалов. А именно, если $I_t^{(1)},\dots,I_t^{(m)}$ – непересекающиеся подмножества такие, что $\mathrm{Cov}_t(\#_{I_t^{(i)}},\#_{I_t^{(j)}})/V_t \to b_{ij}$ при $t\to\infty$, $1\leqslant i,j\leqslant m$, где V_t – некоторая функция t, растущая на бесконечность, то распределение случайного вектора $((\#_{I_t^{(k)}} - \mathsf{E}_t\#_{I_t^{(k)}} I_t^{(i)}/V_t^{1/2})_{k=1,\dots,m}$ сходится к m-мерному центрированному нормальному вектору с матрицей ковариаций $(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ [41].

Обратим теперь наше внимание на проблему глобального распределения интервалов. Пусть $E = \mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d$, $\{B_j\}_{j=1}^k$ – некоторые ограниченные измеримые подмножества E и $\{n_j\}_{j=1}^k$ – некоторые неотрицательные целые числа. Мы будем изучать считающие статистики следующего вида:

$$\eta_L(B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k) := \#(x_i\in[-L,L]^d : \#_{x_i+B_j} = n_j,\ j=1,\dots,k). \tag{4.2}$$

Без ограничения общности мы можем предположить, что $\{B_j\}$ не пересекаются и не содержат начало координат. Если $d=1$, $k=1$, $B_1=(0,s]$, то $\eta_L((0,s],0)$ есть число интервалов в $[-L,L]$, больших, чем s: $\eta_L((0,s],0) = \#\{x_i\in[-L,L] : x_{i+1}-x_i > s\}$, и $\eta_L((0,s],n)$ – число n-интервалов, больших, чем s: $\eta_L((0,s],n) = \#\{x_i\in[-L,L] : x_{i+n+1}-x_i > s\}$. В [40] мы доказали сходимость по распределению процесса $\dfrac{\eta_L((0,s],0) - \mathsf{E}\eta_L((0,s],0)}{L^{1/2}}$ к предельному гауссовскому процессу в случае $K(x,y) = \dfrac{\sin\pi(x-y)}{\pi(x-y)}$. Напомним, что сходимость по распределению (функциональная центральная предельная теорема) означает не только сходимость конечно-мерных распределений, но и сходимость всех функционалов, непрерывных в подходящей (например, локально равномерной) топологии на пространстве выборочных траекторий. Доказательство центральной предельной теоремы для конечномерных распределений $\eta_L((0,s],0)$ может быть перенесено практически дословно на случай произвольного, не обязательно трансляционно инвариантного, ядра $K(x,y)$ и размерности $d \geqslant 1$, в предположении, что выполнены условия (4.33), (4.34) и (4.35). Можно также заменить $(0,s]$ на произвольное ограниченное измеримое множество $B \subset E$. Для удобства читателя мы кратко приводим ниже основные идеи доказательства центральной предельной теоремы в конечномерном случае. Зафиксируем $B_1,\dots,B_k;\, n_1,\dots,n_k$. Построим новое (называемое модифицированным) случайное точечное поле такое, что $\eta_L(B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)$ есть число всех частиц модифицированного случайного точечного поля в $[-L,L]^d$. А именно, оставим только те частицы исходного случайного точечного поля, для которых

$$\#_{x_i+B_j} = n_j, \qquad j=1,\dots,k, \tag{4.3}$$

и уберем те частицы, для которых условие (4.3) нарушается. В общем случае модифицированное случайное точечное поле уже не является детерминантным случайным точечным полем. Однако важно отметить, что его корреляционные функции и кластерные функции (см. определение 6 ниже) могут быть выражены в терминах корреляционных функций исходного детерминантного случайного точечного поля. Обозначим через $\rho_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)$ ℓ-точечную корреляционную функцию модифицированного случайного точечного поля. Предположим, что

$$x_i \notin x_j + B_p, \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell, \quad 1 \leqslant p \leqslant k. \tag{4.4}$$

Тогда по принципу включения-исключения

$$\begin{aligned}
&\rho_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k) \\
&\quad= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\underbrace{\int_{(x_1+B_1)^{n_1}\times\dots\times(x_1+B_k)^{n_k}}\cdots\int_{(x_\ell+B_1)^{n_1}\times\dots\times(x_\ell+B_k)^{n_k}}}_{\longleftarrow\ \ell\ \text{раз}\ \longrightarrow} \\
&\qquad\int_{((x_1+\bigsqcup_{j=1}^k B_j)\sqcup\dots\sqcup(x_\ell+\bigsqcup_{j=1}^k B_j))^m}\rho_{\ell+\ell\cdot n+m}(x_1,\dots,x_\ell; \\
&\qquad\quad x_{11},\dots,x_{1n},x_{21},\dots,x_{2n},\dots,x_{\ell 1},\dots,x_{\ell n},y_1,\dots,y_m) \\
&\qquad\qquad\times dy_1\cdots dy_m\,dx_{\ell 1}\cdots dx_{\ell n}\cdots dx_{11}\cdots dx_{1n}, \\
&\qquad\qquad\qquad n=n_1+\dots+n_k.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Если (4.4) не выполняется, то формула имеет похожий вид, с той лишь разницей, что показатель степени n_j в $(x_i+B_j)^{n_j} = \underbrace{(x_i+B_j)\times\dots\times(x_i+B_j)}_{\longleftarrow\ n_j\ \text{раз}\ \longrightarrow}, 1 \leqslant i \leqslant \ell, 1 \leqslant j \leqslant k$, следует заменить на $n_j - \#(1 \leqslant r \neq i \leqslant k : x_r \in x_i + B_j)$. Несмотря на то, что формула (4.5) выглядит достаточно громоздкой и длинной, она тем не менее очень полезна при вычислении асимптотик моментов $\eta_L(B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)$. (Конечно, ключевое значение при этом имеет предположение, что корреляционные функции исходного случайного точечного поля являются детерминантами.) Напомним определение кластерных функций.

