

MINIMALE ERZEUGUNG VON POSITIVBEREICHEN

0. EINLEITUNG

Sei R ein reell abgeschlossener Körper und V eine affine algebraische R -Varietät. Wir nehmen stets an, daß $V(R)$ Zariskidicht in V ist. Unter einem Positivbereich verstehen wir eine Teilmenge $S \subset V(R)$ der Form $S = S(f_1, \dots, f_m) := \{x \in V(R) \mid f_i(x) > 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}$ für geeignete $f_i \in R[V]$.

Wir gehen der Frage nach, wieviele f_i für eine solche Darstellung erforderlich sind. Es zeigt sich, daß es hierfür eine nur von der Dimension n von V abhängige endliche Schranke gibt. Diese Schranke ist gleich n für $n \leq 3$. Für $n > 3$ ist es mir leider nicht gelungen, dies zu zeigen oder zu widerlegen. In jedem Fall wäre n die bestmögliche Schranke. Wir werden außerdem die Positivbereiche unter den offenen semialgebraischen Mengen charakterisieren.

Ich verwende überwiegend Methoden und Begriffe, die aus der Anordnungstheorie und zum Teil aus der Theorie der quadratischen Formen kommen, wie z. B.: reelle Spektren, Ultrafilter, Räume von Anordnungen, Signaturen, Fächer und ähnliches. Daß diese Begriffe zur vorliegenden anschaulich geometrischen Fragestellung etwas beitragen, mag als weiterer Beweis dafür gelten, daß sie nicht ganz um ihrer selbst willen existieren. Ich werde zu ihnen, um die Arbeit möglichst 'self-contained' zu halten, jeweils etwas Einführendes bemerken.

1. RESTRINGIERTE TOPOLOGISCHE RÄUME

Ein *restringierter topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathfrak{B})$ aus einem topologischen Raum X und einer Basis $\mathfrak{B}$ von X , so daß gilt $\emptyset \in \mathfrak{B}$, $X \in \mathfrak{B}$ und für $A, B \in \mathfrak{B}$ sind auch $A \cup B$ und $A \cap B \in \mathfrak{B}$. Ein *Morphismus* $f: (X, \mathfrak{B}) \rightarrow (X', \mathfrak{B}')$ zwischen restringierten Topologischen Räumen ist eine Abbildung $f: X \rightarrow X'$, so daß $f^{-1}(B') \in \mathfrak{B}$ für alle $B' \in \mathfrak{B}'$; insbesondere ist f dann stetig. Die Kategorie der restringierten topologischen Räume bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$. Sei $(X, \mathfrak{B}) \in \mathfrak{R}$. Mit $k\mathfrak{B}$ bezeichnen wir den von $\mathfrak{B}$ erzeugten komplementären Verband. Die Mengen aus $k\mathfrak{B}$ heißen *konstruierbar*, die aus $\mathfrak{B}$ heißen *offen-konstruierbar*. $(Y, \mathfrak{C})$ heißt *Teilraum* von $(X, \mathfrak{B})$, wenn $Y \subset X$ und $\mathfrak{C} = \{B \cap Y \mid B \in \mathfrak{B}\}$. Den Teilraum der abgeschlossenen Punkte von X bezeichnen wir mit $(X, \mathfrak{B})$.

Sei $\hat{X}$ die Menge aller Ultrafilter des Verbands $k\mathfrak{B}$ und entsprechend $\hat{D} := \{F \in \hat{X} \mid D \in F\}$ für $D \in k\mathfrak{B}$. Wir versehen $\hat{X}$ mit der Basis $\mathfrak{B} := \{\hat{\beta} \mid \beta \in \mathfrak{B}\}$. Die Abb. $D \rightarrow \hat{D}$ definiert einen Verbandisomorphismus: $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ und $k\mathfrak{B} \rightarrow k\hat{\mathfrak{B}}$.

Wir betrachten als Funktor: $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$, denn für einen Morphismus $f: (X, \mathfrak{B}) \rightarrow (Y, \mathfrak{C})$ hat man $\hat{f}: (\hat{X}, \hat{\mathfrak{B}}) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{\mathfrak{C}})$ wobei $\hat{f}(F) = \{D \in k\hat{\mathfrak{C}} \mid f^{-1}(D) \in F\}$.

Für $(X, \mathfrak{B}) \in \mathfrak{B}$ und $x \in X$ sei $F(x) \in \hat{X}$ der von x erzeugte *Hauptfilter*, also $F(x) = \{D \in k\mathfrak{B} \mid x \in D\}$. Ist $(X, \mathfrak{B})$ Hausdorffsch, so bekommen wir eine Einbettung $(X, \mathfrak{B}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{\mathfrak{B}}): x \rightarrow F(x)$. Die Räume $(\hat{X}, \hat{\mathfrak{B}})$ sind quasiskompakt. Die Abbildung $B \rightarrow \hat{B}$ für $B \in \mathfrak{B}$ definiert daher eine Bijektion zwischen den Mengen $B \in \mathfrak{B}$, für die auch $X \setminus B \in \mathfrak{B}$ und den offenen- und abgeschlossenen-Teilmengen von $\hat{X}$. Wir nennen $(X, \mathfrak{B})$ zusammenhängend, wenn X nicht disjunkte Vereinigung von zwei nicht leeren Mengen aus $\mathfrak{B}$ ist. Das ist also genau dann der Fall, wenn $(\hat{X}, \hat{\mathfrak{B}})$ im gewöhnlichen Sinne zusammenhängend ist. (Etwas aber nicht viel mehr über restringierte topologische Räume findet man in [3].)

2. SEMIALGEBRAISCHE MENGEN

Sei R ein reell abgeschlossener Körper und V eine affine algebraische R -Varietät. Das Symbol $U < V$ soll bedeuten, daß U eine abgeschlossene Untervarietät von V ist. Die zugehörige Strukturgarbe sei $\mathcal{O}(U)$ und falls U irreduzibel ist, werde mit $\mathfrak{x}(U)$ der generische Punkt von U bezeichnet. Für $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in R[V]$ sei

$$S(f_1, \dots, f_r, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_s) := \{x \in V(R) \mid f_i(x) > 0, g_j(x) \geq 0; \\ i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s\}.$$

Eine Menge dieser Form heißt *Semipositivbereich* und eine Menge der Form $S(f_1, \dots, f_r)$ heißt *Positivbereich*. Sei $\mathfrak{y}(V)$ oder kurz γ der von den Positivbereichen erzeugte Verband (bez. $\cup$ und $\cap$). Dann ist $(V(R), \mathfrak{y}(V)) \in \mathfrak{B}$. Die zugehörige Topologie heißt die starke Topologie auf $V(R)$. Begriffe aus der Topologie wie 'offen', 'abgeschlossen' u. ä. sollen, so weit sie $V(R)$ betreffen, sich immer auf die starke Topologie beziehen.

Die Elemente aus $k\gamma$ heißen semialgebraische Mengen. Sie sind Vereinigungen von Semipositivbereichen. Es ist bekannt aber nicht trivial ([9, 3.3], [6], [12]), daß γ genau aus den offenen Mengen aus $k\gamma$ besteht. Für $S \in k\gamma$ seien $\bar{S}, \overset{\circ}{S}$ und ∂S der Abschluß, das Innere und der Rand von S .

