Topología de contacto: cáusticas y reflexiones

Roger Casals

MIT-UCL

Fundación BBVA - RSME

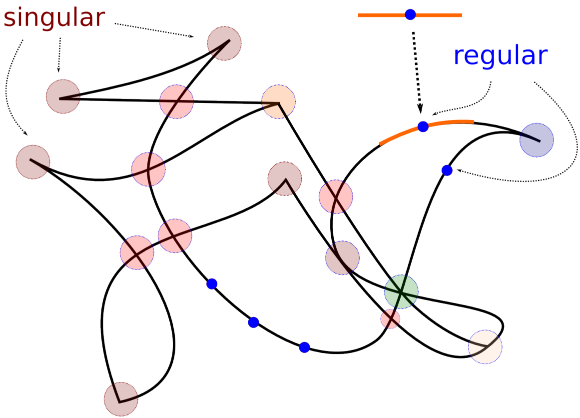
21 de Septiembre, Madrid 2017

1 Singularidades

Singularidades

¿ Qué es una singularidad ?

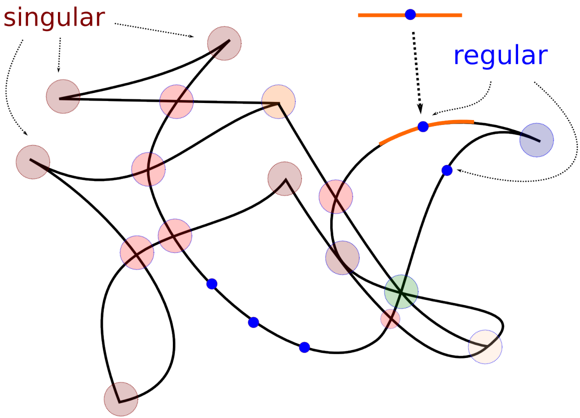
Dibujemos una curva en el plano: tiene puntos **regulares** y **singulares**.



Singularidades

¿ Qué es una singularidad ?

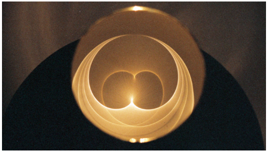
Dibujemos una curva en el plano: tiene puntos **regulares** y **singulares**.

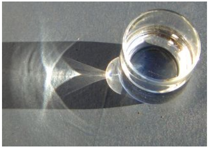


Nos centraremos en objetos geométricos con **singularidades**.

Ejemplos de curvas singulares

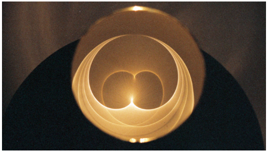
Para apreciar la ubicuidad de las curvas singulares sólo hace falta mirar:

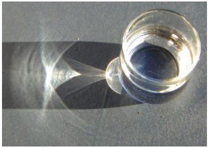




Ejemplos de curvas singulares

Para apreciar la ubicuidad de las curvas singulares sólo hace falta mirar:

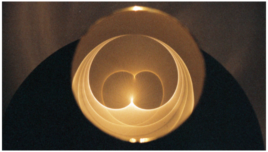


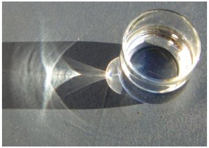


Las **cáusticas** tienen singularidades debido al Principio de Fermat (1662):

Ejemplos de curvas singulares

Para apreciar la ubicuidad de las curvas singulares sólo hace falta mirar:

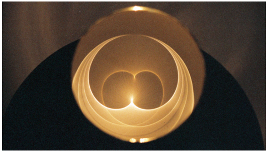
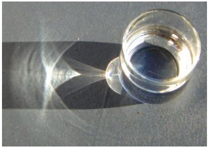




Las **cáusticas** tienen singularidades debido al Principio de Fermat (1662): "El camino de un rayo de luz **minimiza el tiempo** de trayectoria".

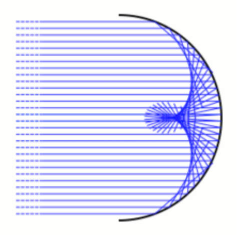
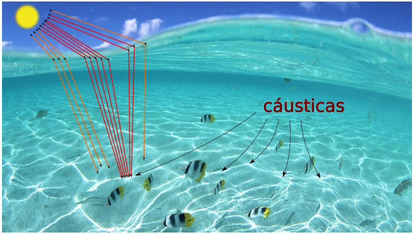
Ejemplos de curvas singulares

Para apreciar la ubicuidad de las curvas singulares sólo hace falta mirar:

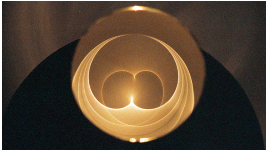

Las **cáusticas** tienen singularidades debido al Principio de Fermat (1662):

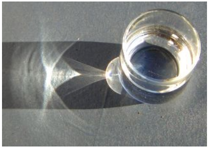
"El camino de un rayo de luz **minimiza el tiempo** de trayectoria".