Определение 6. ℓ-точечные кластерные функции $r_\ell(x_1,\dots,x_\ell)$, $\ell=1,2,\dots$, случайного точечного поля определяются формулой

$$r_\ell(x_1,\dots,x_\ell)=\sum_G(-1)^{m-1}(m-1)!\cdot\prod_{j=1}^m\rho_{|G_j|}(\bar{x}(G_j)), \tag{4.6}$$

где сумма берется по всем разбиениям G множества $[\ell]=\{1,2,\dots,\ell\}$ на подмножества $G_1,\dots,G_m$, $m=1,\dots,\ell$, и $\bar{x}(G_j)=\{x_i: i\in G_j\}$, $|G_j|=\#(G_j)$.

Кластерные функции известны также в статистической механике как урезанные корреляционные функции и функции Урселла. Иногда в литературе посредством правой части (4.6) определяют функции $(-1)^{\ell-1}r_\ell$. Корреляционные функции могут быть получены из кластерных функций с помощью формулы обращения:

$$\rho_\ell(x_1,\dots,x_\ell)=\sum_G\prod_{j=1}^m r_{|G_j|}(\bar{x}(G_j)). \tag{4.7}$$

(Формула (4.6) есть не что иное, как формула обращения Мёбиуса применительно к (4.7).) Интегралы от кластерных функции $r_\ell(x_1,\dots,x_\ell)$ по $\underbrace{[-L,L]^d\times\dots\times[-L,L]^d}_{\longleftarrow\ \ell\ \text{раз}\ \longrightarrow}$ $=[-L,L]^{\ell d}$ тесно связаны с кумулянтами $C_j(L)$ числа частиц в $[-L,L]^d$:

$$\begin{aligned}
V_1(L)&=\int_{[-L,L]^d}r_1(x_1)\,dx_1=C_1(L)=\mathsf{E}\#_{[-L,L]^d},\\
V_2(L)&:=\int_{[-L,L]^d}\int_{[-L,L]^d}r_2(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2\\
&=C_2(L)-C_1(L)=\mathsf{D}\#_{[-L,L]^d}-\mathsf{E}\#_{[-L,L]^d},\\
V_3(L)&:=\int_{[-L,L]^d}\int_{[-L,L]^d}\int_{[-L,L]^d}r_3(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\\
&=C_3(L)-3C_2(L)+2C_1(L).
\end{aligned}$$

В общем случае

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{C_n(L)}{n!}z^n=\sum_{n=1}^\infty\frac{V_n(L)}{n!}(e^z-1)^n \tag{4.8}$$

(см. [91], [40]). В случае детерминантных случайных точечных полей

$$r_\ell(x_1,\dots,x_\ell)=(-1)^{\ell-1}\sum_{\text{циклические }\sigma\in S_\ell}K(x_1,x_2)\cdot K(x_2,x_3)\cdot\ldots\cdot K(x_\ell,x_1), \tag{4.9}$$

где сумма берется по всем циклическим перестановкам и выражение под знаком суммы соответствует $\sigma=(1\,2\,3\dots\ell)$. Формула (4.9) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
r_\ell(x_1,\dots,x_\ell)&=(-1)^{\ell-1}\cdot\frac{1}{\ell}\\
&\times\sum_{\sigma\in S_\ell}K(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)})\cdot K(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})\cdot\ldots\cdot K(x_{\sigma(\ell)},x_{\sigma(1)}).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Отметим, что разница между (4.9) и формулой для ℓ-точечных корреляционных функций

$$\rho_\ell(x_1,\dots,x_\ell)=\sum_{\sigma\in S_\ell}(-1)^\sigma K(x_1,x_{\sigma(1)})\cdot K(x_2,x_{\sigma(2)})\cdot\ldots\cdot K(x,x_{\sigma(\ell)}) \tag{4.11}$$

состоит в том, что суммирование в (4.9) производится только по циклическим перестановкам, тогда как в (4.11) – по всем $\sigma\in S_l$. Оказывается, что соотношение между $\rho_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)$ и $r_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)$ имеет аналогичный вид.

Лемма 7. *Предположим, что условие* (4.4) *выполнено. Тогда*

$$\begin{aligned} &r_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)\\ &\quad=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!}\underbrace{\int_{(x_1+B_1)^{n_1}\times\dots\times(x_1+B_k)^{n_k}}\cdots\int_{(x_\ell+B_1)^{n_1}\times\dots\times(x_\ell+B_k)^{n_k}}}_{\longleftarrow\ \ell\text{ раз}\ \longrightarrow}\\ &\qquad\int_{((x_1+\bigsqcup_{j=1}^k B_j)\sqcup\dots\sqcup(x_\ell+\bigsqcup_{j=1}^k B_j))^m}\rho_{\ell+\ell\cdot n+m,\ell}(x_1,\dots,x_\ell;\\ &\qquad\quad x_{11},\dots,x_{1n},x_{21},\dots,x_{2n},\dots,x_{\ell1},\dots,x_{\ell n},y_1,\dots,y_m)\\ &\qquad\qquad\times dy_1\cdots dy_m\,dx_{\ell1}\cdots dx_{\ell n}\cdots dx_{11}\cdots dx_{1n}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

где функция $\rho_{\ell+\ell\cdot n+m,\ell}$ *определяется ниже в* (4.13).

Для того чтобы определить $\rho_{\ell+\ell\cdot n+m,\ell}$, напомним, что

$$\rho_{\ell+\ell\cdot n+m}(x_1,\dots,y_m)=\sum_{\sigma\in S_{\ell+\ell\cdot n+m}}(-1)^\sigma K(x_1,\sigma(x_1))\cdot\ldots\cdot K(y_m,\sigma(y_m)),$$

где σ – перестановка на множестве величин $(x_1,\dots,x_\ell,x_{11},\dots,x_{\ell n},y_1,\dots,y_m)$. Положим

$$\rho_{\ell+\ell\cdot n+m,\ell}(x_1,\dots,y_m)=\sum_{\sigma\in S_{\ell+\ell\cdot n+m}}^{*}(-1)^\sigma K(x_1,\sigma(x_1))\cdot\ldots\cdot K(y_m,\sigma(y_m)), \tag{4.13}$$

где суммирование в $\sum^*$ производится по всем перестановкам σ, удовлетворяющим следующему условию.