Nach dem Tarski-Seidenberg Prinzip ([5, Anhang]) sind diese Mengen wieder semialgebraisch. Für S und $T \in k\gamma$ gilt

$$(2.1) \quad \text{Aus } S = \emptyset \text{ und } \bar{T} = \emptyset \text{ folgt } S \cap T = \emptyset.$$

was natürlich eine spezielle Eigenschaft semialgebraischer Mengen ist. Man erhält hieraus die Beziehungen

$$(2.2) \quad \bar{\bar{S}} = \bar{S} \quad \text{und} \quad \bar{\bar{\bar{S}}} = \bar{S}.$$

Sei jetzt $V(R) = S \cup T$ und $S \cap T = \emptyset$. Es ist

$$V(R) \setminus \bar{\bar{S}} = V(\bar{R}) \setminus \bar{\bar{S}} = \overline{V(\bar{R}) \setminus S} = \bar{\bar{T}} \subset \bar{T}.$$

Insbesondere sind $\bar{\bar{S}}$ und $\bar{T}$ disjunkt, und

$$V(R) \setminus (\bar{\bar{S}} \cup \bar{T}) = \bar{\bar{S}} \setminus \bar{T} = \bar{T} \setminus \bar{T} =: \gamma S = \gamma T.$$

Es ist $\gamma S = \gamma T \subset \partial S = \partial T$. Die Elemente aus γS heißen *Grenzpunkte* von S bzw. T . Wir haben außerdem die Randpunkte aus $\partial S := \partial S \cap \bar{\bar{S}}$ und $\partial S := \partial S \cap \bar{T}$. Die Punkte aus ∂S heißen *innere* Randpunkte und die aus ∂S *äußere* Randpunkte von S . Natürlich ist $\partial S = \beta T$ und $\partial S = \alpha T$, d.h. die inneren Randpunkte von S sind äußere Randpunkte von T vice versa. Für $S \in k\gamma$ bezeichnen wir mit $\bar{S}^Z$ den Zariskiabschluß von S und definieren als die Dimension $\dim S$ die Dimension von $\bar{S}^Z$. Die Zuordnung $V \rightarrow (V(R), \gamma)$ definiert übrigens einen Funktor $\sigma: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$. Dabei ist $\mathfrak{B}$ die Kategorie der affinen R -Varietäten. Dieser Funktor läßt sich leicht auf nicht-notwendig affine R -Varietäten ausdehnen [3]; für unsere Zwecke ist das aber nicht erforderlich.

3. REELLES SPEKTRUM

Sei $\mathfrak{A}$ die Kategorie der kommutativen Ringe mit 1-Element. Jedem $A \in \mathfrak{A}$ ordnen wir nach Coste [7] und Coste-Roy [8] wie folgt sein reelles Spektrum $(X(A), \mathfrak{B}(A))$ zu. Die Elemente aus $X(A)$ sind Paare $(x, P(x))$, wobei $x \in \text{Spec}(A)$ und $P(x)$ eine Anordnung (Positivkegel mit 0) des Restklassenkörpers $k(x)$ ist. Für $a \in A$ und $x \in \text{Spec}(A)$ sei $d(x)$ die Restklasse von a an der Stelle x . Für $a_1, \dots, a_n \in A$ sei $B(a_1, \dots, a_n) := \{(x, P(x)) \in X(A) \mid a_i(x) \notin -P(x) \text{ für } i = 1, \dots, n\}$. Jetzt sei $\mathfrak{B}(A)$ der von allen $B(a)$, $a \in A$, erzeugte Verband. Zu $(x, P(x)) \in X(A)$ sei $P := \{a \in A \mid d(x) \in P(x)\}$. Dann gilt $P + P \subset P$, $P \cdot P \subset P$, $-1 \notin P$, $P \cup P = A$ und $P \cap -P$ ist ein Primideal (nämlich x), mit anderen Worten: P ist ein primärer Positivkegel in A . Umgekehrt definiert jede Menge P mit diesen Eigenschaften eindeutig ein Element $(x, P(x)) \in X(A)$. Das reelle Spektrum definiert einen kontravarianten Funktor $X: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$; $A \rightarrow (X(A), \mathfrak{B}(A))$. Fassen wir $\mathfrak{A}$ als Kategorie affiner Schemata auf, so erhalten wir einen kovarianten Funktor $X: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$; $\text{Spec}(A) \rightarrow (X(A), \mathfrak{B}(A))$. Eine Ausdehnung von X auf die Kategorie aller quasis kompakten separierten Schemata läßt sich leicht durchführen [3]; ist aber für unsere Zwecke wiederum nicht erforderlich.

Für $A \in \mathfrak{A}$ seien folgende wichtige Eigenschaften von $X(A)$ erwähnt [3], [7]:

- (i) $X(A)$ ist quasikompakt;
- (ii) $X(A)$ ist kompakt;
- (iii) die Spezialisierungen eines Elements $(x, P(x)) \in X(A)$ bilden eine Kette.

Auf der Unterkategorie $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ haben wir nun die Funktoren $\sigma: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$: $V \mapsto (V(R), \gamma(V))$ und $X: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}: V \mapsto (X(V), \mathfrak{B}(V))$. Hierzu gilt

SATZ 3.1 (Ultrafiltertheorem [3]). $X = \sigma \circ \sigma$; mit anderen Worten: Es gibt zu $V \in \mathfrak{A}$ kanonische zueinander inverse Isomorphismen

$$(\hat{V}(R), \hat{\gamma}(V)) \xrightarrow[p]{f} (X(V), \mathfrak{B}(V)),$$

Zum besseren Verständnis möchte ich andeuten, wie die Abbildung p läuft. Sei M^2 der Zariskiabschluß von $M \subset V$. Für $F \in \hat{V}(R)$ sei $x(F)$ der generische Punkt von $\cap_{S \in F} S^2$. Setze $x(F) = x$ und $P(x) := \{f \in k(x) \mid f \text{ erklärt und } > 0 \text{ auf einer Menge } S \in F\}$. Dann ist $p(F) = (x, P(x))$. Ist z.B. $x \in V(R)$ und $F(x) = F$ der von x erzeugte Ultrafilter, so ist $p(F) = (x, R^2)$. Sei jetzt A ein geometrischer semilokaler Ring über R . Das soll heißen: Es gibt eine Varietät $(V, \mathcal{C}(V)) \in \mathfrak{A}$ und (nicht notwendig abgeschlossene) Punkte

$$x_1, \dots, x_l \in V, \text{ so daß } A = \varinjlim_{\substack{U \text{ offen} \\ x_i \in U}} \mathcal{C}(U) \text{ oder m.a.W.}$$

$A = S^{-1}R[U]$ wobei S das Komplement von endlich vielen Primidealen ist. Wir wollen annehmen, daß alle Körper $k(x_i)$ formalteill sind. Das bedeutet bekanntlich, daß die Mengen $W_i(R)$ Zariskidicht in den Abschüssen W_i von x_i liegen.

Sei $\hat{V}(x_1, \dots, x_l) := \{F \in \hat{V}(R) \mid x(F) \text{ verallgemeinert ein } x_i\}$. Wir versehen $\hat{V}(x_1, \dots, x_l)$ mit der induzierten Basis $\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_l)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt

BERMERKUNG 3.2 Die natürliche Projektion $\lambda: \text{Spec}(A) \rightarrow V$ definiert eine Einbettung $X(\lambda): (X(\text{Spec}(A)), \mathfrak{B}(\text{Spec}(A))) \rightarrow (X(V), \mathfrak{B}(V))$. $f|X(A): (X(\text{Spec}(A)), \mathfrak{B}(\text{Spec}(A))) \rightarrow (V(x_1, \dots, x_l), \hat{\gamma}(x_1, \dots, x_l))$ ist ein Isomorphismus und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X(\text{Spec}(A)), \mathfrak{B}(\text{Spec}(A))) & \xrightarrow{f|X(A)} & (V(x_1, \dots, x_l), \hat{\gamma}(x_1, \dots, x_l)) \\ \downarrow \lambda(\lambda) & & \downarrow \\ (X(V), \mathfrak{B}(V)) & \xrightarrow{f} & (V(R), \gamma(V)) \end{array}$$

kommutiert.

Sei wieder $(\hat{V}(x_1, \dots, x_l), \hat{\gamma}(x_1, \dots, x_l))$ der Teilraum der abgeschlossenen Punkte in $(\hat{V}(x_1, \dots, x_l), \hat{\gamma}(x_1, \dots, x_l))$. Nach Abschnitt 1 definiert die Abbildung $S \mapsto \hat{S}$ einen Verbandisomorphismus: $k_\gamma(V) \rightarrow k_\gamma(V)$, somit definiert $S \mapsto \hat{S} \cap \hat{V}(x_1, \dots, x_l)$ einen Verbandsepiomorphismus: $k_\gamma(V) \rightarrow k_\gamma(x_1, \dots, x_l)$. Hinsichtlich der Abweichung von der Injektivität gilt

SATZ 3.3. Für $S_1, S_2 \in \gamma(V)$ ist $\hat{S}_1 \cap \hat{V}(x_1, \dots, x_l) = \hat{S}_2 \cap \hat{V}(x_1, \dots, x_l)$ genau dann, wenn der Zariskiabschluß von $(S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2)$ keine Verallgemeinerung eines Punktes x_i enthält.

