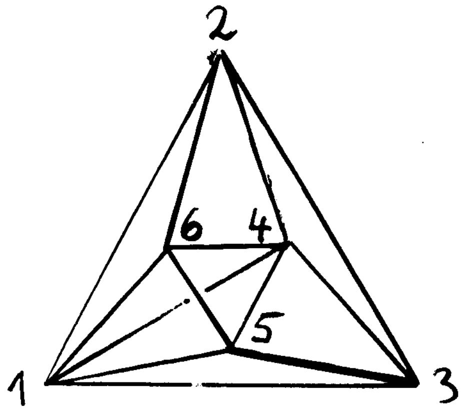
Sei P ein d-Polytop

Transparencies from my lecture 1992 on the DMV congress

Def.: <u>Triangulierung</u> von P:

Geometrischer simplizialer Komplex $\mathcal{M}$ mit $\underline{\bigcup \mathcal{M} = P}$ (insbes. Seite an Seite)

Beispiel:

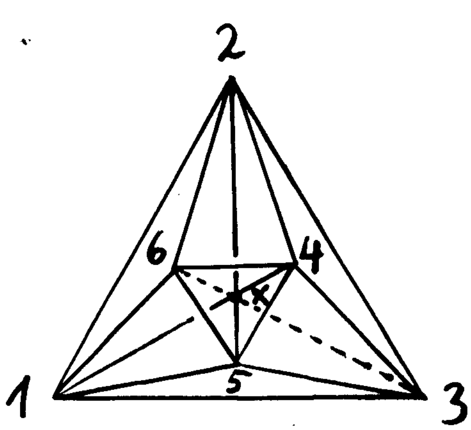


1423
1435
1456
1462

Def.: <u>Simpliziale Zerlegung</u> von P:

Menge $\mathcal{M}$ von d-Simplizes mit paarweise disjunktem Inneren, sodaß $\underline{\bigcup \mathcal{M} = P}$.

Beispiel:



a) 1465
1462
2534
2531

b) 1426
2534
3615
x 456
x 123

Def.: **Abstrakte Triangulierung** von P: Simplizialer Komplex $\mathcal{M}$ mit einem **Homöomorphismus** $f: |\mathcal{M}| \longrightarrow P$, sodaß für jede Seite F von P gilt:

<u>$f^{-1}(F)$ ist Vereinigung von Simplizes aus $\mathcal{M}$</u>.

<u>Möglichkeiten für zusätzlich zugelassene Ecken</u>:

a) keine   b) nur auf ∂P

c) nur in $\operatorname{int} P$ d) beliebige

Bemerkung: Sei P ein 3-Polytop mit D Dreiecken auf ∂P nach (beliebiger) Triangulierung von ∂P ohne zusätzliche Ecken. Sei $\mathcal{M}$ eine (abstrakte) Triangulierung von P. Dann gilt:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} D - 1 + K_i + E_r - E_i}$$

T	Zahl der Tetraeder
K_i	Zahl der inneren Kanten
E_r	Zahl der zusätzlichen Ecken auf ∂P
E_i	Zahl der Ecken in int P

Für die Minimalzahl T_{min} von Tetraedern in Triangulierungen von P ohne zusätzliche Ecken gilt:

$$\boxed{D - val_{max} \geq T_{min} \geq \frac{1}{2} D - 1}$$

val_{max} maximale Valenz der Ecken von P (nach Triang. von ∂P).

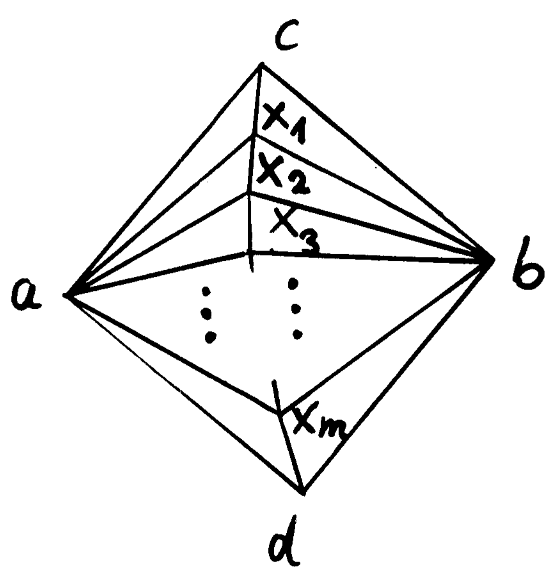
Def.: Der Überschuß einer simplizialen Zerlegung $\mathcal{M}$ von P ist

$$\boxed{\delta(M) := T - \frac{1}{2} D + 1}$$

Lemma: Sei P ein 3-Polytop, auf dessen Rand die folgende Konfiguration vorkommt und sodaß ab und cd im Innern von P liegen.