Пусть τ – многозначное отображение, определенное на $\{1,\dots,\ell\}$, со значениями в $\{1,\dots,\ell\}$:

$$\begin{aligned}\tau(i)=\biggl\{j:\sigma\biggl(\{x_i,x_{i1},\dots,x_{in}\}\sqcup\biggl(\{y_1,\dots,y_m\}\cap\biggl(x_i+\bigsqcup_{p=1}^k B_p\biggr)\biggr)\biggr)\\ \cap\biggl(\{x_j,x_{j1},\dots,x_{jn}\}\sqcup\biggl(\{y_1,\dots,y_m\}\cap\biggl(x_j+\bigsqcup_{p=1}^k B_p\biggr)\biggr)\biggr)\neq\varnothing\biggr\};\end{aligned} \tag{4.14}$$

тогда для всех $1\leqslant i,j\leqslant\ell$ существует $N=N(i,j)$ такое, что

$$\tau^N(i)\ni j. \tag{4.15}$$

Замечание 14. Доказательство леммы 7 в случае $d=1$, $K(x,y)=\dfrac{\sin\pi(x-y)}{\pi(x-y)}$, $B_1=(0,s]$, $n_1=0$ было дано в § 3 работы [40]. В общем случае аргументация остается без изменений. Как следствие леммы 7 мы получаем следующий результат.

Лемма 8. *Пусть*

$$|K(x,y)| \leqslant \psi(x-y), \tag{4.16}$$

где ψ – некоторая ограниченная функция, и условие (4.4) выполняется для набора $(x_1,\dots,x_\ell)$. Тогда для произвольного $\delta>0$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} &|r_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k| \\ &\quad\leqslant \operatorname{const}(\ell,\delta) \sum_{\text{циклические } \sigma\in S_\ell} \bigl(\psi(x_2-x_1)\cdot\psi(x_3-x_2)\cdot\ldots\cdot\psi(x_1-x_\ell)\bigr)^{1-\delta}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

За доказательством леммы 8 мы отсылаем читателя к § 3 работы [40]. Ключевой идеей доказательства является оценка сверху абсолютной величины m-го члена ряда (4.12) через

$$\begin{aligned} &\operatorname{const}_1(n,\ell)\cdot\frac{1}{m!}\operatorname{const}_2^m\cdot\min\biggl\{\operatorname{const}_3(n,\ell);(\ell+\ell n+m)! \\ &\qquad\times\sum_{\text{циклические } \sigma\in S_\ell}\bigl(\psi(x_2-x_1)\cdot\psi(x_3-x_2)\cdot\ldots\cdot\psi(x_1-x_\ell)\bigr)\biggr\}. \end{aligned}$$

Если $\psi^{1-\delta}\in L^2(E)$ для некоторого $0<\delta<1$, то

$$\begin{aligned} &\int_{[-L,L]^d}\cdots\int_{[-L,L]^d}\psi(x_2-x_1)^{1-\delta}\cdot\ldots\cdot\psi(x_1-x_\ell)^{1-\delta}\,dx_1\cdots dx_\ell \\ &\qquad\leqslant\operatorname{const}(\psi)\cdot\int_{[-L,L]^d}\psi(x-y)^{2-2\delta}\,dx\,dy=O(L^d), \end{aligned}$$

и, следовательно, из леммы 8 вытекает, что для $\ell=1,2,\dots$

$$\int_{[-L,L]^{d\ell}\cap(4.4)} r_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)\,dx_1\cdots dx_\ell=O(L^d). \tag{4.18}$$

В частности,

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\eta_L(B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k) \\ &\qquad=V_1(L)=\int_{[-L,L]^d} r_1(x;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)\,dx=O(L^d). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Предположим, что мы можем показать, что

$$\begin{aligned} \mathsf{D}\eta_L&(B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)=V_1(L)+V_2(L) \\ &=\int_{[-L,L]^d} r_1(x;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)\,dx \\ &\quad+\int_{[-L,L]^d}\int_{[-L,L]^d} r_2(x_1,x_2;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)\,dx_1\,dx_2 \\ &=\operatorname{const}\cdot L^d\bigl(1+o(1)\bigr), \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} &\int_{[-L,L]^{\ell d}\setminus(4.4)} r_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B_1,\dots,B_k;n_1,\dots,n_k)\,dx_1\cdots dx_\ell \\ &\qquad=o\bigl(L^{\frac{\ell d}{2}}\bigr),\quad \ell>2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Поскольку ℓ-й кумулянт η_L есть линейная комбинация $V_i(L)$, $i = 1, 2, \dots, \ell$ (см. (4.8)), из оценок (4.18)–(4.21) следовало бы, что ℓ-й кумулянт η_L ведет себя как $\mathrm{const} \cdot L \cdot (1 + o(1))$ при $\ell = 2$ и растет медленнее, чем $L^{\frac{\ell d}{2}}$ при $\ell > 2$. Это в свою очередь означало бы, что тогда как второй кумулянт $\dfrac{\eta_L - \mathsf{E}\eta_L}{\sqrt{\mathsf{D}\eta_L}}$ тождественно равен 1, все остальные кумулянты $\dfrac{\eta_L - \mathsf{E}\eta_L}{\sqrt{\mathsf{D}\eta_L}}$ стремятся к нулю при $L \to +\infty$. Последнее утверждение эквивалентно утверждению, что моменты $\dfrac{\eta_L - \mathsf{E}\eta_L}{\sqrt{\mathsf{D}\eta_L}}$ сходятся к моментам нормального распределения, и, в частности,

$$\frac{\eta_L - \mathsf{E}\eta_L}{\sqrt{\mathsf{D}\eta_L}} \xrightarrow{\mathrm{w}} N(0,1).$$

Конечно же, при более детальном рассмотрении возникают трудности. По-видимому, не существует удобных выражений для формул (4.12) и (4.13) применительно к случаю, когда условие (4.4) не выполняется. Ниже мы покажем, как преодолеть это препятствие для $\eta_L(B; 0)$ (т.е. в случае $k = 1$, $n_1 = 0$). Определим центрированные ℓ-точечные корреляционные функции формулой

$$\rho_\ell^{(c)}(x_1, \dots, x_\ell) = \sum_G{}^{**} \prod_{j=1}^m r_{|G_j|}(\overline{x}(G_j)), \tag{4.22}$$

