文章编号: 0583-1431(2008)01-0001-10 **文献标识码: A**

一对拟双正交框架小波

张之华

Department of Mathematics, University of California, Davis, California 95616, USA
E-mail: zzh@ucdavis.edu

摘 要 对于一对对偶框架多尺度分析, 借助于滤波器, 我们构造一对对偶框架小波和一对拟双正交框架小波, 并且指出一对对偶框架小波和一对拟双正交框架小波的滤波器所满足的充分必要条件.

关键词 矩阵扩充; 框架多尺度分析; 框架小波; 滤波器
MR(2000) 主题分类 42C15
中图分类 O174.21

A Pair of Quasi-Biorthogonal Frame Wavelets

Zhi Hua ZHANG

Department of Mathematics, University of California, Davis, California 95616*, USA*
E-mail: zzh@ucdavis.edu

Abstract For a pair of dual frame multiresolution analyses, we construct a pair of dual frame wavelets and a pair of quasi-biorthogonal frame wavelets with the help of filter banks. Furthermore, we show necessary and sufficient conditions satisfied by filter bands of a pair of dual frame wavelets and a pair of quasi-biorthogonal frame wavelets.

Keywords matrix extension; frame multiresolution analysis; frame wavelet; filter band
MR(2000) Subject Classification 42C15
Chinese Library Classification O174.21

0 引言

多尺度分析是构造各种小波的重要工具. 熟知, 借助于矩阵扩充, 一个多尺度分析能够导出一个正交小波 [1]; 一对双正交多尺度分析能够导出一对双正交小波 [1−2]; 一个框架多尺度分析能导出框架小波 [3−5]. 在一维情况下, 在 2003 年, 在文 [6] 中, 基于一对带着某些条件的对偶框架多尺度分析, 作者使用平移不变子空间的理论构造了一对拟双正交框架小波. 但这种方法难以推广到高维情况.

在高维情况下, 在本文中, 基于一对对偶框架多尺度分析, 我们将寻找新的方法来构造一对拟双正交框架小波. 这个方法是已知的构造双正交小波的矩阵扩充的推广. 同时, 将给出一对对偶框架小波和一对拟双正交框架小波的滤波器所满足的充要条件.

收稿日期: 2006-04-30; 接受日期: 2007-07-06
基金项目:

1 预备知识

为了方便起见, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ 简记为 $\{x_n\}$ 和 $\sum_n x_n$. 记矩阵 M 的共轭转置为 M^*. 在 $\mathbb{R}^d$ 上, l 阶单位矩阵记为 I_l. 在 $\mathbb{R}^d$ 中, 以 $2\pi\mathbb{Z}^d$ 为周期的有界函数的集合记为 $L^\infty(T^d)$. 下面让我们回忆在小波分析中的某些已知的概念和某些已知的结果.

1.1 贝塞尔序列, 框架和对偶框架

让 $\mathbb{H}$ 是一个可分的希尔伯特 (Hilbert) 空间且 $\{x_n\}\subset\mathbb{H}$. 假如对于 $x\in\mathbb{H}$, 存在常数 $B>0$ 使得 $\sum_n |(x,\, x_n)|^2 \le B\|x\|^2$, 则称 $\{x_n\}$ 为空间 $\mathbb{H}$ 的贝塞尔序列. 假如对于 $x\in\mathbb{H}$, 存在常数 $A, B>0$, 使得 $A\|x\|^2 \le \sum_n |(x, x_n)|^2 \le B\|x\|^2$, 则称 $\{x_n\}$ 为空间 $\mathbb{H}$ 的框架 [7−8].

假设 $\{x_n\}$ 和 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是空间 $\mathbb{H}$ 的两个框架, 如果对于 $x\in\mathbb{H}$, 重构公式

$$x=\sum_n (x,\, \widetilde{x}_n)x_n \quad 和 \quad x=\sum_n (x,\, x_n)\widetilde{x}_n$$

成立, 则称 $\{x_n,\, \widetilde{x}_n\}$ 为空间 $\mathbb{H}$ 的对偶框架 [7].

命题 1[9] 让 $\{x_n\}$ 和 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是空间 $\mathbb{H}$ 的贝塞尔序列. 如果对任何 $x, \widetilde{x}\in\mathbb{H}$, 有

$$(x,\widetilde{x})=\sum_n (x, x_n)\overline{(\widetilde{x},\, \widetilde{x}_n)},$$

则 $\{x_n,\, \widetilde{x}_n\}$ 是空间 $\mathbb{H}$ 的对偶框架.

1.2 对偶框架多尺度分析和对偶框架小波

设伸缩矩阵 S 是 $d\times d$ 可逆矩阵, 且满足下列条件:

(i) 所有矩阵 S 的元素都是整数;

(ii) 矩阵 S 的行列式的值大于 1. 设 G 和 G' 分别是商群 Z^d/SZ^d 和 Z^d/S^*Z^d. 熟知, G 和 G' 的阶都是 $\rho=|\mathrm{det}S|$.

设 $\{V_m\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的子空间序列, 且使得

(i) $V_m\subset V_{m+1}$ $(m\in\mathbb{Z})$, $\overline{\bigcup_m V_m}=L^2(\mathbb{R}^d)$, $\bigcap_m V_m=\{0\}$,

(ii) $f\in V_m \leftrightarrow f(S\cdot)\in V_{m+1}$ $(m\in\mathbb{Z})$,

(iii) 存在函数 $\varphi\in V_0$, 使得 $\{\varphi(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ 是 V_0 的框架,

则称 $\{V_m\}$ 为一个框架多尺度分析 [3], 且称 φ 为尺度函数. 假如在 (iii) 中, 将 “框架” 换成 “黎斯 (Riesz) 基”, 则称 $\{V_m\}$ 为多尺度分析 [1].

假设存在函数 $H_0\in L^\infty(T^d)$, 使得 $\widehat{\varphi}(S^*\cdot)=H_0\widehat{\varphi}$. 称 H_0 为加细滤波器.