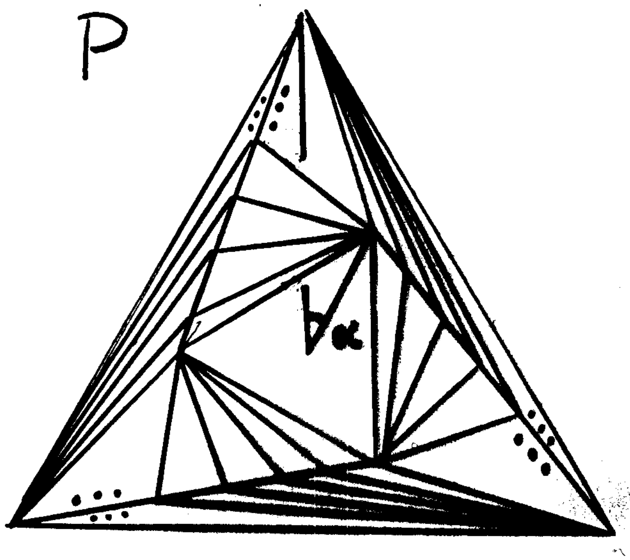
Dann gilt für jede Triangulierung oder simpliziale Zerlegung $\mathcal{M}$ von P, welche nicht ab (als Kante) enthält:

$$\boxed{\delta(\mathcal{M}) \geq m}$$

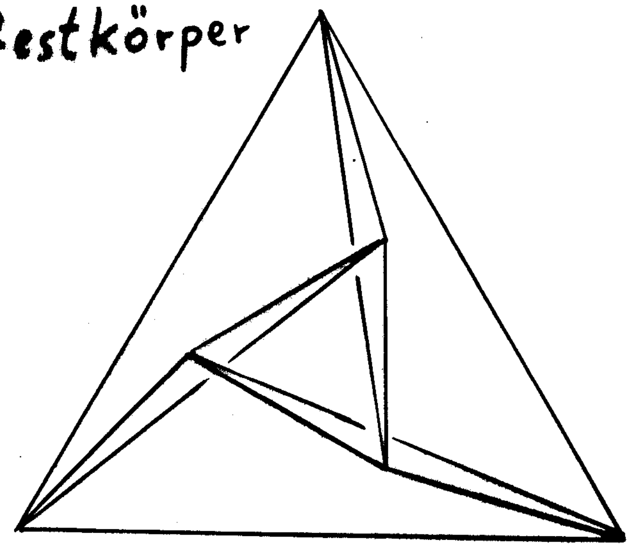


Beispiele

P



Restkörper



Minimalzahl der Tetraeder

1) für $0° < \alpha < 60°$: Minimaler Überschuß δ_{min}

Triangulierung:

ohne zus. Ecken: $\delta_{min} \geq m$

mit zus. Ecken in int P $\delta_{min} = 8 = 3+6-1$

" " " auf ∂P (f. $\alpha < 30°$) $\delta_{min} = 7 = 8-1$

simpliziale Zerlegung:

ohne zus. Ecken: $\delta_{min} \geq m$

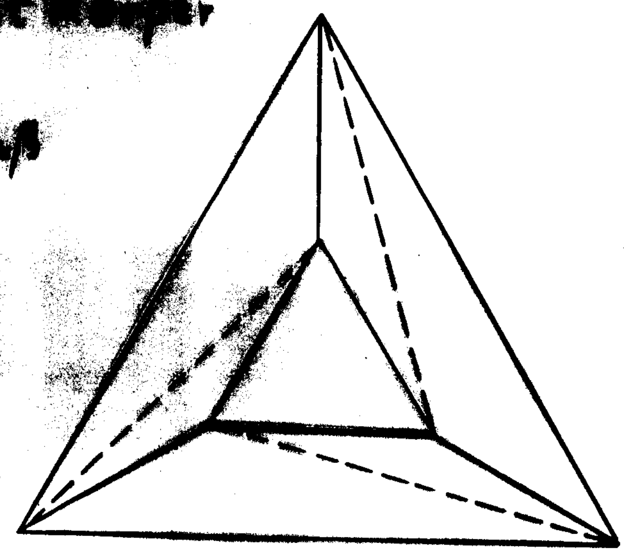
mit zus. Ecken in int P (oder auf ∂P für $\alpha < 30°$) $\delta_{min} = 5 = 8-3$