где $\sum^{**}$ берется по всем разбиениям $G = \{G_1, \dots, G_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, множества $\{1, \dots, \ell\}$ на двух- и более элементные подмножества (т.е. $|G_j| > 1$, $j = 1, \dots, m$). Из (4.7) и (4.22) следует, что

$$\begin{aligned}
\text{(4.23)}\ \rho_\ell^{(c)}(x_1, \dots, x_\ell) &= \rho_\ell(x_1, \dots, x_\ell) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{\ell} (-1)^p \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant \ell} \prod_{s=1}^p \rho_1(x_{i_s}) \cdot \rho_{\ell-p}\big((x_1, \dots, x_\ell) \setminus (x_{i_1}, \dots, x_{i_p})\big) \\
&= \rho_\ell(x_1, \dots, x_\ell) \\
&\quad - \sum_{p=1}^{\ell} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant \ell} \prod_{s=1}^p \rho_1(x_{i_s}) \rho_{\ell-p}^{(c)}\big((x_1, \dots, x_\ell) \setminus (x_{i_1}, \dots, x_{i_p})\big).
\end{aligned}$$

Обозначим через $M_{(\ell)}^{(c)}(L)$ интеграл от центрированной ℓ-точечной корреляционной функции модифицированного случайного точечного поля по $[-L, L]^{\ell d}$,

$$M_{(\ell)}^{(c)}(L) = \int_{[-L,L]^d} \cdots \int_{[-L,L]^d} \rho_\ell^{(c)}(x_1, \dots, x_\ell; B_1; 0)\, dx_1 \cdots dx_\ell. \tag{4.24}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
(4.25)\qquad \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^\ell}{\ell!}\mathsf{E}(\eta_L-\mathsf{E}\eta_L)^\ell
&= e^{-t\mathsf{E}\eta_L}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^\ell}{\ell!}\mathsf{E}\eta_L^\ell\\
&= e^{-t\mathsf{E}\eta_L}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!}\mathsf{E}\eta_L\cdot(\eta_L-1)\cdot\ldots\cdot(\eta_L-\ell+1)\\
&= e^{-t\mathsf{E}\eta_L}\cdot e^{(e^t-1)\mathsf{E}\eta_L}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!}M^{(c)}_{(\ell)}(L).
\end{aligned}$$

Если бы мы смогли показать, что

$$M_\ell^{(c)}(L)=\begin{cases}(2n-1)!!\ \mathrm{const}_1^n\cdot L^{nd}\cdot\bigl(1+o(1)\bigr) & \text{для } \ell=2n,\\ o\bigl(L^{\frac{\ell d}{2}}\bigr) & \text{для } \ell=2n+1,\end{cases}\tag{4.26}$$

и

$$\mathsf{E}\eta_L=\mathrm{const}_2\cdot L^d\cdot\bigl(1+o(1)\bigr),\tag{4.27}$$

то из (4.25) следовало бы, что

$$\mathsf{E}(\eta_L-\mathsf{E}\eta_L)^\ell=\begin{cases}(2n-1)!!\,(\mathrm{const}_1+\mathrm{const}_2)^nL^{nd}\cdot\bigl(1+o(1)\bigr)\\ \qquad\qquad \text{для } \ell=2n,\\ o\bigl(L^{\frac{\ell d}{2}}\bigr)\qquad \text{для } \ell=2n+1,\end{cases}\tag{4.28}$$

и

$$\frac{\eta_L-\mathsf{E}\eta_L}{L^{d/2}}\xrightarrow{\mathrm{w}}N(0,\mathrm{const}_1+\mathrm{const}_2).$$

В принципе, мы можем вычислить $M_\ell^{(c)}(L)$ из (4.12) и (4.13). В самом деле, если

$$x_i-x_j\notin B\tag{4.29}$$

(заметим, что условие (4.29) есть в точности условие (4.4) для случая $k=1, n_1=0$), то выражение для $\rho_\ell^{(c)}(x_1,\ldots,x_\ell;B;0)$ может быть получено из (4.22), (4.12) и (4.13). В противном случае $\rho_\ell(x_1,\ldots,x_\ell;B;0)=0$, и из (4.23) следует, что

$$\begin{aligned}
(4.30)\qquad \rho_\ell^{(c)}(x_1,\ldots,x_\ell;B;0)=\sum_{p=1}^{\ell}(-1)^p\cdot\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant\ell}\ \prod_{s=1}^{p}r_1(x_{i_s};B;0)\\
\times\rho_{\ell-p}\bigl((x_1,\ldots,x_\ell)\setminus(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})\bigr).
\end{aligned}$$

Если для $(\ell-p)$-элементного набора $(x_1,\ldots,x_\ell)\setminus(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})$ условие (4.29) не выполняется, то соответствующее выражение $\rho_{\ell-p}((x_1,\ldots,x_\ell)\setminus(x_{i_1},\ldots,x_{i_p}))$ в (4.30) равно нулю. Если же (4.29) выполняется для $(x_1,\ldots,x_\ell)\setminus(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})$, то мы снова итерируем (4.23),

$$\rho_{\ell-p}\bigl((x_1,\ldots,x_\ell)\setminus(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})\bigr)=\rho_{\ell-p}^{(c)}\bigl((x_1,\ldots,x_\ell)\setminus(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})\bigr)+\sum\cdots.$$

В результате мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 9. *Предположим, что условие* (4.29) *не выполнено для ℓ-элементного набора* $(x_1,\dots,x_\ell)$. *Тогда*

$$\rho_\ell^{(c)}(x_1,\dots,x_\ell;B;0)=\sum_{\varnothing\subseteq D\subset\{1,\dots,\ell\}}C_D\cdot\prod_{i\notin D}r_1(x_i;B;0)\cdot\rho^{(c)}_{|D|}(\bar x(D)),\tag{4.31}$$

где

$$C_D=\sum_{\substack{A\supseteq D\\ \text{(4.29) выполняется для }\bar x(A)}}(-1)^{|A|}.\tag{4.32}$$

В частности, $C_D=0$, *если условие* (4.29) *не выполняется для* $\bar x(D)$ *или если существует* $1\leqslant i\leqslant\ell$, $i\notin D$, *такое, что* $x_i-x_j\notin B\cup(-B)$ *для всех* $1\leqslant j\leqslant\ell$.

Доказательство непосредственно следует из приведенных выше аргументов.

