OTTO-VON-GUERICKE-UNIVERSITÄT MAGDEBURG
Institut für Mathematische Optimierung
Sommersemester 2000
Prof. Dr. Robert Weismantel
Matthias Köppe

11. (letzte) Übung zur Vorlesung
KOMBINATORISCHE OPTIMIERUNG

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ko-2000`
E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`
Abgabe: Donnerstag, 29. Juni, vor der Übung

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$. Formulieren Sie das Problem, in D

(a) eine maximale Anzahl bogendisjunkter,

(b) eine maximale Anzahl knotendisjunkter

gerichteter Wege zwischen einem Knotenpaar $s, t \in V$ zu finden, als Maximalfluß-Problem.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit Bogenlängen $c(a) \geq 0$ für alle $a \in A$. Seien $s, t \in V$ mit $s \neq t$. Eine Funktion $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ heißt *Potential* bzgl. D und c, falls $\Phi(v) - \Phi(u) \leq c(u, v)$ für alle $(u, v) \in A$ gilt.

Beweisen Sie: Die maximale Potentialdifferenz $\max\{\, \Phi(t) - \Phi(s) : \Phi \text{ ist Potential} \,\}$ ist gleich der Länge eines kürzesten (s, t)-Weges.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Betrachten Sie die LP-Relaxierung des 0/1-Knapsack-Problems

$$\begin{array}{rcl} \max c^\top x & & \\ a^\top x & \leq & b \\ 0 & \leq & x \leq 1. \end{array} \tag{KLP}$$

Es seien $c, a > 0$ und $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{a_n}$. Das *kritische Element* s ist definiert als

$$s := \min\left\{ i : \sum_{j=1}^{i} a_j > b \right\}.$$

(a) Zeigen Sie: Eine Optimallösung x^* von (KLP) ist gegeben durch

$$x_i^* = \begin{cases} 1, & i < s \\ \dfrac{1}{a_s}\left(b - \displaystyle\sum_{j=1}^{s-1} a_j\right), & i = s \\ 0, & i > s. \end{cases}$$

(b) Konstruieren sie eine Ungleichung, die für das zu (KLP) gehörige 0/1-Knapsack-Problem aus Teil (a) gültig ist, aber von der Optimallösung x^* des (KLP) verletzt wird, falls x^* nicht ganzzahlig ist.

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Eine gerichtete geschlossene Kette in einem Digraphen heißt (gerichtete) *Postbotentour*, wenn sie jeden Bogen mindestens einmal enthält.

Zeigen Sie, daß eine Postbotentour minimaler Länge in einem stark zusammenhängenden Digraphen $D = (V, A)$ (mit Bogenlänge $c(a) \geq 0$ für alle $a \in A$) mit Hilfe eines Algorithmus zur Bestimmung eines kostenminimalen Flusses bestimmt werden kann.

Hinweis: Ein Fluß x_a über einen Bogen a gebe an, daß dieser Bogen $(x_a + 1)$-mal in der Postbotentour enthalten ist.