TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
FACHBEREICH 3 - MATHEMATIK
Dr. Ulrich Brehm

1000 Berlin 12, den 7. 11. 91
Straße des 17. Juni 135
Fernruf: (030) 314- 25779

Lieber Herr Prof. Böhm,

in Dortmund hatten wir über die Frage diskutiert, ob eine Triangulierung eines d-Polytops mit minimaler Zahl von d-Simplexen eine zusätzliche "innere" Ecke benötigen kann. Ich versprach Ihnen, sofort zu schreiben, falls mir dazu etwas einfiele.

Ohne viel darüber nachzudenken, fielen mir Gegenbeispiele ein, die ich Ihnen mitteilen möchte, obwohl ich die Beweisdetails dazu noch nicht ausgearbeitet habe.

Herzliche Grüße auch an Ihre Familie

Ulrich Brehm

Bezeichnungen:

Sei P ein d-Polytop. Eine Triangulierung von P ist ein geometrischer simplizialer Komplex $\mathcal{K}$ (im Sinne der algebraischen Topologie, also insbes. "face to face"), so daß $|\mathcal{K}| := \bigcup \mathcal{K} = P$.

Eine simpliziale Zerlegung von P ist eine Menge $\mathcal{K}$ von d-Simplexen, so daß $\bigcup \mathcal{K} = P$ und so daß je zwei Simplexe aus $\mathcal{K}$ keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Eine Triangulierung, bzw. simpliziale Zerlegung von P heißt minimal, falls sie die kleinste Zahl von d-Simplexen unter allen Triangulierungen bzw. simplizialen Zerlegungen von P hat.

Bemerkung: Sei P ein simpliziales 3-Polytop mit f_2 2-Seiten (Dreiecken). Sei $\mathcal{K}$ eine Triangulierung von P. (* s.u.)
Bezeichne g_3 die Zahl der Tetraeder (3-Simplexe) in $\mathcal{K}$,
g_1 die Zahl der "inneren" Kanten in $\mathcal{K}$, d.h. der Kanten, die nicht in ∂P (Rand von P) liegen
g_0 die Zahl der "inneren" Ecken in $\mathcal{K}$, d.h. der Ecken, die nicht in ∂P liegen.

Dann gilt $$g_3 = \frac{1}{2} f_2 - 1 + g_1 - g_0$$

(*): So daß keines der Dreiecke und keine der Kanten von ∂P unterteilt werden.

Der Beweis ergibt sich aus einfachen kombinatorischen Überlegungen. Die Gleichung taucht sicher auch bei Ihren Untersuchungen auf.

<u>Satz 1</u>: Zu jeder Zahl $k \geq 1$ gibt es ein simpliziales konvexes 3-Polytop P_k, so daß es eine Triangulierung K_0 von P gibt mit einer zusätzlichen inneren Ecke, also $g_0 = 1$ und 9 inneren Kanten, d.h. $g_1 = 9$, aber jede Triangulierung von P_k ohne zusätzliche Ecken hat mindestens $9+k$ innere Kanten, hat also mindestens $k+1$ Tetraeder mehr als K_0.

<u>Satz 2</u>: Zu jeder Zahl $k \geq 1$ gibt es ein simpliziales konvexes 3-Polytop P, so daß es eine simpliziale Zerlegung K_0 von P gibt mit einer zusätzlichen inneren Ecke, so daß jede Triangulierung von P (mit oder ohne zusätzliche Ecken) mindestens k Tetraeder mehr enthält, als K_0.

Man kann auch die Zahl der benötigten zusätzlichen Ecken vorgeben.

<u>Satz 1'</u>: Zu je 2 Zahlen $m \geq 1$, $k \geq 1$ gibt es ein simpliziales konvexes Polytop P, dessen minimale Triangulierung genau m innere (zusätzliche) Ecken hat und so daß jede Triangulierung mit weniger Ecken mindestens k Tetraeder mehr hat.

Man kann auch die Form von P "im Wesentlichen" vorgeben.

<u>Satz 1"</u>: Zu je 2 Zahlen $m_0 \geq 1$, $k \geq 1$, jedem $\varepsilon > 0$, jedem konvexen Körper K $(\subset \mathbb{R}^3)$ existiert ein simpliziales konvexes 3-Polytop P, mit $\delta(K, P) < \varepsilon$ (Hausdorff-Abstand) dessen minimale

so daß jede Triangulierung von P mit weniger Ecken mindestens k Tetraeder mehr hat.