Теорема 9. *Пусть* $(X,\mathscr{B},\mathsf{P})$ – *детерминантное случайное точечное поле с ядром*

$$|K(x,y)|\leqslant\psi(x-y),\tag{4.33}$$

где ψ – *ограниченная неотрицательная функция такая, что* $\psi\cdot\left(\log\left(\dfrac{\psi+1}{\psi}\right)\right)^n\in L^2(E)$ *для всех* $n>0$. *Пусть для* $\eta_L(B;0)=\#(x_i\in[-L,L]^d:\#(x_i+B)=0)$ *имеет место оценка*

$$\mathsf{D}\eta_L(B;0)=\sigma^2\cdot L^d\cdot\bigl(1+o(1)\bigr).\tag{4.34}$$

Тогда справедлива центральная предельная теорема:

$$\frac{\eta_L(B,0)-\mathsf{E}\eta_L(B;0)}{L^{d/2}}\xrightarrow{\text{w}}N(0,\sigma^2).$$

Замечание 15. Если $\operatorname{Cov}\bigl(\eta_L(B_i;0),\eta_L(B_j;0)\bigr)=b_{ij}\cdot L^d\cdot\bigl(1+o(1)\bigr)$, $1\leqslant i,j\leqslant p$, то

$$\left(\frac{\eta_L(B_i;0)-\mathsf{E}\eta_L(B_i;0)}{L^{d/2}}\right)_{1\leqslant i\leqslant p}\xrightarrow{\text{w}}N(0,(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}).\tag{4.35}$$

Напомним, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\bigl(\eta_L(B_i;0);\eta_L(B_j;0)\bigr)&=\mathsf{E}\bigl(\eta_L(B_i;0)-\mathsf{E}\eta_L(B_i,0)\bigr)\cdot\bigl(\eta_L(B_j;0)-\mathsf{E}\eta_L(B_j;0)\bigr)\\&=\int_{[-L,L]^{2d}\cap\{x_1-x_2\notin B_i\cup(-B_j)\}}\Biggl(\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!}\\&\qquad\times\int_{((x_1+B_i)\sqcup(x_2+B_j))^m}\rho_{2+m,2}(x_1,x_2;y_1,\dots,y_m)\,dy_1\cdots dy_m\Biggr)\,dx_1\,dx_2\\&\quad-\int_{[-L,L]^d}r_1(x_1;B_i;0)\cdot\int_{(x_1+B_i)\cup(x_1-B_j)}r_1(x_2;B_j;0)\,dx_2\,dx_1\\&\quad+\int_{[-L,L]^d}r_1(x;B_1\cup B_2,0)\,dx.\end{aligned}$$

Замечание 16. Лемма 8 предполагает более жесткое ограничение на ψ, а именно, $\psi^{1-\delta} \in L^2(E)$ для некоторого $0 < \delta < 1$. Однако, обращаясь к доказательству леммы 6, нетрудно заметить, что $\psi^{1-\delta}$ в (4.17) можно заменить на $\psi \cdot \left(\log\left(\frac{\psi+1}{\psi}\right)\right)^n$ с $n > 3\ell$.

Доказательство теоремы 9. Как следует из (4.25)–(4.28), достаточно показать, что

$$\begin{aligned}
(4.36)\quad & \int_{[-L,L]^{2nd}} \rho_{2n}^{(c)}(x_1,\dots,x_{2n};B;0)\,dx_1\cdots dx_{2n} \\
&= (2n-1)!!\biggl(\int_{[-L,L]^{2d}\cap\{x-y\notin B\cap(-B)\}} r_2(x,y;B;0)\,dx\,dy \\
&\quad - \int_{[-L,L]^d} r_1(x;B;0)\int_{(x+B)\cup(x-B)} r_1(y;B;0)\,dy\,dx\biggr)^n + o(L^{nd}), \\
&\quad n = 1,2,\dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.37)\quad & \int_{[-L,L]^{(2n+1)d}} \rho_{2n+1}^{(c)}(x_1,\dots,x_{2n+1};B;0)\,dx_1\cdots dx_{2n+1} = o\bigl(L^{\frac{2n+1}{2}d}\bigr), \\
&\quad n = 1,2,\dots .
\end{aligned}$$

Лемма 10.

$$\begin{aligned}
(4.39)\quad & \int_{[-L,L]^{2nd}\cap(4.29)} \rho_{2n}^{(c)}(x_1,\dots,x_{2n};B;0)\,dx_1\cdots dx_{2n} \\
&= (2n-1)!!\biggl(\int_{[-L,L]^{2d}\cap\{x-y\notin B\cup(-B)\}} r_2(x,y;B;0)\,dx\,dy\biggr)^n + o(L^{nd}),
\end{aligned}$$

$$(4.38)\quad \int_{[-L,L]^{(2n+1)d}\cap(4.29)} \rho_{2n+1}^{(c)}(x_1,\dots,x_{2n+1};B;0)\,dx_1\cdots dx_{2n+1} = o(L^{\frac{2n+1}{2}d}).$$

Напомним (см. (4.17)), что все функции $r_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B;0)$ являются ограниченными. Запишем (4.22) в виде

$$\rho_\ell^{(c)}(x_1,\dots,x_\ell) = \sum_G{}' \prod_{j=1}^m r_{|G_j|}(\bar{x}(G_j)) + \sum_G{}'' \prod_{j=1}^m r_{|G_j|}(\bar{x}(G_j)),$$

где $\sum'$ – сумма по всем разбиениям $\{1,\dots,\ell\}$ на пары и $\sum''$ – сумма по всем остальным (двух- и более элементным) разбиениям. Допустим, что ℓ – четно, $\ell = 2n$. Интегрируя $\sum'_G$ по $[-L,L]^{2nd}\cap(4.29)$, мы получим в точности правую часть (4.38) (существует ровно $(2n-1)!!$ разбиений $\{1,\dots,2n\}$ на двухэлементные множества). Вследствие (4.17) и приведенных после леммы 8 оценок

$$\int_{[-L,L]^{\ell d}} |r_\ell(x_1,\dots,x_\ell;B;0)|\,dx_1\cdots dx_\ell = O(L^d).$$

Следовательно, интеграл $\sum''_G$ по $[-L,L]^{2nd}\cap(4.29)$ есть $o(L^{nd})$. Формула (4.39) доказывается аналогичным образом.