Zunächst beweisen wir

LEMMA 3.4. Für $F \in \hat{V}(R)$ gilt $F \in \hat{V}(x_1, \dots, x_l)$ genau dann, wenn gilt: $x(F)$ ist Verallgemeinerung eines Punktes x_i und für alle $y \neq x(F)$, die $x(F)$ spezialisieren und ein x_i verallgemeinern gibt es eine abgeschlossene Menge $S \in F$, so daß $S \cap \bar{y}$ nicht Zariskidicht in $\bar{y}$ ist.

Dies ergibt sich sofort aus der Definition der Topologie in $\hat{V}(R)$ und der Tatsache, daß die offenen Mengen aus $k_\gamma(V)$ schon in $\gamma(V)$ liegen.

Beweis des Satzes. Es ist zu zeigen: Sei U irreduzible Untervarietät von V , $U \supset W_i = \bar{x}_i$ für ein i und $S \in k_\gamma(U)$ Zariskidicht in U . Dann ist $\hat{S} \cap \hat{V}(x_1, \dots, x_l) \neq \emptyset$.

Fall 1: $U = W_i$. Die Elemente $S' \in k_\gamma(V)$ mit $\dim(S' \setminus S) < \dim S = \dim U$ bilden einen Filter. Darüber liegt ein Ultrafilter F . Nach Konstruktion ist $F \in \hat{S}$ und $x(F) = x(U) = x_i$. Nach Lemma 3.4 ist $F \in \hat{V}(x_1, \dots, x_l)$.

Fall 2: $U \neq W_i$ für $i = 1, \dots, l$. Wähle einen in U einfachen Punkt $y \in S$, $y \notin W_i$ für $i = 1, \dots, l$ [10, §8] und eine abgeschlossene Untervarietät H von V , so daß gilt: $U \supset H \neq W_i$ für $i = 1, \dots, l$; $y \in H$; H hat Codimension 1 in U und definiert einen regulären Parameter h in $\mathcal{C}_{(y, U)}$. Wähle ferner einen Ultrafilter F mit $x(F) = x(H) := x$, der von dem Hauptfilter $F(y)$ spezialisiert wird. F findet man so: Zunächst sei $N = F(y) \cap \gamma(H)$. Sodann sei F' der Filter aller $S' \in k_\gamma(V)$, für die $\dim((S' \cup T) \setminus (S' \cap T)) < \dim H$ für ein $T \in N$. Jetzt wähle $F \in \hat{U}(R)$, $F \supset F'$ beliebig. Nach dem Ultrafiltertheorem gehören hierzu Elemente $(x, P(x))$ und $(y, R^2) \in X(U)$ wobei (y, R^2) Spezialisierung von $(x, P(x))$ ist. $\mathcal{C}_{(x, U)}$ ist diskreter Bewertungsring in $R(U)$ mit Restklassenkörper $R(x)$. Daher können wir die Anordnung $P(x)$ von $R(x)$ auf zwei Weisen zu Anordnungen $P_1(z)$ und $P_2(z)$ von $R(U)$ liften, wobei $z = x(U)$. Nach [3] sind die $(z, P_i(z))$ Verallgemeinerungen von $(x, P(x))$ in $X(V)$. Die zugehörigen Ultrafilter $F_i := f(z, P_i(z))$ werden somit von F und F wiederum von $F(y)$ spezialisiert. Wegen $y \in S$ folgt $F_i \in \hat{S}$. Da die Spezialisierungen von F_i eine Kette bilden, liegt nach Konstruktion keine Spezialisierung von F_i in $V(x_1, \dots, x_l)$. Also ist $F_i \in \hat{S} \cap \hat{V}(x_1, \dots, x_l)$.

4. ANORDNUNGSRAÜME

Wir führen Anordnungsräume nach Marshall ([20]–[22]) ein: Ein Anordnungsraum ist ein Paar (X, G) . Dabei ist G eine Gruppe vom Exponenten 2 mit ausgezeichnetem Element $-1 \neq 1$ und X ist eine Teilmenge der topologischen Charaktergruppe G^* von G , so daß 4 Axiome gelten:

O_1 : X ist abgeschlossen in G^* .

O_2 : $\sigma(-1) = -1$ für alle $\sigma \in X$.

O_3 : $\bigcap_{\sigma \in X} \sigma^{-1}(1) = 1$.

Um O_4 zu formulieren, definiert man zunächst: Eine Form über G ist ein n -Tupel $\varphi = \langle g_1, \dots, g_n \rangle, g_i \in G$. Man setzt $n = \dim \varphi$. Für $\sigma \in G^*$ sei $\sigma(\varphi) = \sigma(g_1) + \dots + \sigma(g_n)$. Man erklärt Verknüpfungen $\perp$ und $\otimes$: Ist nämlich $\psi = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ eine weitere Form über G , so sei

$$\varphi \perp \psi = \langle g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \rangle \quad \text{und} \quad \varphi \otimes \psi$$

$$= \langle g_1, h_1, \dots, g_1, h_m, \dots, g_n, h_n \rangle.$$

Zwei Formen φ und ψ über G heißen kongruent mod X , in Zeichen $\varphi \equiv \psi \pmod{X}$ oder nur $\varphi \equiv \psi$, wenn $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$ für alle $\sigma \in X$ und $\dim \varphi = \dim \psi$. Eine Kongruenzklasse von Formen über G heißt Form über (X, G) : Wir sagen, eine Form φ über (X, G) stellt $g \in G$ dar, wenn es eine Form ψ über (X, G) gibt, so daß $\varphi = \langle g \rangle \perp \psi$. Die Menge der von φ dargestellten Elemente bezeichnen wir mit $D_X(\varphi)$ oder kurz $D(\varphi)$.

O_4 : Seien φ_1, φ_2 Formen über (X, G) und sei $g \in D(\varphi_1 \perp \varphi_2)$. Dann existieren $g_i \in D(\varphi_i)$, so daß $g \in D(g_1, g_2)$.

Beispiel. k sei ein formal reeller Körper, $X = X(k)$ das reelle Spektrum von k und $G = k^*/q^*k$. Dabei sei q^*k die Menge aller Summen von Quadraten aus k^* . Hier folgt das Axiom O_4 aus Pfisters lokal-global Prinzip für quadratische Formen [23]. Ein weiteres Beispiel betrachten wir im nächsten Abschnitt.

Ein Anordnungsraum (X, G) heißt *Fächer*, wenn $X = \{\sigma \in G^* | \sigma(-1) = -1\}$. Sei (X, G) ein Anordnungsraum, H Untergruppe von G und Y Teilmenge von X , so daß gilt: $H = \{g \in G | \sigma(g) = 1 \text{ für alle } \sigma \in Y\}$ und $Y = \{\sigma \in X | \sigma(h) = 1 \text{ für alle } h \in H\}$. Dann trägt $(Y, G/H)$ in natürlicher Weise wieder die Struktur eines Anordnungsraumes ([20, §2]). Ein Raum dieser Form heißt *Unterraum* von (X, G) . Die Zahl $\text{st}(X) = \sup\{m | \exists \text{ ein endlicher Fächer } Y \subset X \text{ mit } |Y| = 2^m\}$ heißt der *Stabilitätsindex* von (X, G) , $\text{st}(X)$ ist auch die kleinste Zahl m , für die gilt: Zu jeder Pfisterform $\psi = [a_1, \dots, a_{m+1}] := (1, a_1) \otimes \dots \otimes (1, a_{m+1})$ über G mit $\sigma(\psi) \neq 0$ für mindestens ein $\sigma \in X$ gibt es

Elemente $b_1, \dots, b_m \in G$, so daß $[a_1, \dots, a_{m+1}] = 2[b_1, \dots, b_m]$, $(\text{st}(X) = \infty$ g.d.w. so ein m nicht existiert) [21, 6].