定义 1 设 $\{V_m,\varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m,\widetilde{\varphi}\}$ 是两个框架多尺度分析. 如果

$$f=\sum_n (f,\, \widetilde{\varphi}(\cdot-n))\,\varphi(\cdot-n), \quad \forall\, f\in V_0, \tag{1.1}$$

$$f=\sum_n (f,\, \varphi(\cdot-n))\,\widetilde{\varphi}(\cdot-n), \quad \forall\, f\in \widetilde{V}_0, \tag{1.2}$$

则称 $\{V_m,\varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m,\, \widetilde{\varphi}\}$ 为对偶框架多尺度分析.

这个定义是下面概念的推广. 让 $\{V_m,\varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m,\, \widetilde{\varphi}\}$ 是两个多尺度分析. 如果 $(\varphi(\cdot-n),\, \widetilde{\varphi}(\cdot-k))=\delta_{n,k}$, 则称 $\{V_m,\varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m,\widetilde{\varphi}\}$ 为双正交多尺度分析, 其中

$$\delta_{n,k}=0 \ \ (n\neq k), \quad \delta_{n,k}=1 \ \ (n{=}k).$$

让 $\{f_\mu\}_1^r \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 且标记 $\{f_{\mu,m,n}\} := \{f_{\mu,m,n}\}_{\mu=1,\dots,r,\, m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{Z}^d}$, 其中

$$f_{\mu,m,n} = \rho^{\frac{m}{2}} f_\mu(S^m \cdot - n).$$

定义 2 设 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r \subset L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$. 假如 $\{\psi_{\mu,m,n}, \widetilde{\psi}_{\mu,m,n}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的对偶框架, 则称 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 为基数是 r 的对偶框架小波. 再假如 $(\psi_{\mu,m,n}, \widetilde{\psi}_{\mu',m',n'}) = 0$ $(\mu', m') \neq (\mu, m)$, 则称 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 为基数是 r 的拟双正交框架小波.

这个定义是下面概念的推广. 让 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r \subset L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$. 假如 $\{\psi_{\mu,m,n}\}$ 和 $\{\widetilde{\psi}_{\mu,m,n}\}$ 都是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的黎斯基, 且 $(\psi_{\mu,m,n}, \widetilde{\psi}_{\mu',m',n'}) = \delta_{\mu,\mu'}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'}$, 则称 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 为基数是 $r = \rho - 1$ 的双正交小波.

定义 3 设 $\{V_m, \varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m, \widetilde{\varphi}\}$ 是对偶框架多尺度分析, 且 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r \subset V_1 \times \widetilde{V}_1$. 假如分解公式

$$f = \sum_n (f, \widetilde{\varphi}(\cdot - n))\, \varphi(\cdot - n) + \sum_{\mu=1}^r \sum_n (f, \widetilde{\psi}_\mu(\cdot - n))\, \psi_\mu(\cdot - n), \quad \forall f \in V_1; \tag{1.3}$$

$$f = \sum_n (f, \varphi(\cdot - n))\, \widetilde{\varphi}(\cdot - n) + \sum_{\mu=1}^r \sum_n (f, \psi_\mu(\cdot - n))\, \widetilde{\psi}_\mu(\cdot - n), \quad \forall f \in \widetilde{V}_1 \tag{1.4}$$

都成立, 则说 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 是由该对偶框架多尺度分析导出.

1.3 平移算子、方括号积和周期点集 Ω

为方便起见, 标记矩阵 $\eta = 2\pi S^{*-1}$. 定义平移算子 τ_ν $(\nu \in G')$ 如下

$$\tau_\nu g = g(\cdot + \eta\nu), \quad \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.5}$$

设 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. 定义方括号积为 $[\widehat{f}, \widehat{g}] = \sum_k \widehat{f}(\cdot + 2k\pi)\overline{\widehat{g}}(\cdot + 2k\pi)$. 这儿及后, 傅里叶 (Fourier) 变换 $\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot t} \mathrm{d}t$.

命题 2[1] 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $V = \overline{\operatorname{span}}\{f(\cdot - n)\}_n$ 且 $U = \overline{\operatorname{span}}\{g(\cdot - n)\}_n$, 则

(i) $\{f(\cdot - n)\}_n$ 是 V 的框架当且仅当存在常数 $A, B > 0$, 使得当 $[\widehat{f}, \widehat{f}](\omega) \neq 0$, 有

$$A \le [\widehat{f}, \widehat{f}](\omega) \le B.$$

(ii) $V \perp U$ 当且仅当 $[\widehat{f}, \widehat{g}](\omega) = 0$ a.e. $\omega \in \mathbb{R}^d$.

设 $\{V_m, \varphi\}$ 是一个框架多尺度分析. 点集 $\Omega := \operatorname{supp}[\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}] = \{\omega \in \mathbb{R}^d, [\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}](\omega) \neq 0\}$ 是一个周期点集, 也即 $\Omega + 2n\pi = \Omega$ $(n \in \mathbb{Z}^d)$. 因此, 周期点集 Ω 上的特征函数 $\mathscr{X}_\Omega$ 是周期为 $2\pi\mathbb{Z}^d$ 的周期函数. 在本文中, 点集 Ω 在矩阵扩充中起着重要的作用.

1.4 矩阵扩充

设伸缩矩阵 S, ρ 阶商群 G' 和平移算子 τ_ν 如 (1.5) 式所述.

(1) 构造正交小波的矩阵扩充方法

设 $\{V_m, \varphi\}$ 是一个多尺度分析, H_0 是加细滤波器, 且 $\{H_\mu\}_{\mu\in G'\setminus\{0\}} \subset L^\infty(T^d)$. 记 ρ 阶的方阵

$$A := (\tau_\nu(H_\mu))_{\mu,\nu\in G'}$$

定义 $\{\psi_\mu\}_{\mu\in G'\setminus\{0\}}$ 为 $\widehat{\psi}_\mu(S^*\cdot) = H_\mu\widehat{\varphi}$. 如果 $A^*A = I_\rho$, 则 $\{\psi_\mu\}_{\mu\in G'\setminus\{0\}}$ 是一正交小波 [1].