Для того чтобы оценить

$$\int_{[-L,L]^{2nd}\setminus(4.29)} \rho_{2n}^{(c)}(x_1,\dots,x_{2n};B;0)\,dx_1\cdots dx_{2n}, \tag{4.40}$$

введем отношение эквивалентности на $\{x_1,\dots,x_{2n}\}$, называя x_i и x_j “соседями”, если существует последовательность индексов $1 \leqslant i_0, i_1, \dots, i_u \leqslant 2n$, $1 \leqslant u \leqslant 2n$, такая, что $i_0 = i$, $i_u = j$ и $x_{i_{s+1}} - x_{i_s} \in B \cup (-B)$, $s = 0,\dots,u-1$. Утверждается, что вклады порядка $O(L^{nd})$ в (4.40) соответствуют только тем множествам $(x_1,\dots,x_{2n})$, для которых каждый класс эквивалентности “соседей” содержит только одну или две переменные. В качестве примера рассмотрим случай k двухэлементных классов эквивалентности $\{x_1,x_2\},\dots,\{x_{2k-1},x_{2k}\}$ и $(2n-2k)$ одноэлементных классов эквивалентности $\{x_{2k+1}\},\dots,\{x_{2n}\}$. Аналогично вычислениям, приведенным на с. 596–597 в [40], мы проверяем, что интеграл от $\rho_{2n}^{(c)}(x_1,\dots,x_{2n};B;0)$ по подмножеству $[-L,L]^{2nd}$, соответствующему указанному выше разбиению, равен

$$\begin{aligned}(2n-2k-1)!!\biggl(-\int_{[-L,L]^d} r_1(x;B;0)\int_{(x+B)\cup(x-B)} r_1(y;B;0)\,dy\,dx\biggr)^k \\ \times\biggl(\int_{[-L,L]^{2n}\cap\{x-y\notin B\cap(-B)\}} r_2(x,y;B;0)\,dx\,dy\biggr)^{n-k} + o(L^{nd}).\end{aligned} \tag{4.41}$$

После суммирования по всем разбиениям на одно- и двухэлементные классы эквивалентности “соседей” (отметим, что (4.38) соответствует разбиению на одноэлементные классы), мы получаем в точности (4.36). Из леммы 7 и (4.17) следует, что все остальные разбиения на классы эквивалентности дают вклад меньшего порядка. Оценка (4.37) может быть доказана аналогичным образом.

Условия теоремы 9 носят малоограничительный характер в случае трансляционно инвариантных ядер. При этом функция ковариантности предельного гауссовского процесса w-lim $\dfrac{\eta_L((0,\bar{s}],0)-\mathsf{E}\eta_L((0,\bar{s}];0)}{L^{d/2}}$ задается d-мерными аналогами формул (37), (38) и (26) из [40] (конечно, следует заменить $\dfrac{\sin\pi(x-y)}{\pi(x-y)}$ на $K(x-y)$). Здесь и далее мы обозначаем через $(0,\bar{s}]$ параллелепипед $(0,s_1]\times\dots\times(0,s_d]$, $\bar{s}=(s_1,\dots,s_d)$. В частности, если $K(x)$ непрерывно дифференцируема, предельный гауссовский процесс непрерывен по Гёльдеру с любым показателем, меньшим, чем $\frac{1}{2}$. Из остальных характеристик модифицированного случайного точечного поля (применительно к $B = (0,\bar{s}]$, $n = 0$) особый интерес представляет спектральная мера ограничения группы $\{U^t\}$ на подпространство центрированных линейных статистик. Обозначим эту спектральную меру через $\mu^{(s)}(d\lambda)$. Напомним, что спектральная мера $\mu^{(0)}(d\lambda) = \mu(d\lambda)$ исходного детерминантного случайного точечного поля задана формулой (3.12). В частности, для синус-ядра

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \begin{cases} \dfrac{|\lambda|}{2\pi}, & |\lambda| \leqslant 2\pi, \\ 1, & |\lambda| > 2\pi. \end{cases}$$

Для синус-ядра, после долгих, но прямолинейных выкладок, получаем

$$(4.42)\qquad \frac{d\mu^{(s)}}{d\lambda}=\frac{\pi^2 s^3}{9}+\frac{|\lambda|}{2\pi}\cdot\left(1-\frac{4}{3}\pi^2 s^3\right)+O(s^4)+O(|\lambda|\cdot s^4)+O(|\lambda^2|\cdot s^2).$$

Заметим, что $\dfrac{d\mu^{(s)}}{d\lambda}(0)\neq 0$ при малых $s\neq 0$, что согласовано с оценкой

$$\mathsf{D}\eta_L((0,s];0)\sim L.$$

За доказательством функциональной центральной предельной теоремы мы отсылаем читателя к работе [40; с. 577]. Предположим, что

$$(4.43)\qquad L^{-d}\frac{\partial}{\partial s}\eta_L\bigl((0,\bar{s}];0\bigr),\quad L^{-d}\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Cov}(\eta_L\bigl((0,\bar{s}];0);\eta_L\bigl((0,\bar{t}];0)\bigr)$$

равномерно ограничены по L, $\bar{s}$ и $\bar{t}$, где $\bar{s}$ и $\bar{t}$ принадлежат компактным подмножествам $\mathbb{R}^d_+$ $(\mathbb{Z}^d_+)$. Сглаживая δ-функцию C^∞-аппроксимационной функцией, мы можем построить непрерывную аппроксимацию $\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)$ такую, что

$$|\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)-\eta_L((0,\bar{s}];0)|\leqslant 1.$$

В результате

$$\frac{\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)-\mathsf{E}\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)}{L^{d/2}}$$

есть случайная непрерывная функция от $\bar{s}$, и

$$(4.44)\qquad \left|\frac{\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)-\mathsf{E}\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)}{L^{d/2}}-\frac{\eta_L((0,\bar{s}];0)-\mathsf{E}\eta_L((0,\bar{s}];0)}{L^{d/2}}\right|\leqslant\frac{2}{L^{d/2}}\,.$$

Распределение случайного процесса $\dfrac{\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)-\mathsf{E}\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)}{L^{d/2}}$ задает вероятностную меру на $C([0,\infty)^d)$. Под сходимостью случайных процессов по распределению мы понимаем слабую сходимость индуцированных вероятностных мер на $C([0,\infty)^d)$ (см. [92]; в общем случае можно рассматривать различные пространства выборочных траекторий, например, пространства функций, имеющих разрывы первого рода).

