Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Sommersemester 2000
Prof. Dr. Robert Weismantel
Matthias Köppe

7. Übung zur Vorlesung

Kombinatorische Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ko-2000`
E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`
Abgabe: vor der nächsten Übung

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, daß $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid ist, wobei

(1) $\mathcal{I} := \{\, F \subseteq E : F$ ist ein Wald$\}$ bzw.

(2) $\mathcal{I} := \{\, F \subseteq E : E \setminus F$ enthält einen aufspannenden Baum für jede Komponente von $G\}$.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei G ein zusammenhängender Graph und $\mathcal{B}$ die Menge seiner aufspannenden Bäume.

(a) Zeigen Sie, daß der Greedy-Maximierungs-Algorithmus der Vorlesung das folgende Bottleneck-Problem für $c > 0$ optimal löst:
$$\max_{B \in \mathcal{B}} \min_{i \in B} c(i).$$

(b) Zeigen Sie, daß der Greedy-Minimierungs-Algorithmus der Vorlesung das folgende Bottleneck-Problem für beliebige Kantengewichte c optimal löst:
$$\min_{B \in \mathcal{B}} \max_{i \in B} c(i).$$

(c) Was geschieht in (a) bei beliebigen Kantengewichten?

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Zeigen Sie, daß für ein Unabhängigkeitssystem $M = (E, \mathcal{I})$ folgende Axiome äquivalent sind:

(a) Für alle $I, J \in \mathcal{I}$ mit $|I| = |J| - 1$ existiert ein $j \in J \setminus I$ mit $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$.

(b) Für alle $F \subseteq E$ und Basen B_1, $B_2 \subseteq F$ gilt $|B_1| = |B_2|$.

(c) Sei $\mathcal{B}$ das Basissystem von M. Wenn $B_1, B_2 \in B$ mit $x \in B_1 \setminus B_2$, dann gibt es ein $y \in B_2 \setminus B_1$ mit $B_1 \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph.

(a) Schreiben Sie die Menge aller aufspannenden Arboreszenzen als Durchschnitt der Basissysteme zweier Matroide.

(b) Schreiben Sie die Menge der hamiltonschen Wege als Durchschnitt der Basissysteme dreier Matroide.