(2) 构造双正交小波的矩阵扩充方法

设 $\{V_m, \varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m, \widetilde{\varphi}\}$ 是双正交多尺度分析, H_0 和 $\widetilde{H}_0$ 分别是相应的加细滤波器, 且 $\{H_\mu, \widetilde{H}_\mu\}_{\mu\in G'\setminus\{0\}} \subset L^\infty(T^d)\times L^\infty(T^d)$. 记两个 ρ 阶方阵

$$A := (\tau_\nu(H_\mu))_{\mu,\nu\in G'}, \quad \widetilde{A} := (\tau_\nu(\widetilde{H}_\mu))_{\mu,\nu\in G'}.$$

定义 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_{\mu\in G'\setminus\{0\}}$ 为 $\widehat{\psi}_\mu(S^*\cdot) = H_\mu\widehat{\varphi}$, $\widehat{\widetilde{\psi}}_\mu(S^*\cdot) = \widetilde{H}_\mu\widehat{\varphi}$. 假如 $\{\psi_{\mu,m,n}\}$ 和 $\{\widetilde{\psi}_{\mu,m,n}\}$ 都是贝塞尔序列, 如果 $\widetilde{A}^*A = I_\rho$, 则 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_{\mu\in G'\setminus\{0\}}$ 是双正交小波 [1−2].

2 主要结果

设 S 是阶 $\rho = |\det S|$ 的伸缩矩阵, 且平移算子 τ_ν 如 (1.5) 式所述. 设 $\{V_m, \varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m, \widetilde{\varphi}\}$ 是对偶框架多尺度分析, H_0 和 $\widetilde{H}_0$ 分别是相应的加细滤波器, 且 $\{H_\mu, \widetilde{H}_\mu\}_1^r \subset L^\infty(T^d)\times L^\infty(T^d)$. 记

$$\Omega := \mathrm{supp}[\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}]. \tag{2.1}$$

标记两个 $(r+1)\times\rho$ 阶的矩阵

$$A_{\Omega,r} := (\tau_\nu(H_\mu\mathscr{X}_\Omega))_{\mu,\nu}, \quad \widetilde{A}_{\Omega,r} := (\tau_\nu(\widetilde{H}_\mu\mathscr{X}_\Omega))_{\mu,\nu} \quad (\mu=0,\ldots,r;\ \nu\in G'), \tag{2.2}$$

其中 $\mathscr{X}_\Omega$ 是 Ω 上的特证函数. 定义 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 如下

$$\widehat{\psi}_\mu(S^*\cdot) = H_\mu\widehat{\varphi}, \quad \widehat{\widetilde{\psi}}_\mu(S^*\cdot) = \widetilde{H}_\mu\widehat{\widetilde{\varphi}} \quad (\mu=1,\ldots,r). \tag{2.3}$$

定理 1 设 $\{V_m, \varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m, \widetilde{\varphi}\}$ 是对偶框架多尺度分析. 设 $\{\psi_{\mu,m,n}\}$ 和 $\{\widetilde{\psi}_{\mu,m,n}\}$ 都是贝塞尔序列, 则 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 是由该对偶框架多尺度分析导出的对偶框架小波的充要条件是

$$(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*A_{\Omega,r} = \mathrm{diag}(\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega))_{\nu\in G'}.$$

定理 2 设 $\{V_m, \varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m, \widetilde{\varphi}\}$ 是对偶框架多尺度分析. 假设 $\{\psi_{\mu,m,n}\}$ 和 $\{\widetilde{\psi}_{\mu,m,n}\}$ 都是贝塞尔序列, 则 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 是由该对偶框架多尺度分析所导出的拟双正交框架小波的充要条件是下面的 (a) 和 (b) 成立.

$$\text{(a) } (\widetilde{A}_{\Omega,r})^*A_{\Omega,r} = \mathrm{diag}(\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega))_{\nu\in G'}, \quad \text{(b) } A_{\Omega,r}(\widetilde{A}_{\Omega,r})^* \ \text{是对角矩阵}. \tag{2.4}$$

注 1 在 $[\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}] = \Omega = \mathbb{R}^d$ 和 $r = \rho - 1$ 的情况下, 对偶框架多尺度分析归结为双正交多尺度分析, 且 (2.4) 式中的 (a) 和 (b) 等价于 $(\widetilde{A})^*A = I_\rho$, 其中 $A = A_{\mathbb{R}^d,\,\rho-1}$, $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\mathbb{R}^d,\,\rho-1}$. 因此, 定理 2 的充分性部分是构造双正交小波的矩阵扩充方法的推广.

3 对偶框架小波的构造

假设 $\{V_m, \varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m, \widetilde{\varphi}\}$ 是对偶框架多尺度分析, 且 H_0, $\widetilde{H}_0$ 分别是相应的加细滤波器. 设

$$\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r \subset L^2(\mathbb{R}^d)\times L^2(\mathbb{R}^d) \quad 且 \quad \{H_\mu, \widetilde{H}_\mu\}_1^r \subset L^\infty(T^d)\times L^\infty(T^d)$$

满足 (2.3) 式, 且点集 Ω 和矩阵 $A_{\Omega,r}$, $\widetilde{A}_{\Omega,r}$ 如 (2.1) 式和 (2.2) 式所述.

首先, 我们指出 $(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*A_{\Omega,r} = \mathrm{diag}(\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega))_{\nu\in G'}$ 的等价条件.

定理 2 下面各条是等价的.