Теорема 10. *Предположим, что выполнены условия* (4.33)–(4.35), (4.43). *Тогда случайный процесс*

$$\frac{\tilde{\eta}_L((0,\bar{s}];0)-\mathsf{E}\tilde{\eta}_L((0,\bar{S}];0)}{L^{1/2}}$$

сходится по распределению к гауссовскому процессу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lenard A. Correlation functions and the uniqueness of the state in classical statistical mechanics // Comm. Math. Phys. 1973. V. 30. P. 35–44.

[2] Lenard A. States of classical statistical mechanical system of infinitely many particles. I // Arch. Rational Mech. Anal. 1975. V. 59. P. 219–239.

[3] Lenard A. States of classical statistical mechanical system of infinitely many particles. II // Arch. Rational Mech. Anal. 1975. V. 59. P. 240–256.

[4] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

[5] Akhiezer N. I. The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis. New York: Hafner Publ. Co., 1965.

[6] Simon B. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator // Adv. Math. 1998. V. 137. №1. P. 82–203.

[7] Macchi O. The coincidence approach to stochastic point processes // Adv. Appl. Probab. 1975. V. 7. P. 83–122.

[8] Daley D. J., Vere-Jones D. An Introduction to the Theory of Point Processes. New York: Springer-Verlag, 1988.

[9] Simon B. Personal communications.

[10] Avron J. E., Seiler R., Simon B. Charge deficiency, charge transport and comparison of dimensions // Comm. Math. Phys. 1994. V. 159. P. 399–422.

[11] Gohberg I., Krein M. Introduction to the Theory of Linear Non-Self Adjoint Operators. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1969.

[12] Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. V. I–IV. New York: Academic Press, 1975–1980.

[13] Simon B. Trace Ideals and Their Applications. New York: Cambridge Univ. Press, 1979.

[14] Tracy C. A., Widom H. Correlation functions, cluster functions and spacing distribution for random matrices // J. Statist. Phys. 1998. V. 92. №5/6. P. 809–835.

[15] Mehta M. L. Random Matrices. Boston: Academic Press, 1991.

[16] Erdelyi A. (ed.). Higher Transcendental Functions. V. 1–2. New York: McGraw–Hill, 1953.

[17] Dyson F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems. I // J. Math. Phys. 1962. V. 3. P. 140–156.

[18] Dyson F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems. II // J. Math. Phys. 1962. V. 3. P. 157–165.

[19] Dyson F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems. III // J. Math. Phys. 1962. V. 3. P. 166–175.

[20] Lenard A. Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable boson // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 930–943.

[21] Lenard A. One-dimensional impenetrable bosons in thermal equilibrium // J. Math. Phys. 1966. V. 7. P. 1268–1272.

[22] Spohn H. Interacting Brownian particles: A study of Dyson's model // Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems / ed. G. Papanicolau. New York: Springer-Verlag, 1987.

[23] Ginibre J. Statistical ensembles of complex, quaternion and real matrices // J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 440–449.

[24] Jancovici B. Exact results for the two-dimensional one-component plasma // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46. P. 386–388.

[25] Jancovici B. Classical Coulomb systems near a plane wall. I // J. Statist. Phys. 1982. V. 28. P. 43–65.

[26] Alastuey A., Lebowitz J. L. The two-dimensional one-component plasma in an inhomogeneous background – exact results // J. Phys. (France). 1984. V. 45. P. 1859–1874.

[27] Di Francesco F., Gaudin M., Itzykson C., Lesage F. Laughlin wave-functions, Coulomb gases and expansions of the discriminant // Internat. J. Modern Phys. A. 1994. V. 9. P. 4257–4351.

[28] Forrester P. J., Jancovici B. Two-dimensional one-component plasma in quadrupolar field // Internat. J. Modern Phys. A. 1996. V. 11. P. 941–949.

[29] Gaudin M. Critical isoterm of a lattice plasma // J. Phys. (France). 1985. V. 46. P. 1027–1042.

[30] Cornu F., Jancovici B. On the two-dimensional Coulomb gas // J. Statist. Phys. 1987. V. 49. P. 33–56.

[31] Cornu F., Jancovici B. Two-dimensional Coulomb systems – A larger class of solvable models // Europhys. Lett. 1988. V. 5. P. 125–128.

[32] Cornu F., Jancovici B. Electrical double layer: A solvable model // J. Chem. Phys. 1989. V. 90. P. 2444–2452.

[33] Alastuey A., Forrester P. J. Correlations in two-component log-gas system // J. Statist. Phys. 1995. V. 81. №3/4. P. 579–627.

[34] Forrester P. J., Jancovici B. On the averge distance between particles in the 2-dimensional 2-component plasma // J. Statist. Phys. 1992. V. 69. P. 163–178.

[35] Deift P. Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach. New York, 1999. (Courant Lecture Notes in Mathematics. V. 3.)

[36] Weyl H. The Classical Groups: Their Invariants and Representations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1939.

[37] Johansson K. On random matrices from the compact classical groups // Ann. of Math. (2). 1997. V. 145. P. 519–545.

[38] Diaconis P., Shahshahani M. On the eigenvalues of random matrices // J. Appl. Probab. 1994. V. 31A. P. 49–62.

[39] Katz N., Sarnak P. Random Matrices, Frobenius Eigenvalues and Monodromy. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.

[40] Soshnikov A. Level spacings distribution for large random matrices: Gaussian fluctuations // Ann. of Math. (2). 1998. V. 148. P. 573–617.

[41] Soshnikov A. Gaussian fluctuations in Airy, Bessel, sine and other determinantal random point fields // J. Statist. Phys.. V. 100. №3/4 (to appear); `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9907012`.

[42] Soshnikov A. Central limit theorem for local linear statistics in classical compact groups and related combinatorial identities // Ann. Probab. (to appear); `http://xxx.lanl.gov/abs.math/9908063`.

