

Das Wills'sche Funktional

Von

H. Hadwiger, Bern

(Eingegangen am 13. September 1974)

Abstract

On Wills' Functional. The functional $W(A)$, defined by J. M. Wills for all convex bodies A in the n -dimensional Euclidean space, is a linear expression $W(A) = \sum_0^n \binom{n}{v} \frac{1}{\omega_v} W_v(A)$, where W_v is the " v th Quermaßintegral" and ω_v stands for the volume of the v -dimensional unit ball. In the present note several remarkable properties of $W(A)$ are explained. Especially, we have Wills's conjecture $G(A) \leq W(A)$, where $G(A)$ is the number of points of the n -dimensional unit lattice contained in A .

1. Definition und Integraldarstellung

Sei $n \in \mathbb{N}$, E^n der n -dimensionale euklidische Raum mit dem Ursprung $o \in E^n$, K_n die Klasse der Eikörper, also der nichtleeren kompakten und konvexen Punktmenge des E^n .

$W_v = W_v(A)$ ($v=0, \dots, n$) bezeichne das v -te Minkowskische Quermaßintegral des Eikörpers $A \in K_n$ und $\omega_v = (\sqrt{\pi})^v / \Gamma(1 + v/2)$, $v > -2$, das Volumen der v -dimensionalen Einheitskugel. Mit dem Ansatz

$$W(A) = \sum_0^n \binom{n}{v} \frac{1}{\omega_v} W_v(A) \quad (1.1)$$

ist ein von J. M. WILLS entdecktes Funktional gegeben, das sich durch zahlreiche höchst bemerkenswerte Eigenschaften auszeichnet. In Publikationen erscheint der Ausdruck zuerst in [7], Seite 60¹. Es ist der Zweck der vorliegenden Note, einige mitteilenswerte Tatbestände zu erläutern, und auch die Bedeutung dieses Eikörperfunktional innerhalb der Geometrie der Zahlen aufzuzeigen.

¹ Diese Linearform hat der Verfasser erstmals in einem Brief von J. M. Wills vom 21. 10. 1971 angetroffen.

Für einen Punkt $p \in E^n$ und einen Eikörper $A \in K_n$ bedeute $r = r(p, A)$ den Abstand des Punktes p von A . Bezeichnet dp die Punktdichte, so gilt die Integralformel

$$W(A) = \int e^{-\pi r^2} dp, \quad (1.2)$$

wobei sich die Integration über den gesamten Raum E^n zu erstrecken hat.

Diese Darstellung wird von J. Bokowski [1], Seite 15 erläutert und stammt vom Verfasser².

Ist $\lambda > 0$, so ergibt sich ausgehend von (1.2) leicht die Formel

$$W(\lambda A) = \lambda^n \int e^{-\pi \lambda^2 r^2} dp, \quad (1.3)$$

wo λA den durch Dilatation bezüglich o aus A hervorgehenden homothetischen Eikörper anzeigt. — Ist $A \varrho$ für $\varrho \geq 0$ der äußere Parallelkörper von A der Spanne ϱ , so läßt sich mit $V(A \varrho) = \int dp$, erstreckt über den Bereich $r(p, A) \leq \varrho$, durch Umrechnung von (1.2) die Darstellung

$$W(A) = 2\pi \int_0^\infty V(A \varrho) \varrho e^{-\pi \varrho^2} d\varrho \quad (1.4)$$

gewinnen, die zeigt, wie das Wills'sche Funktional W durch Integration über das Parallelvolumen gewonnen werden kann. Selbstverständlich läßt sich dies mit Hilfe der Steiner—Minkowskischen Formel für $V(A \varrho)$ direkt verifizieren. Mit Rücksicht auf gewisse weitergreifende Entwicklungsmöglichkeiten wollen wir einen anderen Weg verfolgen, der zu unserer Integraldarstellung (1.2) führt.