(i) 对于 $f\in V_1$, (1.3) 式成立;

(ii) 对于 $f\in \widetilde{V}_1$, (1.4) 式成立;

(iii) 对于 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 下面公式成立

$$\sum_n(f,\,\widetilde{\varphi}_{1,n})\varphi_{1,n}=\sum_n(f,\,\widetilde{\varphi}(\cdot-n))\varphi(\cdot-n)+\sum_{\mu=1}^{r}\sum_n(f,\,\widetilde{\psi}_\mu(\cdot-n))\psi_\mu(\cdot-n);\qquad(3.1)$$

(iv) 对于 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 另一个分解公式成立

$$\sum_n(f,\,\varphi_{1,n})\widetilde{\varphi}_{1,n}=\sum_n(f,\,\varphi(\cdot-n))\widetilde{\varphi}(\cdot-n)+\sum_{\mu=1}^{r}\sum_n(f,\,\psi_\mu(\cdot-n))\widetilde{\psi}_\mu(\cdot-n);\qquad(3.2)$$

(v) $(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*A_{\Omega,r}=\mathrm{diag}\,(\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega))_{\nu\in G'}$.

证明 首先, 我们证明 (i) $\Rightarrow$ (v). 假如 (i) 成立, 则对于 $f\in V_1$, 有

$$f=\sum_n(f,\,\widetilde{\varphi}(\cdot-n))\varphi(\cdot-n)+\sum_{\mu=1}^{r}\sum_n(f,\,\widetilde{\psi}_\mu(\cdot-n))\psi_\mu(\cdot-n).$$

因为 $\{V_m,\varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m,\,\widetilde{\varphi}\}$ 是对偶框架多尺度分析, 由定义 1, 我们有 $f=\sum_n(f,\widetilde{\varphi}_{1n})\varphi_{1n}$ $(f\in V_1)$. 于是, 对于 $f\in V_1$, 我们得到 (3.1) 式. 在 (3.1) 式中, 取傅里叶变换, 则有

$$\rho^{-\frac{1}{2}}C_1^f\widehat{\varphi}=\sum_{\mu=0}^{r}D_\mu^f(S^*\cdot)\widehat{\psi}_\mu(S^*\cdot)\ (\psi_0=\varphi,\,\widetilde{\psi}_0=\widetilde{\varphi}),\quad\forall f\in V_1,\qquad(3.3)$$

其中

$$\rho=|\mathrm{det}S|,\quad C_1^f(\omega):=\sum_n(f,\,\widetilde{\varphi}_{1,n})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\cdot\omega},\quad D_\mu^f(\omega):=\sum_n\Big(f,\,\widetilde{\psi}_\mu(\cdot-n)\Big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\cdot\omega}.\qquad(3.4)$$

现在, 我们证明：对于任何 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 下面公式成立

$$\rho^{\frac{1}{2}}D_\mu^f(S^*\cdot)=\sum_{\nu\in G'}\tau_\nu(C_1^f\overline{\widetilde{H}}_\mu).\qquad(3.5)$$

首先, 我们计算 (3.5) 式右边各项. 设

$$\widetilde{H}_\mu(\omega)=\sum_n\widetilde{c}_\mu(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\cdot\omega}\quad(0\le\mu\le r).\qquad(3.6)$$

再由 (3.4) 式和 (1.5) 式, 得到

$$R_\nu^\mu(\omega):=\tau_\nu(C_1^f\overline{\widetilde{H}}_\mu)(\omega)=\sum_{m,n}(f,\,\widetilde{\varphi}_{1,n})\,\overline{\widetilde{c}}_\mu(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\cdot(\omega+\eta\nu)}\quad(\eta=2\pi S^{*-1}).$$

令 $n-m=Sk+\nu'$ $(k\in\mathbb{Z}^d,\,\nu'\in G)$, 则有

$$R_\nu^\mu(\omega)=\sum_{\nu'\in G}\sum_{n,k}(f,\,\widetilde{\varphi}_{1,n})\overline{\widetilde{c}}_\mu(n-Sk-\nu')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(Sk+\nu')\cdot(\omega+\eta\nu)}.$$

因为 $Sk\cdot\eta\nu=k\cdot S^*\eta\nu=2\pi k\cdot\nu$ 和 $\sum_{\nu\in G^*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu'\cdot(\eta\nu)}=\rho\delta_{\nu',0}$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\in G'}R_\nu^\mu(\omega)&=\sum_{\nu'\in G}\sum_{n,k}(f,\,\widetilde{\varphi}_{1,n})\overline{\widetilde{c}}_\mu(n-Sk-\nu')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(Sk+\nu')\cdot\omega}\Bigg(\sum_{\nu\in G'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu'\cdot\eta\nu}\Bigg)\\&=\rho\sum_{n,k}(f,\,\widetilde{\varphi}_{1,n})\overline{\widetilde{c}}_\mu(n-Sk)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Sk\cdot\omega}\\&=\rho\sum_k\Bigg(f,\,\sum_n\widetilde{c}_\mu(n-Sk)\widetilde{\varphi}_{1,n}\Bigg)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot S^*\omega}.\end{aligned}$$

但是, 由 (2.3) 式和 (3.6) 式, 得到

$$\widetilde{\psi}_\mu = \rho \sum_n \widetilde{c}_\mu(n) \widetilde{\varphi}(S \cdot - n).$$

于是 $\widetilde{\psi}_\mu(\cdot - k) = \rho^{\frac{1}{2}} \sum_n \widetilde{c}_\mu(n - Sk) \widetilde{\varphi}_{1,n}$. 再由 (3.4) 式, 有

$$\sum_{\nu \in G'} R_\nu^\mu(\omega) = \rho^{\frac{1}{2}} \sum_k (f, \widetilde{\psi}_\mu(\cdot - k)) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k \cdot S^* \omega} = \rho^{\frac{1}{2}} D_\mu^f(S^* \omega),$$

也即 (3.5) 式成立.