falls $\alpha = 30°$ mit zus. Ecken auf ∂P $\delta_{min} = 4 = 8-4$

Minimalzahl der Tetraeder

2) Für $\alpha = 0°$: Rest Körper

δ_{min} minimaler Überschuß



Triangulierung

ohne zus. Ecken	$\delta_{min} \geq m$
mit zus. Ecken in $\operatorname{int} P$	$\delta_{min} = 8$
" " " auf ∂P	$\delta_{min} = 7$

simpliziale Zerlegung

ohne (oder mit bel.) zus. Ecken $\delta_{min} = 3$

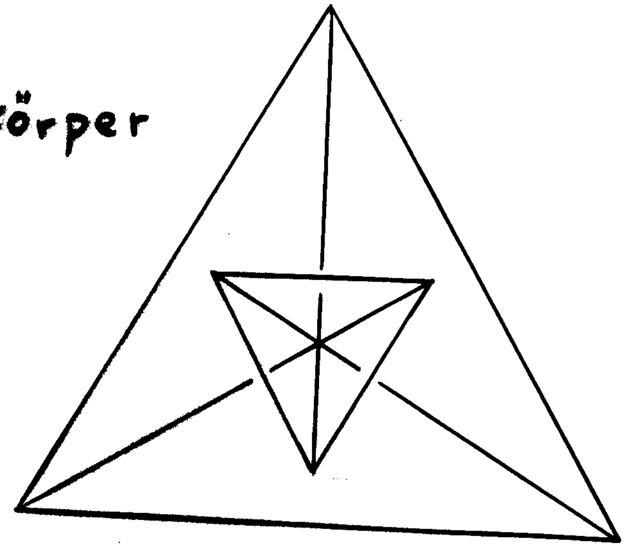
3) Für $60° < \alpha < 120°$:

simpliziale Zerlegung

mit bel. zus. Ecken $\delta_{min} \geq m$

4) Für $\alpha = 60°$

Restkörper



<u>Triangulierung</u>

mit bel. zus. Ecken $\delta_{min} \geq m$

<u>Simpliziale Zerlegung</u>

mit zus. Ecken auf ∂P $\delta_{min} \geq m$

mit " " in int P $\delta_{min} = 2$

Minimalzahl der Tetraeder

in Abhängigkeit von zugelassenen
zusätzlichen [illegible]
Typ der Zerlegung

Tabelle für den minimalen Überschuß δ_{min}

	zugel. Ecken \ α	$0°$	$0<\alpha<30°$	$30°$	$60°-\varepsilon(m)$	$60°$	>60
Triangulierung	keine	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$
	auf ∂P	7	7	? (≥ 10)	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$
	in int P	8	8	8	8	$\geq m$	$\geq m$
Simpliziale Zerlegung	keine	3	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$
	auf ∂P	3	5	4	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$
	in int P	3	5	5	5	2	$\geq m$

Abstrakte Triangulierung ohne <u>oder</u> mit bel. zugel. Ecken $\Big\}\ \delta_{min} = 4$

Selbstverständlich lassen sich dieser Effekte in einem einzigen 3-Polytop kombinieren, indem man z.B. unsere Beispiele fast flach macht und auf Seiten eines einzigen simplizialen 3-Polytops aufsetzt, welches dann viele zusätzliche Ecken für die minimale Tetraederzahl benötigt.

Fazit: **1.** Die Minimalzahl von Tetraedern für eine Zerlegung eines 3-Polytops hängt im allgemeinen entscheidend von der Zahl und Art der zugelassenen zusätzlichen Ecken ab und davon, ob man nur Triangulierungen zuläßt.

2. Diese Minimalzahlen können auch extrem empfindlich von der genauen Lage der Ecken abhängen. Beim Auftreten von zusätzlichen Ecken reicht z.B. die Kenntnis aller Orientierungen von 4-Tupeln von Ecken des Polytops, d.h. des zugehörigen orientierten Matroids nicht aus, um die minimale Tetraederzahl zu bestimmen.

Damit möchte ich schließen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

weitere Ergebnisse: ~~Triang.~~, P simplicial

min. Zahl der Tetraeder mit Ecken auf int P

– min Zahl ... ... auf ∂P $\leq$ Zahl der zus. Ecken auf dem Rand