TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
FACHBEREICH 3 - MATHEMATIK
Dr. Ulrich Brehm

1000 Berlin 12, den 24.2.92
Straße des 17. Juni 135
Fernruf: (030) 314-

Lieber Herr Prof. Böhm,

leider ist der Brief liegengeblieben.
Ich fand erst jetzt einige Stunden Muße,
die Beispiele von "Schmierzetteln" in, wie ich hoffe,
verständlicher Form aufzuschreiben.
Es zeigt sich, daß kleine Änderungen in den
Anforderungen an die simplizialen Zerlegungen dramatische
Änderungen für die Minimalzahl der Tetraeder zur
Folge haben können.

Alles Gute für 1992!

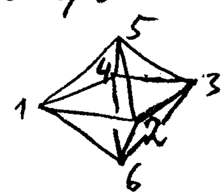
Herzliche Grüße auch an Ihre Frau

Ulrich Brehm

Neue Version:

Bei den Zerlegungen sollte man noch zusätzlich einen Begriff zwischen Triangulierung und simplizialer Zerlegung einführen, auch wenn er im Weiteren keine große Rolle spielt

Def.: Eine f-simpliziale Zerlegung von P ist eine simpliziale Zerlegung, bei der auch "entartete" d-Simplexe zugelassen sind, d.h. konvexe Hüllen von $d+1$ Punkten, aber nicht unbedingt in allgemeiner Lage (also niedriger-dimensionale Polytope). Ansonsten wird aber face-to-face verlangt. Die "leeren" Simplexe sollte man mitzählen.

z. B. reguläres Oktaeder 

1235
1435
1234 ← "leeres Simplex"
1246
3246

f-simpliziale Zerlegung mit 5 Tetraedern

Kombinatorisch ist eine f-simpliziale Zerlegung ein PL-Ball.

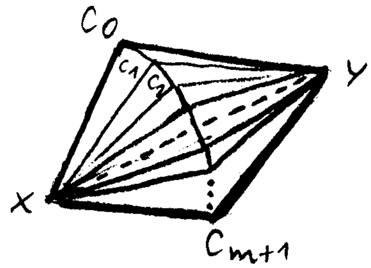
Bezüglich der Ecken sollte man unterscheiden zwischen Triangulierungen (bzw. simplizialen Zerlegungen, bzw. f-simplizialen Zerlegungen):

a) zusätzliche Ecken sind nicht zugelassen
b) mit zusätzlichen Ecken höchstens auf dem Rand zugelassen
c) zusätzliche Ecken sind zugelassen

Es gibt also 9 Typen von Zerlegungen mit zum Teil möglicherweise verschiedenen Minimalzahlen von Simplexen.

Def.: Der Exzeß einer simplizialen Zerlegung eines 3-Polytops P ist Zahl der Simplexe ...

Die Grundkonfiguration P_0 für die Beispiele ist die folgende:



Ein Tetraeder $x y c_0 c_m$, bei dem die Kante $c_0 c_m$ durch das Polygon $c_0 c_1 c_2 c_3 \dots c_{m+1}$ ersetzt ist, so daß die konvexe Hülle die Facetten $x y c_0$, $x y c_{m+1}$

$x c_\nu c_{\nu+1}$, $y c_\nu c_{\nu+1}$,

hat.

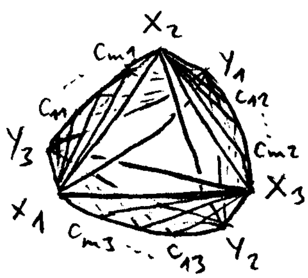
Sei P_1 ein 3-Polytop, welches obiges Polytop P_0 umfaßt und welches alle Facetten von P_0 außer $x y c_0$, $x y c_{m+1}$ besitzt und welches xy im Inneren hat. Jede simpliziale Zerlegung von P_1, welche nicht xy als (innere) Kante enthält hat einen Exzeß von mindestens m (auch wenn zusätzliche Ecken zugelassen sind).

Da xy keine Kante ist, benötigt ein Tetraeder, welches zwei der gemeinsamen Facetten von P_0 und P_1 enthält eine innere Kante und eine solche kann höchstens für 4 Facetten verwendet werden: Tetraeder $x c_\nu c_{\nu+1} c_{\nu+2}$ und $y c_\nu c_{\nu+1} c_{\nu+2}$; denn xy sollte ja nicht vorkommen.

Die Idee für alle Beispiele ist, ein Polytop zu wählen, bei denen die Konfiguration ∂P_0 (ohne xyc_0, xyc_m) am Rand mehrfach auftritt, das also ohne Verwendung der Kante xy (und entsprechender Kanten) einen hohen Exzeß hat (mindestens $m-1$), aber so, daß nach Entfernen des (Voll-)Polytops P_0 (und entsprechender) ein nichtkonvexes Polyeder übrig bleibt, welches sich nur unter Verwendung zusätzlicher Ecken triangulieren läßt.

<u>Beispiel 1a:</u>

$x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3$ ist ein nicht-reguläres Oktaeder (z.B. mit 3-zähliger Achse $(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)$).