从 (3.5) 式, (2.3) 式和 (3.3) 式, 有

$$C_1^f \widehat{\varphi} = \sum_{\nu \in G'} \left(\sum_{\mu=0}^r H_\mu \tau_\nu (\overline{\widetilde{H}}_\mu)) \right) \tau_\nu (C_1^f) \widehat{\varphi}, \quad \forall f \in V_1. \tag{3.7}$$

其中 $C_1^f(\omega) = \sum_n (f, \widetilde{\varphi}_{1,n}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n \cdot \omega}$ (参看 (3.4) 式). 取 $f = \varphi_{1,l}$ $(l \in G)$, 得到

$$\begin{aligned}(f, \widetilde{\varphi}_{1,n}) &= (\varphi(\cdot - l), \widetilde{\varphi}(\cdot - n)) \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{R^d} \widehat{\varphi}(\omega) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-l) \cdot \omega} \mathrm{d}\omega = (2\pi)^{-d} \int_{T^d} [\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-l) \cdot \omega} \mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{3.8}$$

因为 $\{V_m, \varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m, \widetilde{\varphi}\}$ 是对偶框架多尺度分析, 故 (1.1) 式成立. 模仿 (3.8) 式的论证方法, 由 (1.1) 式和 (3.8) 式, 我们有

$$\varphi(x) = \sum_n (\varphi, \widetilde{\varphi}(\cdot - n)) \varphi(x - n) = \sum_n \left((2\pi)^{-d} \int_{T^d} [\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}](t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n \cdot t} \mathrm{d}t \right) \varphi(x - n). \tag{3.9}$$

应用柯西 (Cauchy) 不等式, 由方括号积的定义, 得到 $([\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega))^2 \leq [\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}](\omega) \cdot [\widehat{\widetilde{\varphi}}, \widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega)$. 再因为 $\{\varphi(\cdot - n)\}_n$ 和 $\{\widetilde{\varphi}(\cdot - n)\}_n$ 分别是 V_0 和 $\widetilde{V}_0$ 的框架, 根据命题 2, 我们知道 $[\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}](\omega)$ 和 $[\widehat{\widetilde{\varphi}}, \widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega)$ 是有界的, 进而有 $[\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}] \in L^\infty(T^d)$. 因此, 由 (3.9) 式, 有

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \sum_n \left((2\pi)^{-d} \int_{T^d} [\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}](t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n \cdot t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n \cdot \omega} \widehat{\varphi}(\omega) = [\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega) \widehat{\varphi}(\omega).$$

进而有 $[\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}] = [\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}] \cdot [\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}]$. 从 $\mathrm{supp}[\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}] = \Omega$, 我们有

$$[\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}] = \mathscr{X}_\Omega. \tag{3.10}$$

从此及 (3.8) 式, 我们得到 $(f, \widetilde{\varphi}_{1,n}) = (2\pi)^{-d} \int_{T^d} (\mathscr{X}_\Omega(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l \cdot \omega}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n \cdot \omega} \mathrm{d}\omega$. 从 (3.4) 式, 有

$$C_1^f(\omega) = \sum_n (f, \widetilde{\varphi}_{1n}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n \cdot \omega} = \mathscr{X}_\Omega(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l \cdot \omega} \quad (f = \varphi_{1,l}).$$

再由 $\varphi_{1,l} \in V_1$, 在 (3.7) 式中, 取 $f = \varphi_{1,l}$, 我们有

$$\mathscr{X}_\Omega \widehat{\varphi} = \sum_{\nu \in G'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l \cdot \eta \nu} \xi_\nu \tau_\nu (\mathscr{X}_\Omega) \widehat{\varphi} \quad (l \in G), \ \text{其中} \ \xi_\nu = \sum_{\mu=0}^r H_\mu \tau_\nu (\overline{\widetilde{H}}_\mu). \tag{3.11}$$

考虑关于未知量 $\{Y_\nu\}_{\nu \in G'}$ 的线性方程组:

$$\sum_{\nu \in G'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l \cdot \eta \nu} Y_\nu = \mathscr{X}_\Omega \widehat{\varphi} \quad (l \in G), \tag{3.12}$$

因为 G 和 G' 都是 ρ 阶的, 且系数矩阵 $(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\cdot\eta\nu})_{l\in G,\,\nu\in G'}$ 是非奇异的, 故线性方程组有唯一解, 且 $Y_\nu=\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)\,\widehat{\varphi}\,\delta_{\nu,0}$, $\nu\in G'$. 从此, 比较 (3.11) 式和 (3.12) 式, 对于 $\nu\in G'$, 有

$$\xi_\nu(\omega)\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)=\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)\delta_{\nu,0},\quad \text{a.e. } \omega\in\mathbb{R}^d. \tag{3.13}$$

因为 ξ_ν 和 $\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)$ 都是以 $2\pi\mathbb{Z}^d$ 为周期的, 且 $\sum_k|\widehat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}](\omega)=\mathscr{X}_\Omega(\omega)$ (见 (3.10)). 在 (3.13) 式中, 用 $\overline{\widehat{\varphi}}(\omega)$ 乘其两边, 且将 $\omega+2k\pi$ 代替 ω, 然后对 $k\in\mathbb{Z}^d$ 加起来, 我们得到

$$\xi_\nu\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)\mathscr{X}_\Omega=\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)\mathscr{X}_\Omega\delta_{\nu,0}\quad(\nu\in G'). \tag{3.14}$$

因为 $\xi_\nu=\sum_{\mu=0}^r H_\mu\tau_\nu(\overline{\widetilde{H}}_\mu)$ 和 $\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)\mathscr{X}_\Omega\delta_{\nu,0}=\tau_0(\mathscr{X}_\Omega)\delta_{\nu,0}$, 从 (3.14) 式, 可得

$$\sum_{\mu=0}^r\tau_\nu(\overline{\widetilde{H}}_\mu\mathscr{X}_\Omega)\cdot\tau_0(H_\mu\mathscr{X}_\Omega)=\tau_0(\mathscr{X}_\Omega)\delta_{\nu,0}\quad(\nu\in G').$$

然而, 这等价于对于 $\nu_1,\nu_2\in G'$, 有

$$\sum_{\mu=0}^r\tau_{\nu_1}(\overline{\widetilde{H}}_\mu\mathscr{X}_\Omega)\tau_{\nu_2}(H_\mu\mathscr{X}_\Omega)=\tau_{\nu_2}(\mathscr{X}_\Omega)\delta_{\nu_1,\nu_2}.$$

由 (2.2) 式, 我们得到 (v).