Ein *Morphismus* $(X, G) \rightarrow (Y, H)$ von Anordnungsräumen ist ein Paar (f, f^*) aus einem Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow H$ mit $f(-1) = -1$ und einer Abbildung $f^*: Y \rightarrow X$, so daß für alle $g \in G$ und alle $\sigma \in Y$ gilt: $\sigma(f(g)) = (f^*\sigma)(g)$. Die Kategorie der Anordnungsräume sei $\mathfrak{D}$. Versetzen wir (X, G) mit der Harrisonbasis $\mathfrak{B}(G)$, die erzeugt wird von allen $B(g) := \{\sigma \in X | \sigma(g) = 1\}$ für $g \in G$, so ist $(X, \mathfrak{B}(G)) \in \mathfrak{B}$ und wir erhalten einen Funktor $h: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{B}$. Für $(X, G) \in \mathfrak{D}$ sind die Elemente aus $\mathfrak{B}(G)$ genau die offenen und abgeschlossenen Mengen. Wir setzen $B(g_1) \cap \dots \cap B(g_n) := B(g_1, \dots, g_n)$. Es ist $(B(g_1, \dots, g_n), G/\langle g_1, \dots, g_n \rangle)$ ein Unterraum von (X, G) . Daher interessiert man sich für die Charakterisierung der Mengen der Form $B(g_1, \dots, g_n)$ unter den Elementen aus $\mathfrak{B}(G)$.

SATZ 4.1. Sei $B \in \mathfrak{B}(G)$.

- (a) Genau dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $g_1, \dots, g_n \in G$, so daß $B = B(g_1, \dots, g_n)$, wenn für jeden Fächer $(Y, G/H) < (X, G)$ mit $|Y| = 4$ gilt: $|B \cap Y| \neq 3$.

- (b) Wenn zudem für jeden endlichen Fächer $(Y, G/H) < (X, G)$ gilt: $2^k |B \cap Y| \equiv 0 \pmod{|Y|}$, so gibt es $g_1, \dots, g_k \in G$ mit $B = B(g_1, \dots, g_k)$.

Ohne den Zusatz (b) ist dies [22, 3, 16], und mit dem Zusatz kann dies mit Hilfe des Darstellungssatzes [21, 5, 5] genau so bewiesen werden.

5. SIGNATUREN

Sei wieder $\mathfrak{A}$ die Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins. Zu $A \in \mathfrak{A}$ sei $W(A)$ der Witttring der nicht ausgetarteten symmetrischen Bilinearformen auf endlich erzeugten projektiven A -Moduln. Mit Knebusch [17], [18] nennen wir einen Homomorphismus $\sigma: W(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Signatur von A . Die Menge $\text{Sign}(A)$ aller Signaturen von A versehen wir mit der Basis $\mathfrak{Z}(A)$, die erzeugt wird von allen Mengen $Z(\varphi, n) = \{\sigma \in \text{Sign}(A) | \sigma(\varphi) = n\}$ mit $\varphi \in W(A)$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Das definiert einen Funktor $\text{Sign}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$; $A \rightarrow (\text{Sign}(A), \mathfrak{Z}(A))$. Andererseits hat man eine natürliche Abbildung

$$\pi: (X(A), \mathfrak{B}(A)) \rightarrow (\text{Sign}(A), \mathfrak{Z}(A)) \quad \text{nämlich} \quad (x, P(x)) \rightarrow \sigma$$

wobei $\sigma(\varphi) = \text{sign}_{P(x)}(k(x) \otimes \varphi)$.

Nach Dress [13] ist π surjektiv; π ist offenbar konstant auf Zusammenhangskomponenten von $X(A)$ und Mahé [19] hat sogar gezeigt, daß π einen Homöomorphismus zwischen dem Raum der Zusammenhangskompo-

nen von $X(A)$ und $\text{Sign}(A)$ induziert. Sei jetzt A semi-lokal und zusammenhängend. Dann besitzt jede Zusammenhangskomponente von $X(A)$ genau einen abgeschlossenen Punkt. Daher definiert π einen Homöomorphismus: $X(A) \rightarrow \text{Sign}(A)$. Nach Schwartz [25] kann man dies, wie folgt, direkt einsehen: Gemäß Kanzaki und Kitamura [15] und Knebusch [17] definiert jedes $\sigma \in \text{Sign}(A)$ eine kanonische disjunkte Zerlegung: $A = Q(\sigma) \cup p(\sigma) \cup -Q(\sigma)$ wobei $p(\sigma)$ ein Primideal ist und für $Q(\sigma)$ gilt: $Q(\sigma) + Q(\sigma) \subset Q(\sigma)$, $Q(\sigma)Q(\sigma) \subset Q(\sigma)$. Es ist dabei $Q(\sigma) \cup p(\sigma)$ ein maximaler primärer Positivkegel in A und die Abbildung $\text{Sign}(A) \rightarrow X(A)$: $\sigma \rightarrow Q(\sigma) \cup p(\sigma)$ ist invers zu π . Halten wir fest.

SATZ 5.1 (Schwartz). Sei A semi-lokal und zusammenhängend. Dann ist $\pi: X(A) \rightarrow \text{Sign}(A)$ ein Homöomorphismus.

Die Abbildung $\pi|_{X(A)}$ ist nämlich bijektiv, stetig und $X(A)$ ist kompakt; π ist aber im allgemeinen kein Isomorphismus zwischen $(X(A), \mathfrak{B}(A))$ und $(\text{Sign}(A), \mathfrak{B}(A))$, weil $\mathfrak{B}(A)$ nur durch Einheiten definiert wird. Diese Feinheit wird zu Beginn von §6 eine Rolle spielen.

Sei weiterhin A semi-lokal und zusammenhängend. Setze $q^*(A) := \{a \in A \mid \sigma \langle a \rangle = 1 \text{ für alle } \sigma \in \text{Sign}(A)\}$ und $G(A) := A^*/q^*(A)$. Falls $2 \in A^*$, ist z.B. $q^*(A) = A^* \cap \{\text{Quadratsummen}\}$ [18]. Für $g \in G(A)$ und $\sigma \in \text{Sign}(A)$ ist dann $\sigma(g) := \sigma \langle g \rangle$ wohldefiniert, also $\text{Sign}(A) \subset G^*$ und es gilt.

SATZ 5.2 (Kleinstein und Rosenberg [16, 6.4], Knebusch [18, 2.5a]). Der Raum $(\text{Sign}(A), G(A))$ ist ein Anordnungsraum.

Vornehm ausgedrückt: Man hat einen Funktor $\omega: \mathfrak{Y}_S \rightarrow \mathfrak{D}$; $A \rightarrow (\text{Sign}(A), G(A))$ und $\text{Sign} \simeq h \circ \omega$. Dabei ist $\mathfrak{Y}_S$ die Kategorie der zusammenhängenden semi-lokalen Ringe mit Eins. Um sich der zahlreichen Resultate, die Marshall für Anordnungsräume hergeleitet hat, bedienen zu können, muß man wissen, wie die Fächer in einem Raum der Form $(\text{Sign}(A), G(A))$ aussehen. Hierzu gilt der entscheidende.

SATZ 5.3 (Knebusch [18, §7]). Mit den obigen Bezeichnungen sei (Y, H) ein Fächer in $(\text{Sign}(A), G(A))$, so daß $|Y| \geq 4$. Dann gilt:

- (i) $p(\sigma) = p(\tau)$ für alle $\sigma, \tau \in Y$;
- (ii) Die von den $P(\sigma)$, $\sigma \in Y$, induzierten Anordnungen von $k(p(\sigma))$ bilden einen Fächer.

FOLGERUNG 5.4 (Knebusch [18, §9])

ist $(\text{Sign}(A)) \leq \sup\{\text{st}(\text{Sign}(k(p))) \mid p \in \text{Spek}(A)\}$.