[43] Гирко В. Л. Круговой закон // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29. №4. С. 669–697.

[44] Гирко В. Л. Эллиптический закон // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 30. №4. С. 640–651.

[45] Sommers H.-J., Crisanti A., Sompolinsky H., Stein Y. Spectrum of large random asymmetric matrices // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 1895–1898.

[46] Fyodorov Ya. V., Khoruzhenko B. A., Sommers H.-J. Almost Hermitian random matrices: Crossover from Wigner–Dyson to Ginibre eigenvalue statistics // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. №4. P. 557–560.

[47] Fyodorov Ya. V., Khoruzhenko B. A., Sommers H.-J. Universality in the random matrix spectra in the regime of weak non-Hermiticity // Ann. Inst. H. Poincaré. 1998. V. 68. №4. P. 449–489.

[48] Bronk B. V. Exponential ensemble for random matrices // J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 228–237.

[49] Eynard B., Mehta M. L. Matrices coupled in a chain. I. Eigenvalue correlations // J. Phys. A. 1998. V. 31. №19. P. 4449–4456.

[50] Adler M., van Moerbeke P. The spectrum of coupled random matrices // Ann. of Math. (2). 1999. V. 149. №3. P. 921–976.

[51] Tracy C. A., Widom H. Fredholm determinants, differential equations and matrix models // Comm. Math. Phys. 1994. V. 163. P. 33–72.

[52] Tracy C. A., Widom H. Level-spacing distributions and the Airy kernel // Comm. Math. Phys. 1994. V. 159. P. 151–174.

[53] Tracy C. A., Widom H. Level spacing distributions and the Bessel kernel // Comm. Math. Phys. 1994. V. 161. P. 289–309.

[54] Forrester P. J. The spectrum edge of random matrix ensembles // Nuclear Phys. B. 1993. V. B402. P. 709–728.

[55] Pastur L., Shcherbina M. Universality of the local eigenvalue statistics for a class of unitary invariant random matrix ensembles // J. Statist. Phys. 1997. V. 86. P. 109–147.

[56] Bleher P., Its A. Semiclassical asymptotics of orthogonal polynomials, Riemann–Hilbert problem and universality in the matrix model // Ann. of Math. (2). 1999. V. 150. №1. P. 185–266.

[57] Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., Zhou X. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. №11. P. 1335–1425.

[58] Johansson K. Universality of local eigenvalue correlations in certain Hermitian Wigner matrices // Preprint, 1998.

[59] Soshnikov A. Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices // Comm. Math. Phys. 1999. V. 207. №3. P. 697–733.

[60] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. V. II. New York: Wiley, 1966.

[61] Stanley R. P. Enumerative Combinatorics. V. 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

[62] Fulton W. Young Tableaux. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

[63] Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.

[64] Sagan B. The Symmetric Group. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publ. Comp., 1991.

[65] Olshanski G. Point processes and the infinite symmetric group. Part I: The general formalism and the density function; `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9804086`.

[66] Borodin A., Okounkov A., Olshanski G. On asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups; `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9905032`.

[67] Johansson K. Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure; `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9906120`.

[68] Borodin A., Olshanski G. Distributions on partitions, point processes and the hypergeometric kernel // Comm. Math. Phys (to appear); `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9904010`.

[69] Borodin A., Olshanski G. Z-measures on partitions, Robinson–Schensted–Knuth correspondence, and $\beta = 2$ random matrix ensembles; `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9905189`.

[70] Borodin A., Olshanski G. Point processes and the infinite symmetric group // Math. Res. Lett. 1998. V. 5. P. 799–816.

[71] Kerov S., Olshanski G., Vershik A. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1993. V. 316. №8. P. 773–778.

[72] Okounkov A. Infinite wedge and measures on partitions; `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9907127`.

[73] Johansson K. Shape fluctuations and random matrices // Comm. Math. Phys (to appear); `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9903134`.

[74] Chihara T. S. An Introduction to Orthogonal Polynomials. New York: Gordon and Breach, 1978.

[75] Aldous D., Diaconis P. Longest increasing subsequences: From patience sorting to the Baik–Deift–Johansson theorem // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1999. V. 36. №4. P. 413–432.

[76] Baik J., Deift P. A., Johansson K. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations // J. Amer. Math. Soc. 1999. V. 12. P. 1119–1178.

[77] Baik J., Deift P. A., Johansson K. On the distribution of the length of the second row of a Young diagram under Plancherel measure; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9901118.

[78] Baik J., Rains E. M. Algebraic aspects of increasing subsequences; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9905083.

[79] Baik J., Rains E. M. The asymptotics of monotone subsequences of involutions; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9905084.

[80] Baik J., Rains E. M. Symmetrized random permutations; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9910019.

[81] Borodin A. Longest increasing subsequences of random colored permutations; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9902001.

[82] Its A. R., Tracy C. A., Widom H. Random words, Toeplitz determinants and integrable systems. I; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9909169.

[83] Kuperberg G. Random words, quantum statistics, central limits, random matrices; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9909104.

[84] Okounkov A. Random matrices and random permutations; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9903176.

[85] Prähofer M., Spohn H. Statistical self-similarity of one-dimensional growth processes; http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9910273.

[86] Prähofer M., Spohn H. Universal distributions for growth processes in $1+1$ dimensions and random matrices; http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9912264.

[87] Tracy C. A., Widom H. Random unitary matrices, permutations and Painlevé // Comm. Math. Phys. 1999. V. 207. №3. P. 665–685.

[88] Tracy C. A., Widom H. On the distribution of the lengths of the longest monotone subsequences in random words; http://xxx.lanl.gov/abs/math/9904042.

[89] Cornfeld I. P., Fomin S. V., Sinai Ya. G. Ergodic Theory. New York: Springer-Verlag, 1982.

[90] Ibragimov I. A., Linnik Ju. V. Independent and Stationary Random Variables. Groningen: Wolters-Noordhoff Publ., 1971.

[91] Costin O., Lebowitz J. Gaussian fluctuations in random matrices // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. №1. P. 69–72.

[92] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

Caltech
Department of Mathematics;
University of California, Davis
E-mail: sashas@gibbs1.caltech.edu, soshniko@math.ucdavis.edu

Поступила в редакцию
11.04.2000