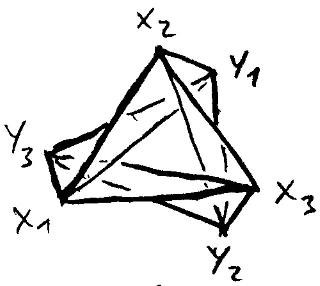


Der betrachtete Teil von P_0 kommt in symmetrischer Weise 3 mal vor.

Eine simpliziale Zerlegg. welche (mindestens) eine der drei (inneren) Kanten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ vermeidet, hat

<u>Exzeß mindestens m.</u> (und m kann bel. groß gewählt werden).

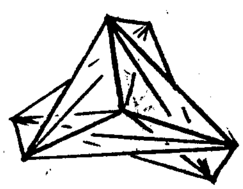
Eine simpliziale Zerlegung, welche die drei inneren Kanten $x_j y_j$ ($j = 1,2,3$) enthält, benötigt jedoch <u>eine Ecke im Innern</u>, da sich offensichtlich das "Restpolyeder"



nicht ohne zusätzliche Ecken simplizial zerlegen läßt.

Es gibt aber (sogar) eine <u>Triangulierung</u> mit einer zusätzlichen Ecke <u>mit Exzeß 9</u>:

9 innere Kanten: Die 3 inneren Kanten $x_j y_j$ $(j=1,2,3)$ und die 6 inneren Kanten $z x_j$, $z y_j$, wobei z die zusätzliche Ecke



im Zentrum ist.

Tetraeder $\quad x_j\, y_j\, c_{ij}\, c_{i+1\,j}\,, \quad i=0,\dots,m+1$

wobei $c_{0j} := y_{j-1}$ (Index von x, y mod 3).

$c_{m+1\,j} := x_{j+1}$

"Restkörper": 8 Tetraeder: $\quad z\, x_1\, x_2\, x_3$

$z\, y_1\, y_2\, y_3$

$z\, x_j\, x_{j+1}\, y_j$

$z\, x_j\, y_{j-1}\, y_j$

<u>Also</u>: Jede simpliziale Zerlegung ohne innere Ecken hat Exzeß $\geq m$
aber es gibt (sogar) eine Triangulierung mit Exzeß 9

<u>Beispiel 2a</u>:

Genauso wie Beispiel 1a, nur vom regulären Oktaeder $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3$ ausgehend.

Eigenschaften:

Eine simpliziale Zerlegung, welche mindestens eine der drei (inneren) Kanten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ vermeidet, hat <u>Exzeß mindestens m</u>.

Eine simpliziale Zerlegung, welche die drei inneren Kanten $x_j y_j$ $(j = 1, 2, 3)$ enthält, benötigt <u>eine Ecke im Inneren</u> (nämlich den Schnittpunkt der 3 Kanten) <u>und ist keine Triangulierung</u> (nicht einmal eine f-simpliziale Zerlegung).

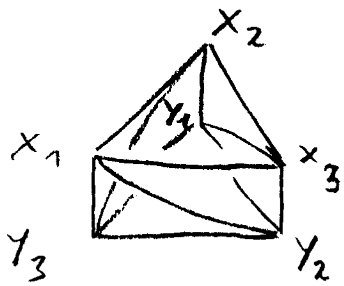
Andererseits gibt es eine <u>simpliziale Zerlegung</u> mit einer Ecke im Inneren <u>vom Exzeß 2</u>

(der Restkörper besteht nur aus den 2 Tetraedern $z x_1 x_2 x_3$, $x y_1 y_2 y_3$, statt aus 8 Tetraedern wie in Beispiel 1a).

<u>Also</u>: Jede Triangulierung hat Exzeß $\geq m$,
jede simpliziale Zerlegung ohne ~~innere~~ Ecke
hat Exzeß $\geq m$

Beispiel 3a:

Genauso wie Beispiel 1a, nur vom 3-seitigen Prisma $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3$ ausgehend



Eigenschaften:

Eine Triangulierung ohne innere Ecken hat Exzeß $\geq n$.

Es gibt aber eine f-simpliziale Zerlegung ohne innere Ecken vom Exzeß 4 mit einem "leeren" Tetraeder, also als simpliziale Zerlegung aufgefaßt vom Exzeß 3.

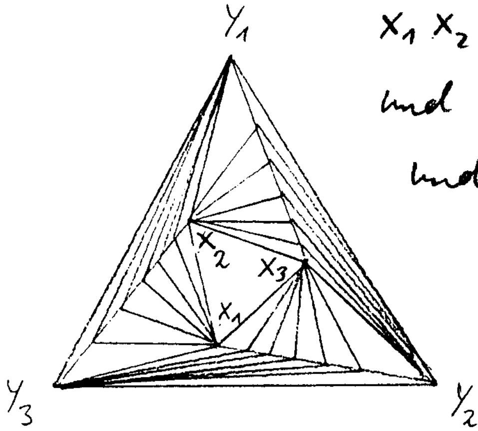
(Restkörper in $x_1 x_2 x_3 y_1$, $y_1 y_2 y_3 x_1$, $x_1 x_3 y_1 y_2$, $x_1 x_2 y_1 y_3$ ("leeres" Simplex)).