Nach Wadsworth [26] gilt hier übrigens die Gleichheit, wenn A geometrisch ist. Letzteres ist aufgrund der Methoden dieser Arbeit offensichtlich, wenn A über einem reell abgeschlossenen Körper K definiert ist.

6. ERZEUGUNG UND CHARAKTERISIERUNG VON POSITIVBEREICHEN

Für ganzen Paragraphen sei R ein reell abgeschlossener Körper und V eine affine R -Varietät der Dimension n , so daß $V(R)$ Zariskidicht in V ist. Unser Ziel ist, Mengen der Form $S = S(a_1, \dots, a_m)$ durch eine minimale Anzahl von Elementen a_i zu beschreiben. Das Hauptresultat hierzu ist Satz 6.3, der sowohl hinsichtlich der Aussage als auch hinsichtlich des Beweises sehr technisch ist. Zum besseren Verständnis möchte ich vorweg den wesentlichen Gedanken skizzieren: Nach §3, insbesondere Satz 3.1, wird das Problem übersetzt in die Suche nach einer minimalen Erzeugung der korrespondierenden Menge $p(\tilde{S})$ in $X(V)$. Hierzu gibt es noch keinen direkten Zugang. Nehmen wir aber der Einfachheit halber an, daß V integer ist, so betrachten wir für den Funktorkörper $R(V)$ die Einbettung $X(R(V)) \subset X(V)$. Es ist $p(\tilde{S}) \cap X(R(V))$ eine Harrisonsche Subbasismenge im Raum der Anordnungen $X(R(V))$ von $R(V)$. Bekanntlich kann man eine solche durch n Elemente erzeugen, $n = \text{trdeg}(R(V)/R) = \dim V$. Nach §3 bedeutet dies nun wieder, daß S von der Form $S(a_1, \dots, a_n)$ bis auf einen Fehler T kleinerer Dimension. Sei T per Induktion in der Form $T = T(b_1, \dots, b_r)$ dargestellt. Dann gelingt es, mittels der Ungleichung von Hörmänder-Łojasiewicz, die Menge S durch Kombinationen der Form $r_1 a_1^{m_1} + \dots + s_r b_r^{n_r}$ zu erzeugen. Auf diese Weise erreichen wir eine Erzeugung von S durch $n!$ Elemente. In Wahrheit erhalten wir ein etwas besseres Ergebnis, indem wir zeigen, daß der oben erwähnte Fehler auf Codimension 2 gedrückt werden kann. Hierzu ist es erforderlich, Semi-lokalisierungen von V und deren maximal reelle Spektren zu betrachten anstelle von Funktorkörpern zu V und deren Räumen von Anordnungen. Die erforderlichen Kenntnisse zu den maximal reellen Spektren semi-lokalen Ringe wurden in §4 und §5 zusammengestellt. Nun zu den Einzelheiten!

Sei $X_1, \dots, X_n$ ein System von Koordinatenfunktionen auf V . Wir hatten schon erwähnt, daß eine offene semi-gebraische Menge $S \subset V(R)$ endliche Vereinigung von Positivbereichen ist: $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$. Jedes S_k ist also von der Form $S_k = S(a_1, \dots, a_m)$ mit $a_i \in R[V]$. Wir ergänzen diese Aussage durch

LEMMA 6.1. Seien $U_1, \dots, U_l \subset V$, U_i irreduzibel mit generischen Punkten $x_i = x(U_i)$, so daß U_i nicht im Zariskischluß von δS liegt. Dann lassen sich alle a_j so wählen, daß $a_j(x_i) \neq 0$ ist.

Beweis. Sei $0 \in E$, x_i nicht Spezialisierung von x_j für $i \neq j$ und sei etwa $S_1 = S(b_1, \dots, b_m)$ und $b_1(x_1) = 0$. Wir wollen b_1 durch ein Element a_1 ersetzen, so daß $a_1(x_1) \neq 0$, wobei aber immer noch $S = S(a_1, b_2, \dots, b_m) \cup S_2 \cup \dots \cup S_r$.

Sei $T = S(\delta_2 \cup \dots \cup \delta_k)$. Dann ist $b_1 > 0$ auf T . Sei $c_i \geq 0$ auf $V(R)$, so daß c_1 genau auf dem Zariskiabschluß von δS und den $x_j, j \neq 1$ verschwindet. Nach der Ungleichung von Hörmänder-Łojasiewicz [14], [9, §3] (im folgenden mit H-L zitiert) gibt es Elemente $h, l \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, so daß $a_1 := b_1(1 + \sum X_i^2)^h - \rho c_1^l > 0$ auf T , aber aus $b_1(x) < 0$ folgt auch $a_1(x) < 0$ und $a_1(x_1) \neq 0$. Q.E.D.

Die Positivbereiche $S \subset V(R)$ haben unter den offenen semialgebraischen Mengen die folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

(A) $S \cap (\text{Zariskiabschluß von } \delta S) = \emptyset$.

Ist ferner $U > V$, U reell und irreduzibel, so gilt

(F) Für jeden 4-elementigen Fächer $Y \subset X(R(U))$ ist $|Y \cap p(\hat{S})| \neq 3$;

hierbei identifizieren wir $X(R(U))$ mit $\{(x, P(x)) \in X(V) \mid x = x(U)\}$, $x(U)$ = generischer Punkt von U .

Die Abbildung p wurde in 3.1 definiert. Wenn zudem S von der Form $S = S(a_1, \dots, a_k)$ ist für ein bestimmtes $k \in \mathbb{N}$, so erfüllt jede reelle irreduzible Untervarietät $U \subset V$ die Bedingung

(F_k) Für jeden endlichen Fächer $Y \subset X(R(U))$ ist $2^k |Y \cap p(\hat{S})| \equiv 0 \pmod{|Y|}$.

LEMMA 6.2 Sei $U \subset V$, U und V beide reell und irreduzibel, so daß $\mathcal{O}_{U, x}$ regulär ist, $x = x(U)$ = generischer Punkt von U . Sei $S \subset V(R)$ offen, semialgebraisch und x nicht im Zariskiabschluß von δS . Erfüllt dann S die Bedingungen (F) bzw. (F_k) für V , so auch für U .

Beweis. Sei d die Kodimension von U in V . Bekanntlich gibt es einen diskreten Bewertungsring B von $R(V)$ mit Zentrum U und Restklassenkörper $R(U)$ vom Rang d . Wir nehmen an, daß ein endlicher Fächer $\bar{Y} \subset X(R(U))$ die Bedingung (F) oder (F_k) verletzt. Nach dem Satz von Baer und Krull läßt sich jedes Element $\bar{P} \in \bar{Y}$ auf 2^d Weisen zu einem Element $P \in X(R(V))$ liften, und alle diese Liftings bilden einen Fächer $Y \subset X(R(V))$ [2], also $|Y| = 2^d |\bar{Y}|$. Ist ferner $P \in Y$ eine Lifting von $\bar{P} \in \bar{Y}$, so liegt $\bar{P}$ im Abschluß von P , wenn man P und $\bar{P}$ als Elemente von $X(V)$ auffaßt [3, 2.13]. Ist nun (F) für U verletzt, so ist $|Y| = 4 \cdot 2^d$ und $|Y \cap p(\hat{S})| = 3 \cdot 2^d$ (da U nicht im Zariskiabschluß von δS liegt), was unmöglich ist, denn nach 4.1 ist $p(\hat{S}) \cap X(R(V))$ ein Teilraum von $X(R(V))$. Ist (F_k) für U verletzt, so ist $2^k |Y \cap p(\hat{S})| \not\equiv 0 \pmod{|Y|}$ also auch $2^k |Y \cap p(\hat{S})| = 2^k \cdot 2^d |Y \cap p(\hat{S})| \not\equiv 0 \pmod{2^d |Y|}$. Widerspruch.

SATZ 6.3 Sei $S \subset V(R)$ eine offene semialgebraische Menge.

(a) Wenn S die Bedingung (A) und für jede reelle irreduzible Untervarietät $U \subset V$ die Bedingung (F) erfüllt, so ist S ein Positivbereich.