其次, 我们证明: (v) $\Rightarrow$ (iii).

从 (v) 知, (3.14) 式成立. 进而, 从 $\operatorname{supp}[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]=\Omega$, 可得

$$\sum_{\mu=0}^r H_\mu\tau_\nu(\overline{\widetilde{H}}_\mu)\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]=\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]\delta_{\nu,0}\quad(\nu\in G'). \tag{3.15}$$

令 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 且 $C_1^f(\omega)$ 如 (3.4) 式所述. 用 $\tau_\nu(C_1^f)$ 乘 (3.15) 式两边, 得到

$$\begin{aligned}\tau_\nu(C_1^f)\left(\sum_{\mu=0}^r H_\mu\tau_\nu(\overline{\widetilde{H}}_\mu\mathscr{X}_\Omega)\right)[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]&=\tau_\nu(C_1^f)\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega)[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]\delta_{\nu,0}\\&=C_1^f\mathscr{X}_\Omega[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]\delta_{\nu,0}=C_1^f[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]\delta_{\nu,0}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

再对 $\nu\in G'$ 加起来, 则有

$$\sum_{\mu=0}^r\zeta_\mu H_\mu[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]=C_1^f[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}],\ \ \forall f\in L^2(\mathbb{R}^d),\quad \text{其中}\quad \zeta_\mu:=\sum_{\nu\in G'}\tau_\nu(C_1^f\overline{\widetilde{H}}_\mu\mathscr{X}_\Omega). \tag{3.17}$$

用 $\widehat{\varphi}$ 代替 $[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]$ 后, 则上式仍然成立, 也即

$$\sum_{\mu=0}^r\zeta_\mu H_\mu\widehat{\varphi}=C_1^f\widehat{\varphi}. \tag{3.18}$$

事实上, 对于 $\omega\in\Omega$, 有 $[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}](\omega)\neq0$. 于是, 从 (3.17) 式, 可得 (3.18) 式. 对于 $\omega\notin\Omega$, 有 $[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}](\omega)=0$. 进而有 $\widehat{\varphi}(\omega)=0$, 于是, (3.18) 式也成立.

类似于 (3.10) 式的论证, 有 $[\widehat{\widetilde{\varphi}},\widehat{\varphi}]=\mathscr{X}_{\widetilde{\Omega}}$, where $\widetilde{\Omega}=\operatorname{supp}[\widehat{\widetilde{\varphi}},\widehat{\widetilde{\varphi}}]$. 从此及 (3.10) 式, 可得 $\Omega=\widetilde{\Omega}$, 即

$$\operatorname{supp}[\widehat{\widetilde{\varphi}},\widehat{\widetilde{\varphi}}]=\operatorname{supp}[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]=\Omega.$$

于是, 对于 $\omega\notin\Omega$, 有 $[\widehat{\widetilde{\varphi}},\widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega)=0$, 进而有 $\widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega)=0$. 再由 (2.3) 式, 得到

$$\widehat{\widetilde{\psi}}_\mu(S^*\cdot)=\widetilde{H}_\mu\mathscr{X}_\Omega\,\widehat{\widetilde{\varphi}},\quad \mu=0,\ldots,r. \tag{3.19}$$

从 (3.19) 式, 类似于 (3.5) 式的证明, 可得

$$\rho^{\frac{1}{2}} D_\mu^f(S^*\cdot) = \sum_{\nu\in G'} \tau_\nu(C_1^f \overline{\widetilde{H}}_\mu \mathscr{X}_\Omega), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

于是, $\zeta_\mu = \rho^{\frac{1}{2}} D_\mu^f(S^*\cdot)$. 再由 (3.18) 式和 (2.3) 式, 有

$$\rho^{-\frac{1}{2}} C_1^f \widehat{\varphi} = \sum_{\mu=0}^{r} D_\mu^f(S^*\cdot)\widehat{\psi}_\mu(S^*\cdot), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

将 (3.4) 式中的最后两式代入上式, 再取傅里叶逆变换, 便得到 (iii).

显然, 有 (iii) $\Rightarrow$ (i), 于是有 (i)$\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (v).

使用类似地证明, 由 $\mathrm{supp}[\widehat{\widetilde{\varphi}}, \widehat{\varphi}] = \Omega$, 可证得 (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v). 定理 3 证毕.

现在, 从定理 3 出发来证明定理 1. 由此便得到构造对偶框架小波的矩阵扩充方法.

定理 1 的证明 如果

$$(\widetilde{A}_{\Omega,r})^* A_{\Omega,r} = \mathrm{diag}(\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega))_{\nu\in G'} \tag{3.20}$$

成立, 从定理 3 推得, 对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, (3.1) 式成立. 因为框架多尺度分析是自相似的, 从 (3.1) 式, 对于任何 $j \in \mathbb{Z}$, 有

$$\sum_n (f, \widetilde{\varphi}_{j,n})\varphi_{j,n} = \sum_n (f, \widetilde{\varphi}_{j-1,n})\varphi_{j-1,n} + \sum_{\mu=1}^{r}\sum_n (f, \widetilde{\psi}_{\mu,j-1,n})\psi_{\mu,j-1,n}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

反复使用这个公式, 对于 $M < j$, 有

$$\sum_n (f, \widetilde{\varphi}_{j,n})\varphi_{j,n} = f_M + \sum_{m=M}^{j-1}\sum_{\mu=1}^{r}\sum_n (f, \widetilde{\psi}_{\mu,m,n})\psi_{\mu,m,n}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{3.21}$$