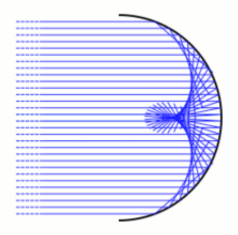
Ejemplos de curvas singulares

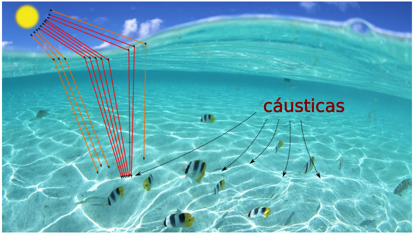
Para apreciar la ubicuidad de las curvas singulares sólo hace falta mirar:





Las **cáusticas** tienen singularidades debido al Principio de Fermat (1662): "El camino de un rayo de luz **minimiza el tiempo** de trayectoria".





Éstas singularidades son **especiales**: sólo vemos cúspides y cruces.

Idea

Para entender qué singularidades aparecen, debemos estudiar los principios que rigen éstas singularidades, i.e. entender de dónde vienen.

Idea

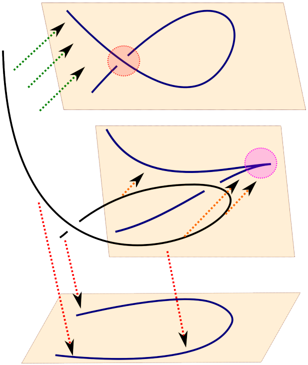
Para entender qué singularidades aparecen, debemos estudiar los principios que rigen éstas singularidades, i.e. entender de dónde vienen.

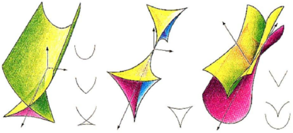
Idea Fantástica: singularidades aparecen al **proyectar** objetos lisos.

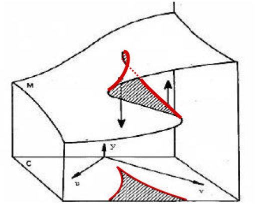
Idea

Para entender qué singularidades aparecen, debemos estudiar los principios que rigen éstas singularidades, i.e. entender de dónde vienen.

Idea Fantástica: singularidades aparecen al **proyectar** objetos lisos.







Estructuras de contacto

Centrémonos en curvas singulares en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo con cúspides.
¿ Podemos elegir una curva **lisa** en $\mathbb{R}^3$ que proyecte a ella ?

Estructuras de contacto

Centrémonos en curvas singulares en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo con cúspides.
¿ Podemos elegir una curva **lisa** en $\mathbb{R}^3$ que proyecte a ella ?

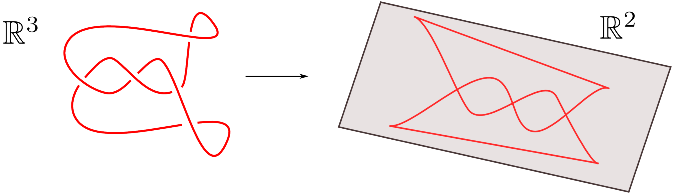


Figure : Nudo de trébol liso proyectando a una curva singular.

Estructuras de contacto

Centrémonos en curvas singulares en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo con cúspides.
¿ Podemos elegir una curva **lisa** en $\mathbb{R}^3$ que proyecte a ella ?

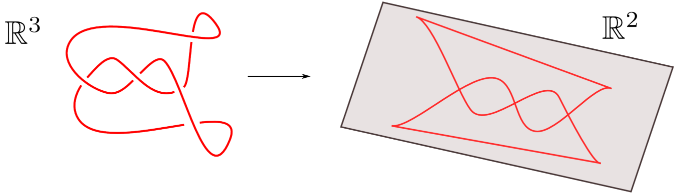
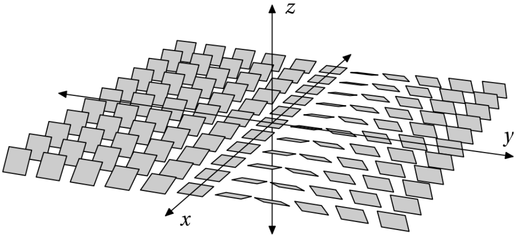


Figure : Nudo de trébol liso proyectando a una curva singular.

Con qué criterio se elige la curva ? Pedimos **tangente a un plano**.