(b) Wenn außerdem für alle $m \leq \dim V$ ein $k(m) \in \mathbb{N}$ gegeben ist, so daß $(F_{k(m)})$ erfüllt ist für jede reelle irreduzible Untervarietät U mit $\dim U \leq m$, so gibt es eine Folge $1 < i_1 < \dots < i_r = \dim V$, so daß $i_{j+1} - i_j \geq 2$ und S von der Form $S = S(b_1, \dots, b_k)$ ist mit $k \leq \prod_{j=1}^r k(i_j)$. Dabei läßt sich erreichen, daß für alle $x \in V(R) \setminus (S \cup \delta S)$ mindestens ein $b_j(x) < 0$ ist für $j \in \{1, \dots, k\}$.

Beweis. Seien $V_1, \dots, V_d$ die irreduziblen Komponenten von V . Auf der Menge $\{V_i \mid i = 1, \dots, d\}$ bilden wir die Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von der Relation $V_i(R) \cap V_j(R) \not\subset \delta S^2$. Wir vereinigen die Äquivalenzklassen zu Untervarietäten W_i von V . Dann ist $V = W_1 \cup \dots \cup W_m$ und $W_i \cap W_j \subset \delta S^2$. Wir können annehmen, daß $V = W_1$ ist für ein i , denn wenn wir die Behauptung unter dieser Voraussetzung zeigen können, setzen wir $S_1 = S \cap W_1$ und $S_1 = S(b_1, \dots, b_{k_1})$. Sei dann $c_i \in R[V]$ so, daß $c_i \geq 0$ auf $V(R)$ und $c_i = 0$ genau auf allen W_j für $j \neq i$. Für $b_j := \sum_{i=1}^d b_j c_i$ ist dann $S = S(b_1, \dots, b_k)$.

Der Beweis wird jetzt per Induktion nach $n = \dim V$ geführt.

dim $V = 0$: $V(R)$ ist ein Punkt und daher S von der Form $S = S(b)$.

dim $V = n$: Die generischen Punkte der reellen Komponenten einer Untervarietät W von V , die nicht in δS^2 liegen, nennen wir besondere Punkte von W . Ihre Gesamtheit sei mit $W(\text{bes})$ bezeichnet. In der endlichen Menge

$$M = V(\text{bes}) \cup \text{sing } V(\text{bes}) \cup \text{sing } \text{sing } W(\text{bes}) \cup \dots$$

seien $x_1, \dots, x_l$ diejenigen Elemente, die von keinem anderen Punkt aus M spezialisiert werden. Jetzt bilden wir den zusammenhängenden semlokalen Ring A , der aus $R[V]$ durch Lokalisieren nach $x_1, \dots, x_l$ entsteht, gemäß 5.1 identifizieren wir die topologischen Räume $X(A)$ und $\text{Sign}(A)$ und nach §4 haben wir die Isomorphismen

$$(X(A), B(A)) \xrightarrow{p} (\hat{V}(x_1, \dots, x_l), \hat{\gamma}(x_1, \dots, x_l))$$

restingierter topologischer Räume. Nach 6.1 ist nun $p(\hat{S} \cap \hat{V}(x_1, \dots, x_l))$ offen und abgeschlossen in $X(A)$, also auch in $\text{Sign}(A)$. Nach §5 ist $X(A)$ ein Anordnungsraum bezüglich $G(A) = A^*/q^*(A)$. Mit 4.1 und 5.3 folgt, daß $p(\hat{S} \cap \hat{V}(x_1, \dots, x_l)) = B(q_1, \dots, q_m)$ ist für geeignete Elemente $q_1, \dots, q_m \in G(A)$. Wenn zudem (b) erfüllt ist, kann $m = k(n)$ gewählt werden. Indem wir mit Quadraten von Nennern multiplizieren, können wir die q_i durch Elemente

$d_i \in R[V]$ repräsentieren. Jetzt haben wir schon erreicht, daß $S = S(d_1, \dots, d_m)$. Sei $T = (S \cup S(d_1, \dots, d_m))(S \cap S(d_1, \dots, d_m))$. Nach 3.2 und 3.3 liegt keine Verallgemeinerung eines Punktes x_i im Zariskiabschluß von T . Wir nehmen nun ohne Einschränkung an, daß alle Funktionen d_i auf T und auch auf δS verschwinden, und zeigen die

1. ZWISCHENBEHAUPTUNG. Man kann erreichen, daß die Codimension von T in $V \geq 2$ ist.

Sei nämlich D eine irreduzible reelle Komponente der Codimension 1 im Zariskiabschluß von T . Da der generische Punkt von D keinen Punkt x_i verallgemeinert, trifft D den regulären Ort, d.h. D ist ein reeller Primdivisor in genau einer Komponente, etwa V_1 . D liegt nicht im Zariskiabschluß von δS und alle d_i haben gerade Ordnung bezüglich D , denn sonst wäre mindestens ein d_i negativ auf einer offenen n -dimensionalen Teilmenge von S . Für $i = 1, \dots, m$ liegen also die inneren Randpunkte (siehe §2) von $S(d_i)$ Zariskidicht in D , die Grenzpunkte von $S(d_i)$ aber nicht.

Für jedes d_i betrachte nun die Menge $S_i := S(d_i)$. S_i erfüllt (F_1) bezüglich V_1 also nach Lemma 6.2 auch bezüglich D . Folglich ist $S \cap D = S(c_i)$ für ein $c_i \in R[D]$ bis auf eine Menge kleinerer Dimension, und $S(c_i)$ ist Zariskidicht in D . Wir repräsentieren c_i als Element von $R[V_1]$ so daß c_i auf den restlichen Komponenten von T verschwindet.

Sei jetzt $T_i = (S \setminus c_i) \cup S(d_i) \cup (S(c_i) \cap (S \setminus d_i))$. Wir können ferner annehmen, daß c_i auf T_i überall dort verschwindet, wo auch d_i verschwindet, während das Vorzeichen von c_i auf $D(R)$ bis auf eine Menge kleinerer Dimension unverändert bleibt. Sei $d'_i = d_i(1 + \sum X_j^{p_i} + \rho_i c_i)$ für hinreichend große $h, l \in \mathbb{N}$, l ungerade und hinreichend kleines $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. Nach H-L (Ungleichung von Hörmander-Lojasiewicz), angewandt für c_i und d_i auf der Menge T_i , ist dann $d'_i > 0$ bzw. < 0 wo dies für d_i zutrifft. Außerdem ist d'_i auf $\delta S(d_i) \cap D > 0$ und auf $\beta S(d_i) \cap D < 0$ bis auf eine Teilmenge von D von kleinerer Dimension (Bezeichnungen wie in §2). Außerhalb von D hat d'_i dieselben reellen Nullstellen wie d_i .

Nun ist $S(d'_1, \dots, d'_m) \subset S(d_1, \dots, d_m)$ und $S(d'_1, \dots, d'_m) \subset S$ bis auf eine Teilmenge E von D mit $\dim E < \dim D$. Indem wir nun d_i durch d'_i ersetzen, können wir successive die reellen Komponenten der Codimension 1 des Zariskiabschlusses von T beseitigen. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

2. ZWISCHENBEHAUPTUNG. Sei $N = V(d_1, \dots, d_m)$ das gemeinsame Nullstellengebild der d_i . Man kann erreichen, daß $N(R) = \bar{\delta S}^2(R) \cup W(R)$ mit $\text{codim } W \geq 2$. Dabei gibt es für alle $x \in V(R)$, $x \notin S \cup N(R)$, mindestens ein i mit $d_i(x) < 0$.

Für jedes i wählen wir $q_i \in R[V]$, $q_i \geq 0$, so daß q_i in $V(R)$ genau auf dem Zariskiabschluß von $\delta S \cup V(d_i) \cap S$ verschwindet. Nach der 1. Zwischenbehauptung ist $\text{codim}(V(d_i) \cap S) \geq 2$. Wir ersetzen d_i durch $d_i(1 + \sum X_j^{p_i} - \rho q_i)$ mit geeigneten Elementen $h, l \in \mathbb{N}$ und $\rho \in \mathbb{R}$. Die Behauptung folgt jetzt wieder mit H-L, angewandt für die Elemente q_i und d_i auf der Menge $\bar{S}$.