其中

$$f_M = \sum_n (f, \widetilde{\varphi}_{M,n})\varphi_{M,n}. \tag{3.22}$$

使用文 [9] 中定理 5 的论证方法, 我们有

$$f_M \to 0 \quad (M \to -\infty) \quad 和 \quad \sum_n (f, \widetilde{\varphi}_{j,n})\varphi_{j,n} \to f \quad (j \to \infty). \tag{3.23}$$

从此及 (3.21) 式能推得, 对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 有重构公式

$$f = \sum_{\mu,m,n} (f, \widetilde{\psi}_{\mu,m,n})\psi_{\mu,m,n}.$$

从此, 我们得到对于 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 有

$$(f, g) = \sum_{\mu,m,n} (f, \widetilde{\psi}_{\mu,m,n})\overline{(g, \psi_{\mu,m,n})}.$$

再因为 $\{\psi_{\mu,m,n}\}$ 和 $\{\widetilde{\psi}_{\mu,m,n}\}$ 都是贝塞尔序列, 由命题 1, 我们推得 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 是对偶框架小波. 另一方面, 由定理 3 和 (3.20) 式知, (1.3) 式和 (1.4) 式成立. 再由定义 3, 我们知道 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 是由该对偶框架多尺度分析导出.

相反地, 已知 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 是由该对偶框架多尺度分析导出, 则由定义 3 知, (1.3) 式和 (1.4) 式成立. 进而由定理 3, 我们得到 (3.20) 式. 定理 1 证毕.

4 拟双正交框架小波的构造

设 $\{V_m, \varphi\}$ 和 $\{\widetilde{V}_m, \widetilde{\varphi}\}$ 是对偶框架多尺度分析, 且 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 和 $A_{\Omega,r}$, $\widetilde{A}_{\Omega,r}$ 如第 3 节所述. 首先, 我们指出 $A_{\Omega,r}(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*$ 是对角矩阵的一个等价条件.

令 $1 \le \mu \le r,\ m \in \mathbb{Z}$. 记

$$W_m^\mu = \overline{\operatorname{span}}\{\psi_{\mu,m,n}\, n \in \mathbb{Z}^d\}, \quad \widetilde{W}_m^\mu = \overline{\operatorname{span}}\{\widetilde{\psi}_{\mu,m,n}\, n \in \mathbb{Z}^d\}. \tag{4.1}$$

定义 3 对于 $1 \le \mu, \mu' \le r,\ m, m' \in \mathbb{Z}$, 下面的空间关系

$$W_m^\mu \perp \widetilde{W}_{m'}^{\mu'}\ (m,\mu) \ne (m',\mu'), \quad V_m \perp \widetilde{W}_m^{\mu'}, \quad \widetilde{V}_m \perp W_m^\mu \tag{4.2}$$

成立当且仅当 $A_{\Omega,r}(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*$ 是对角矩阵.

证明 设 $\psi_0 = \varphi$ 和 $\widetilde{\psi}_0 = \widetilde{\varphi}$. 由 (2.3) 式和 (1.5) 式, 有

$$[\widehat{\psi}_\mu, \overline{\widehat{\widetilde{\psi}}}_{\mu'}](S^*\cdot) = \sum_k \widehat{\psi}_\mu(S^*\cdot + 2k\pi)\overline{\widehat{\widetilde{\psi}}}_{\mu'}(S^*\cdot + 2k\pi) = \sum_k \tau_k(H_\mu \overline{\widetilde{H}}_{\mu'})\tau_k(\widehat{\varphi}\,\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}}).$$

令 $k = S^* l + \nu$ $(l \in \mathbb{Z}^d,\ \nu \in G')$, 由 (3.10) 式, 有

$$[\widehat{\psi}_\mu, \widehat{\widetilde{\psi}}_{\mu'}](S^*\cdot) = \sum_{\nu \in G'} \tau_\nu(H_\mu \overline{\widetilde{H}}_{\mu'})\tau_\nu([\widehat{\varphi}, \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}}]) = \sum_{\nu \in G'} \tau_\nu(H_\mu \overline{\widetilde{H}}_{\mu'}\mathscr{X}_\Omega) \quad (0 \le \mu,\ \mu' \le r). \tag{4.3}$$

从此, 我们知道 $[\widehat{\psi}_\mu, \widehat{\widetilde{\psi}}_{\mu'}](S^*\cdot)$ 是矩阵 $A_{\Omega,r}(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*$ 的第 μ 行 μ' 列的元素. 于是, $A_{\Omega,r}(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*$ 是对角矩阵当且仅当对于 $0 \le \mu,\ \mu' \le r$, 有

$$[\widehat{\psi}_\mu, \widehat{\widetilde{\psi}}_{\mu'}] = 0 \ \ (\mu \ne \mu'). \tag{4.4}$$

进而由 (4.1) 式和命题 2 知, (4.4) 式又等价于对于 $1 \le \mu,\ \mu' \le r\, m \in \mathbb{Z}$, 有

$$W_m^\mu \perp \widetilde{W}_m^{\mu'}\ (\mu \ne \mu'), \quad V_m \perp \widetilde{W}_m^{\mu'}, \quad \widetilde{V}_m \perp W_m^\mu. \tag{4.5}$$

现在假设 (4.5) 式成立. 因为 $\{\psi_\mu\}_1^r \subset V_1$, 由 (4.1) 式, 有 $W_k^\mu \subset V_{k+1} \subset V_m$ $(k < m)$. 再从 $V_m \perp \widetilde{W}_m^{\mu'}$, 可得

$$W_k^\mu \perp \widetilde{W}_m^{\mu'} \ \ (k < m).$$

因为 $\widetilde{W}_m^{\mu'} \subset \widetilde{V}_k$ $(k > m)$ 和 $\widetilde{V}_k \perp W_k^\mu$, 这个公式当 $k > m$ 时也成立. 因此, 从 (4.5) 式可得 (4.2) 式. 相反地, 如果 (4.2) 式成立, 则 (4.5) 式显然成立, 也即 (4.5) 式等价于 (4.2) 式. 定理 4 证毕.