Ferner: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es sowohl Polytope vom Hausdorff-Abstand $< \varepsilon$, die kombinatorisch isomorph zu Beispiel 3a sind (und einander entsprechende Facetten haben auch Hausdorff-Abstand $< \varepsilon$), die die Eigenschaften von Beispiel 1a haben,

als auch Polytope vom Hausdorff-Abstand $< \varepsilon$, u.s.w., welche eine Triangulierung [illegible]

Beispiel 1b:

Durch eine projektive Transformation bringe das Polytop aus Beispiel 1a auf die Gestalt



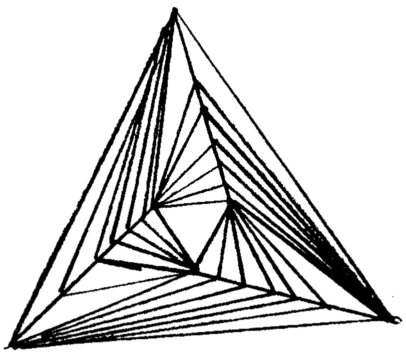
$x_1 x_2 x_3$ liegt "sehr dicht" oberhalb $Y_1 Y_2 Y_3$ und die Winkel zwischen den Ebenen $Y_1 Y_2 Y_3$ und $Y_j\, Y_{j+1}\, c_{ij}$ sind "sehr klein".

Der Schnittpunkt der Ebenen $x_j\, x_{j+1}\, Y_j$ liege im Inneren des Polytops.

Sei P ein Stapelpolytop. Setze auf n Dreiecke ein "flaches" Polytop wie oben auf, so daß P zusammen mit den <u>anderen</u> "aufgesetzten Polytopen im Schnitt der obiges Polytop definierenden Halbräume, mit Ausnahme des Halbraumes mit $Y_1 Y_2 Y_3$ auf dem Rand, liegt.

<u>Eigenschaften</u>: Jede simpliziale Zerlegung mit höchstens $n-1$ inneren Ecken hat Exzeß $\geq m + 9(n-1)$, aber es gibt eine Triangulierung mit n inneren Ecken mit Exzeß $9n$.

Beispiel 2b: Analog wie Übergang von 1a zu 1b).



Polytop, das auf h Facetten des Stapelpolytops aufgesetzt wird. Die 3 Kanten $x_j y_j$ schneiden sich in einem Punkt.

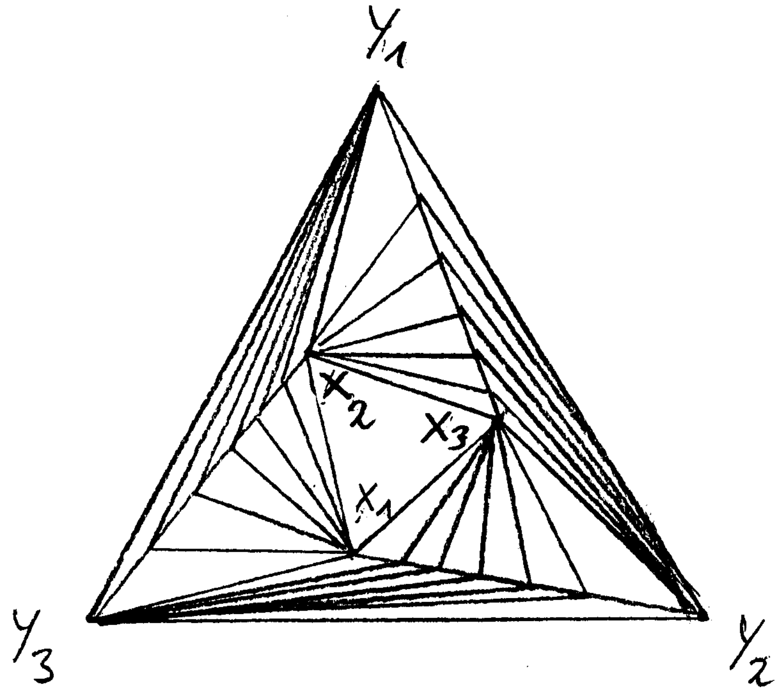
Eigenschaften: Jede simpliziale Zerlegung mit höchstens $h-1$ inneren Ecken hat Exzeß $\geq m + 9(h-1)$

Jede Triangulierung mit bel. vielen inneren Ecken hat Exzeß $\geq m + 9(h-1)$

Aber: Es gibt eine simpliziale Zerlegung mit h inneren Ecken vom Exzeß $2m$.

Für den Beweis von Satz 1'' wähle zum vorgegebenen Polytop zunächst eines, welches hinreichend kleinen Hausdorff-Abstand hat und mindestens h_0 Dreiecke als Facetten hat.

Auf h_0 Dreiecke setze "flache" Polytope gemäß Beispiel 1b (oder 2b) auf mit $m \geq k+9$.


Y_1
X_2
X_3
X_1
Y_3
Y_2