Schluß des Beweises. Sei W wie in der 2. Zwischenbehauptung, also insbesondere $\dim W \leq n - 2$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $S \cap W = S(a_1, \dots, a_s)$ für geeignete Elemente $a_i \in R[W]$, und falls (b) erfüllt ist, kann $s \leq \Pi_{j=1}^{l-1} k(i_j)$, $i_{j-1} \leq n - 2$, gewählt werden. Wir repräsentieren die a_j als Elemente von $R[V]$, wobei alle a_j auf δS verschwinden mögen. Nach H-L gibt es Elemente $h, l_0 \in \mathbb{N}$ und $\rho_0 \in \mathbb{R}$, $\rho_0 > 0$, so daß für alle $l \geq l_0$, $0 < \rho \leq \rho_0$ das Element

$$b_{ij}(l, \rho) := d_i(1 + \sum X_j^{p_i})^{p_i} + \rho a_j^l > 0 \text{ ist auf ganz } S.$$

Wir wählen h so groß, daß alle Funktionen $a_j/l + \sum X_j^{p_i}$ auf ganz $V(R)$ beschränkt sind.) Zu jedem Punkt $x \in V(R) \setminus (S \cup \bar{\delta S}^2)$ gibt es auch ein Paar i, j und Elemente $0 < \rho \leq \rho_0$, $l \geq l_0$, so daß $b_{ij}(l, \rho)(x) < 0$ ist. Es kommt darauf an ρ und l so zu finden, daß dies für alle x gleichzeitig erfüllt ist. Dazu betrachten wir die Menge $\hat{S}_1$ mit $S_1 = V(R) \setminus (S \cup W(R) \cup \bar{\delta S}^2)$ und zeigen: Zu jedem Ultrafilter $F \in \hat{S}_1$ gibt es eine Umgebung $U(F)$ in $\hat{S}_1$, ein Paar i, j sowie ein $\rho_i \in R$, $\rho_i > 0$ und ein $l_i \in \mathbb{N}$, so daß für alle ρ, l mit $0 < \rho \leq \rho_i$ und $l \geq l_i$, l ungerade, gilt: $b_{ij}(l, \rho) < 0$ auf $U(F)$. Da $\hat{S}_1$ kompakt ist, wäre damit die Behauptung bewiesen.

Zum Beweis hierfür unterscheiden wir drei Arten von Ultrafiltern F .

- (1) F berührt keine Untervarietät im Zariskiabschluß von δS oder in W . (F berührt eine Untervarietät U bedeutet, daß $T_1 \cap U$ Zariskidicht in U ist für alle abgeschlossenen Mengen $T_1 \in F$ (vergl. [3, 4]).) Dann gibt es nach der 2. Zwischenbehauptung eine offene Menge $T_1 \in F$, so daß für jedes $x \in T_1$ mindestens ein $d_i(x) < 0$ ist. Da F ein Ultrafilter ist, können wir annehmen, daß mindestens ein $d_i < 0$ ist auf ganz T_1 . Setze nun $U(F) = \hat{T}_1$. Nach H-L finden wir dann sogar für alle a_j die gesuchten Elemente ρ_i und l_i .
- (2) F berührt nur Untervarietäten des Zariskiabschlusses von δS . Wie oben finden wir eine offene Menge $T_1 \in F$ und ein d_i , das auf $T_1 < 0$ ist aber in $\bar{T}_1$ ist $d_i = 0$ genau auf den Punkten des Zariskiabschlusses von δS . Dort sind aber auch alle $a_j = 0$. Wir können also wieder $U(F) = \hat{T}_1$ setzen und finden wie oben zu i und jedem j die gesuchten Elemente ρ_i und l_i .
- (3) F berührt eine Untervarietät W_i von W , die nicht im Zariskiabschluß von δS liegt.

W_1 sei bereits die eindeutig bestimmte größte Untervarietät mit dieser Eigenschaft [3]. Sei $T_1 \in F$ offen. $\bar{T}_1 \cap W$ wird überdeckt von den Mengen $S(-a_j)$ bis auf eine Menge kleinerer Dimension. Sei wieder ohne Einschränkung $d_1 < 0$ auf T_1 . Es liegt dann mindestens eine Menge $T_1 \cap S(-a_j)$ in F . Für ein i ist also $d_i + a_j < 0$ auf $T_1 \cap S(-a_j)$ und hieran ändert sich nichts, wenn wir d_i durch $d_i(1 + \sum X_j^2)^{k_i}$ und a_j durch ρd_j ersetzen für $\rho > 0$ und l ungerade. Setze also $U(F) = T_1 \cap S(-a_j)$, $\rho = 1$ und $l = 1$. Q.E.D.

FOLGERUNG 6.4. Sei $S \subset V(R)$ ein Positivbereich. Dann ist S von der Form $S = S(b_1, \dots, b_m)$, $b_i \in R[V]$ und $m \leq \prod_{i=1}^{n+1} (2i-1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$ ungerade bzw. $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ wenn n gerade.

Beweis. Für einen Funktionenkörper $F > R$ vom Transzendenzgrad d ist $\text{st}(\text{Sign}(F)) = d[1]$. Für eine Untervarietät $U < V$ der Dimension d ist daher (F_U) erfüllt, woraus mit 6.3(b) die Behauptung folgt.

Für $n \leq 3$ ist also $m \leq n$ und wegen $\text{st}(\text{Sign}(F)) = \text{trdg}(F)$ sogar $m = n$. Es ist mir nicht gelungen, dieses für beliebiges n zu zeigen oder durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

FOLGERUNG 6.5. Sei $n = 1$. Dann ist jede offene semialgebraische Menge $S \subset V(R)$ von der Form $S = S(b)$ für ein $b \in R[V]$.

Dies ist sofort klar, da S bezüglich $V(F_1)$ und somit (F) erfüllt. Offensichtlich gilt auch (A). Dieses Ergebnis findet man zum Teil schon bei Wit [27].

FOLGERUNG 6.6. Sei $V(R)$ glatt (das soll insbesondere implizieren, daß die verschiedenen Komponenten von V keine reellen Schnittpunkte haben). Die offene semialgebraische Menge $S \subset V(R)$ erfülle (A). Wenn S die Bedingung (F) bezüglich jeder Komponente von V erfüllt, so ist S ein Positivbereich. Wenn S die Bedingung (F_k) bezüglich jeder Komponente von V erfüllt, dann ist S von der Form $S = S(b_1, \dots, b_m)$ mit $m \leq k^{1/n+1}$.

Dies folgt direkt aus 6.2 und 6.3.

FOLGERUNG 6.7. Sei $V(R)$ glatt und $S \subset V(R)$ ein semipositivbereich. Genau dann ist S ein Positivbereich, wenn (A) erfüllt ist für S .

Dies folgt direkt aus 6.6. Man beachte, daß (A) nicht automatisch erfüllt ist für S .

Zum Schluß noch ein Resultat, für das wir ausnahmsweise voraussetzen müssen, daß $R = \mathbb{R}$ ist.

FOLGERUNG 6.8. Sei $R = \mathbb{R}$ und $V(R)$ vollständig. Sei $S \subset V(R)$ semialgebraisch und offen. Wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in V(R)$ eine offene Menge $0 \subset V(R)$ gibt mit $x, y \in 0$, sowie einen Positivbereich S' , so daß $S \cap 0 = S' \cap 0$, so ist auch S ein Positivbereich. Wenn zudem S' jeweils von der Form $S(b)$ ist, so ist auch S von der Form $S(b)$.

Für die Vollständigkeit von $V(R)$ benutzen wir das folgende

BEWERTUNGSKRITERIUM [7]. Ist $U < V$ irreduzibel und $B \supset R$ ein reeller Bewertungsring von $R(U)$, so besitzt B ein Zentrum in U .