下面证明定理 2. 由此, 我们便得到构造拟双正交框架小波的矩阵扩充方法.

定理 2 的证明 首先证明充分性. 因为 $(\widetilde{A}_{\Omega,r})^* A_{\Omega,r} = \operatorname{diag}(\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega))_{\nu \in G'}$, 由定理 1, 我们知道 $\{\psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu\}_1^r$ 是由对偶框架多尺度分析导出的对偶框架小波. 又因为 $A_{\Omega,r}(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*$ 是对角矩阵, 由定理 4 和 (4.1) 式, 有

$$(\psi_{\mu,m,n}, \widetilde{\psi}_{\mu',m',n'}) = 0 \quad (\mu,\, m) \ne (\mu',\, m').$$

再由定义 2, 充分性证毕.

其次证明必要性. 记 $\Pi_{\Omega,r} := A_{\Omega,r}(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*$, $\Pi_{\Omega,r} := (\pi_{\mu,\mu'})_{\mu,\mu'}$ $(0 \le \mu,\ \mu' \le r)$. 从定义 2, 有

$$(\psi_{\mu,m,n}, \widetilde{\psi}_{\mu',m',n'}) = 0 \quad ((\mu,\, m) \ne (\mu',\, m'),\ 1 \le \mu,\ \mu' \le r). \tag{4.6}$$

在 (4.6) 式中, 取 $m = m' = 0$, 则有 $(\psi_\mu(\cdot - n), \widetilde{\psi}_{\mu'}(\cdot - m)) = 0$ $(\mu \neq \mu')$. 由命题 2 得到

$$[\widehat{\psi}_\mu, \widehat{\widetilde{\psi}}_{\mu'}] = 0 \ (1 \leq \mu,\, \mu' \leq r,\, \mu \neq \mu').$$

由此及 (4.3) 式, 有

$$\pi_{\mu,\mu'} = 0 \quad (1 \leq \mu,\, \mu' \leq r,\ \mu \neq \mu'). \tag{4.7}$$

我们再证 $\pi_{0,\,\mu'} = 0$ $(1 \leq \mu' \leq r)$, $\pi_{\mu,0} = 0$ $(1 \leq \mu \leq r)$.

从定义 1 和定义 3 知道 (1.1) 式和 (1.3) 式成立. 定理 3 指出：(1.3) 式等价于 (3.1) 式. 定理 1 的指出：从 (3.1) 式可得 (3.21) 式. 在 (3.21) 式中, 取 $j = 0$ 和 $M < 0$, 则有

$$\sum_n (f, \widetilde{\varphi}(\cdot - n))\varphi(\cdot - n) = f_M + \sum_{m=M}^{-1} \sum_{\mu=1}^{r} \sum_n (f, \widetilde{\psi}_{\mu,m,n})\psi_{\mu,m,n}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

其中 f_M 如 (3.22) 式所述. 在上式中, 取 $f \in V_0$, 由 (1.1) 式和 (3.23) 式, 有

$$f = \sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{\mu=1}^{r} \sum_n (f,\, \widetilde{\psi}_{\mu,m,n})\psi_{\mu,m,n}.$$

再由 (4.6) 式, 对于 $f \in V_0$, 有

$$(f,\, \widetilde{\psi}_{\mu',0,n}) = 0 \quad (1 \leq \mu' \leq r,\, n \in \mathbb{Z}^d).$$

也即 $V_0 \perp \widetilde{W}_0^{\mu'}$ $(1 \leq \mu' \leq r)$. 于是, $[\widehat{\varphi},\, \widehat{\widetilde{\psi}}_{\mu'}] = 0$, 进而有 $\pi_{0,\mu'} = 0$ $(1 \leq \mu' \leq r)$. 类似地, 有 $\pi_{\mu,0} = 0$ $(1 \leq \mu \leq r)$.

从此及 (4.7) 式, 我们得到 $\Pi_{\Omega,r} = A_{\Omega,r}(\widetilde{A}_{\Omega,r})^*$ 是对角矩阵. 另一方面, 从定义 3 知, (1.3) 式成立. 再由定理 3, 我们得到

$$(\widetilde{A}_{\Omega,r})^* A_{\Omega,r} = \mathrm{diag}(\tau_\nu(\mathscr{X}_\Omega))_{\nu \in G^*}.$$

必要性证毕. 于是得到定理 2.

参 考 文 献

[1] Long R., Higher-dimensional wavelet analysis, ??: Springer-Verlag, 1995.

[2] Wang X., The study of wavelets from the properties of their Fourier transforms, Ph.D. thesis, Washington University in St. Louis, 1995.

[3] Benedetto J. J., Li S., The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks, *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, 1998, **5**: 389–427.

[4] Benedetto J. J., Treiber O. M., Wavelet frame: multiresolution analysis and extension principle, in: L. Debnath(Ed) Wavelet Transforms and Time-Frequency Signal Analysis, Birhauser, Boston, 2000.

[5] Mu L., Zhang Z., Zhang P., On the higher-dimension wavelet frames, *Appl. Comp. Hormonic Anal.*, 2004, **16**: 44–59.

[6] Kim H. O., Kim R. Y., Lim J. K., Quasi-biorthogonal frame multiresolution analyses and wavelets, *Adv. Comp. Math.*, 2002, **18**: 269–296.

[7] Christensen O., Frime, Riesz bases, and discrete Gabor/wavelet expansions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2001, **27**: 273–291.

[8] Duffin R. J., Schaeffer A. C., A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1952, **72**: 341–366.

[9] Li S., A theory of generalized multiresolution structure and pseudoframes of translates, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2001, **7**: 23–40.