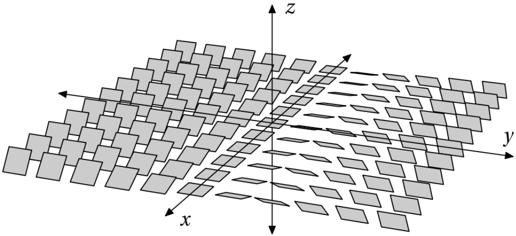
Las Tres Definiciones

El campo de 2-planos que elegimos en cada punto de $\mathbb{R}^3$ es el siguiente:



Las Tres Definiciones

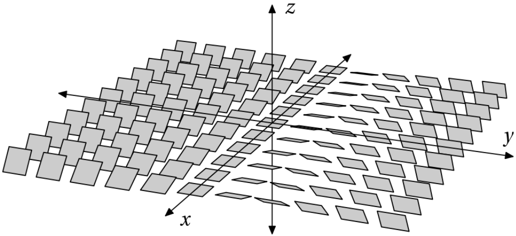
El campo de 2-planos que elegimos en cada punto de $\mathbb{R}^3$ es el siguiente:



Estructura de contacto ξ: es ésta elección de 2-planos localmente.
Tener una estructura de contacto nos permite **proyectar** y **elevar** !

Las Tres Definiciones

El campo de 2-planos que elegimos en cada punto de $\mathbb{R}^3$ es el siguiente:

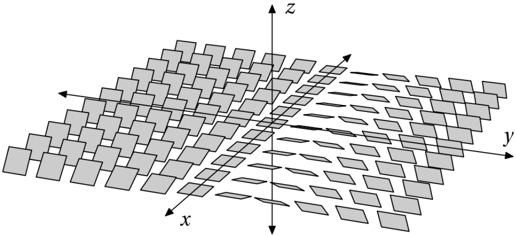


Estructura de contacto ξ: es ésta elección de 2-planos localmente.
Tener una estructura de contacto nos permite **proyectar** y **elevar** !

Legendrianas: Las curvas lisas en $\mathbb{R}^3$ siempre tangentes a ξ.

Las Tres Definiciones

El campo de 2-planos que elegimos en cada punto de $\mathbb{R}^3$ es el siguiente:



Estructura de contacto ξ: es ésta elección de 2-planos localmente. Tener una estructura de contacto nos permite **proyectar** y **elevar** !

Legendrianas: Las curvas lisas en $\mathbb{R}^3$ siempre tangentes a ξ.

Frente de onda: La proyección singular de una Legendriana al plano-xz.

Con la estructura de contacto, hemos intercambiado:

$$\textbf{Frentes} \text{ en } \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \textbf{Legendrianas} \text{ en } (\mathbb{R}^3, \xi),$$

Luego el estudio de qué singularidades vemos se traduce a la pregunta:

¿ Cómo puede proyectar una Legendriana de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$?

Con la estructura de contacto, hemos intercambiado:

$$\textbf{Frentes} \text{ en } \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \textbf{Legendrianas} \text{ en } (\mathbb{R}^3, \xi),$$

Luego el estudio de qué singularidades vemos se traduce a la pregunta:

¿ Cómo puede proyectar una Legendriana de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$?

Theorem (V. Arnol'd 1973)

Las singularidades genéricas de una proyección Legendriana en dimensión ≤ 5 son estables, simples, y están clasificadas por los grupos ADE de reflexiones Euclídeas. En particular hay un número finito.

Con la estructura de contacto, hemos intercambiado:

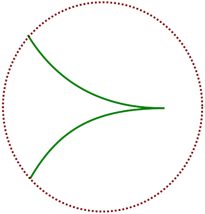
$$\textbf{Frentes} \text{ en } \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \textbf{Legendrianas} \text{ en } (\mathbb{R}^3, \xi),$$

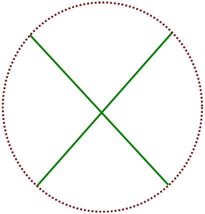
Luego el estudio de qué singularidades vemos se traduce a la pregunta:

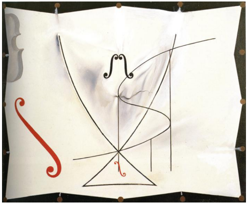
¿ Cómo puede proyectar una Legendriana de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$?

Theorem (V. Arnol'd 1973)

Las singularidades genéricas de una proyección Legendriana en dimensión ≤ 5 son estables, simples, y están clasificadas por los grupos ADE de reflexiones Euclídeas. En particular hay un número finito.







The end

Thanks a lot!

"BUT THIS IS THE SIMPLIFIED VERSION FOR THE GENERAL PUBLIC."