Dies ist gleichwertig damit, daß $V(R) \subset R^n$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist für $R = \mathbb{R}$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt zunächst (A). Sei nun $U < V$ eine reelle Untervarietät und $Y \subset X(R(U))$ ein Fächer. Dann gibt es einen Bewertungsring B , mit dem alle Anordnungen $P_i \in Y$ verträglich sind, und diese induzierten höchstens zwei verschiedene Anordnungen $\bar{P}_i$ auf $\bar{B}$ [2]. Da R archimedisch geordnet ist, ist B trivial auf R . B besitzt also ein Zentrum $W < U$ und in $W(R)$ gibt es Punkte x, y , so daß die zu den P_i gehörigen Ultrafilter (P_i) in $V(R)$ gegen x oder y konvergieren [3]. Nach Voraussetzung ist daher (F) bzw. (F_1) erfüllt für U , und die Behauptung folgt aus 6.3.

Aus der zweiten Aussage des Satzes gewinnt man übrigens noch einmal die Monomorphie $C(V(R)) \hookrightarrow H^1(V(R), \mathbb{Z}_2)$ [4].

Ein Gegenbeispiel zum Satz für den Fall, daß R nicht archimedisch geordnet ist, habe ich vor einiger Zeit mündlich verbreitet. Es wurde von Schüttling [24] und Schwartz [25] verfeinert, so daß S sogar endliche Vereinigung von glatten Zusammenhangskomponenten von $V(R)$ ist.

LITERATUR

1. Bröcker, L.: 'Zur Theorie der quadratischen Formen über formal reellen Körpern'. *Math. Ann.* 210 (1974), 233–256.
2. Bröcker, L.: 'Characterization of Fans and Hereditarily Pythagorean Fields'. *Math. Z.* 152 (1976), 149–163.
3. Bröcker, L.: 'Real Spectra and Distributions of Signatures'. *Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques: Proceedings, Rennes 1981*. Springer, Lecture Notes 959, pp. 249–272.
4. Bröcker, L.: 'Reelle Divisoren'. *Arch. Math.* 35 (1980), 140–143.
5. Brumfiel, G.: *Partially Ordered Rings and Semialgebraic Geometry*. Cambridge Univ. Press, 1979.
6. Coste, M.: 'Ensembles semi-algébriques et fonctions de Nash'. *Seminaire de géométrie réelle de Paris 7*, Fasc. 18 (1981).
7. Coste, M. und Coste-Roy, M. F.: 'La topologie du spectre réel'. *Ordered Fields and Real Algebraic Geometry: AMS, Proceedings 1981, Contemporary Mathematics*, Vol. 8, pp. 27–61.
8. Coste-Roy, M. F.: 'Spectre réel d'un anneau et topos étale réel'. Thèse, Université Paris Nord, 1980.
9. Delfs, H.: 'Kohomologie affiner semialgebraischer Räume'. Dissertation, Regensburg, 1980.
10. Delfs, H. und Knebusch, M.: 'Semialgebraic Topology over a Real Closed Field. II: Basic Theory of Semialgebraic Sets'. *Math. Z.* 178 (1981), 175–213.
11. Delfs, H. und Knebusch, M.: 'On the Homology of Algebraic Varieties over Real Closed Fields'. *J. reine angew. Math.* 335 (1982), 122–163.
12. Delzell, C.: 'A Constructive, Continuous Solution to Hilberts 17th Problem'. Thesis, Stanford Univ., 1980.

13. Dress, A.: 'The Weak Local-Global Principle in Algebraic K -Theory', *Commun. Algebra* 3 (1975), 615–661.
14. Hörmander, L.: 'On the Division of Distributions by Polynomials', *Ark. Mat.* 3 (1958), 555–568.
15. Kanazaki, T. und Kitamura, K.: 'On Prime Ideals of a Witt Ring over a Local Ring', *Osaka J. Math.* 9 (1972), 225–229.
16. Kleinstein, J. und Rosenberg, A.: 'Succinct and Representational Witt Rings', *Pac. J. Math.* 86 (1980), 99–137.
17. Knebusch, M.: 'Real Closures of Commutative Rings I', *J. Reine Angew. Math.* 274/275 (1975) 61–89.
18. Knebusch, M.: 'On the Local Theory of Signatures and Reduced Quadratic Forms', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 51 (1981), 149–195.
19. Mahe, L.: 'Signatures et composantes connexes', *Math. Ann.* 260 (1982), 191–210.
20. Marshall, M.: 'Quotients and Inverse Limits of Spaces of Orderings', *Can. J. Math.* 31 (1979), 604–616.
21. Marshall, M.: 'The Witt Ring of a Space of Orderings', *Trans. Amer. Math. Soc.* 258 (1980), 505–521.
22. Marshall, M.: 'Spaces of Orderings', *Can. J. Math.* 32 (1980), 603–627.
23. Pfister, A.: 'Quadratische Formen in beliebigen Körpern', *Invent. Math.* 1 (1966), 116–132.
24. Schilling, H. W.: 'Real Points and Real Places', *Ordered Fields and Real Algebraic Geometry: AMS Proceedings* 1981, *Contemporary Mathematics*, Vol. 8, pp. 289–297.
25. Schwartz, N.: 'Der Raum der Zusammenhangskomponenten einer reellen Varietät', *Geom. Dedicata* 13 (1983), 361–396.
26. Wadsworth, A.: 'Stability Index of a Geometric Semilocal Ring', *Handwritten Notes*, 1981.
27. Witt, E.: 'Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate', *Schiefer Körper über reellem Funktionenkörper*, *J. reine Angew. Math.* 171 (1934), 4–11.

Anschrift des Verfassers:

Ludwig Bröcker,
Mathematisches Institut,
Einsteinstraße 62,
D-4400 Münster,
F.R. Germany

(Eingegangen am 9. Januar 1984; in revidierter Form am 20. Februar 1984)

THE AUTOMORPHISM GROUP OF LOCALLY COMPACT CONNECTED TOPOLOGICAL BENZ PLANES

1. INTRODUCTION AND RESULTS

Let $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{P}, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{\Pi})$ be a classical Benz plane, i.e. the geometry of nontrivial plane sections of the 2-dimensional sphere (Möbius plane), of an elliptic cylinder in the real or complex 3-dimensional affine space (Laguerre plane) or of a one-sheeted hyperboloid in the real or complex 3-dimensional projective space (Minkowski plane); see [2, Chap. I]. The point set $\tilde{P}$, the set $\tilde{\mathcal{K}}$ of circles and the set $\tilde{\Pi}$ of parallel classes carry natural topologies induced from the surrounding 3-space so that $\tilde{\mathcal{P}}$ becomes a topological Benz plane. It is well known that all (continuous) automorphisms of $\tilde{\mathcal{P}}$ form a topological group which even is a Lie group: The connected component of the identity is isomorphic to $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (Möbius plane), to $(\mathbb{R}^+ \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}, 1)) \ltimes \mathbb{R}^3$ resp. $(\mathbb{C}^* \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})) \ltimes \mathbb{C}^3$ (real resp. complex Laguerre plane), or to $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ resp. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (real resp. complex Minkowski plane) and has dimension 6, 7, 14, 6, 12, respectively.

We now consider locally compact connected topological Benz planes $\mathcal{P} = (P, \mathcal{K}, \Pi)$ in general and their automorphism groups, i.e. the group of all homeomorphisms of the point space P which preserve parallelity and concircularity of points. If one wishes to study topological Benz planes by their automorphism groups following a similar program as it has been carried through for topological projective planes, see [10] and [11], one of the first steps is as follows:

THEOREM. *Let $\mathcal{P} = (P, \mathcal{K}, \Pi)$ be a locally compact connected topological Benz plane and let $\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ be the automorphism group of $\mathcal{P}$ endowed with the compact-open topology. Then Γ is a locally compact topological group with a countable basis, acting as a topological transformation group on P . If in addition the point space P is of finite dimension then Γ is a Lie group of dimension at most 6 (Möbius plane), $\frac{7}{2} \dim P$ (Laguerre plane), 3 $\dim P$ (Minkowski plane), respectively.*

In the finite-dimensional case this result is already known: Strambach [14] resp. Schenkel [12] proved it for 2-dimensional Möbius resp. Minkowski planes. In his dissertation Förtsch [4] proved the theorem in the finite-dimensional case for all three types of Benz planes. However, in his proof