Sei $f(r)$ in $0 \leq r < \infty$ definiert, dort nichtnegativ und monoton fallend und es gelte für $r \rightarrow \infty$ die asymptotische Beziehung $f(r) = o(r^{-n-1})$. Es existiert dann das Integral

$$\varphi(A) = \int f(r(p, A)) dp \quad (1.5)$$

für alle $A \in K_n$. Da $r(p, A)$ eine simultane Bewegungsinvariante ist, fällt das Eikörperfunktional φ bewegungsinvariant aus, so daß

$$A, B \in K_n, A \simeq B \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B) \quad (1.6)$$

gilt. Wegen der Monotonie von f muß offensichtlich φ monoton sein, derart, daß die Aussage

$$A, B \in K_n, A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B) \quad (1.7)$$

² Erstmals in einem Brief des Verfassers an R. Schneider vom 5. 6. 1972 erwähnt.

bedeute
 dp die

(1.2)

zu er-

läutert

Formel

(1.3)

enden

äußere

$= \int dp$,

g von

(1.4)

Inter-

Selbst-

ischen

ewisse

ande-

führt.

mono-

lehung

(1.5)

te ist,

ß

(1.6)

monoton

(1.7)

6. 1972

zutreffend ist. Für $p \in E^n$ und $C \in K_n$ bezeichne $p' = p'(p, C) = p|C$ den Fußpunkt des Lotes von p auf C .

Nun sei $A, B, A \cup B \in K_n$. Wir unterscheiden die zwei Fälle (a) $p'(p, A \cup B) \in A$ und (b) $p'(p, A \cup B) \in B$. Es gelten dann die Aussagen

$$(a) \quad r(p, A \cup B) = r(p, A); \quad r(p, A \cap B) = r(p, B)$$

$$(b) \quad r(p, A \cup B) = r(p, B); \quad r(p, A \cap B) = r(p, A).$$

Dies läßt sich mit einfachen konvexgeometrischen Überlegungen bestätigen. Die Auswirkung dieser Austauschbeziehung auf das mit (1.5) dargestellte Eikörperfunktional ist die Additivität von φ , so daß die Sachlage

$$A, B, A \cup B \in K_n \Rightarrow \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B) \quad (1.8)$$

besteht. Nach einem Satz aus der axiomatischen Theorie der Eikörperfunktionale, vgl. [3], Seite 222, existieren Konstante $c_\nu \geq 0$ ($\nu = 0, \dots, n$) derart, daß über K_n die Identität

$$\varphi(A) = \sum_0^n c_\nu W_\nu(A) \quad (1.9)$$

gültig ist. Um die Koeffizienten c_ν zu ermitteln, setzt man anstelle von A eine Kugel K_ϱ vom Radius ϱ . Nach (1.5) ergibt sich zunächst

$$\varphi(K_\varrho) = f(0) \omega_n \varrho^n + n \omega_n \int_0^\infty (\varrho + r)^{n-1} f(r) dr,$$

und mit leichter Umrechnung

$$\varphi(K_\varrho) = f(0) \omega_n \varrho^n + \omega_n \sum_1^n \binom{n}{\nu} \nu M_{\nu-1}(f) \varrho^{n-\nu},$$

falls als Hilfsgröße das Moment

$$M_\mu(f) = \int_0^\infty f(r) r^\mu dr \quad (\mu = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.10)$$

eingeführt wird.

Andererseits ist nach (1.9) mit $W_\nu(K_\varrho) = \omega_n \varrho^{n-\nu}$

$$\varphi(K_\varrho) = \omega_n \sum_0^n c_\nu \varrho^{n-\nu},$$

so daß $c_0 = f(0)$, $c_v = \binom{n}{v} v M_{v-1}(f)$ ($v = 1, \dots, n$) abgelesen werden kann. Es ergibt sich also

$$\varphi(A) = f(0) V(A) + \sum_{v=1}^n \binom{n}{v} v M_{v-1}(f) W_v(A). \quad (1.11)$$

Wir wählen jetzt die in unserem Sinn zulässige Funktion

$$f(r) = e^{-\pi r^2}, \quad (1.12)$$

und erzielen so mit $f(0) = 1$, $M_\mu(f) = 1/2\pi\omega_{\mu-1}$ nach Einsatz in (1.11) aufgrund leichter Umrechnung mit $v\omega_v = 2\pi\omega_{v-2}$ die Darstellung

$$\varphi(A) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \frac{1}{\omega_v} W_v(A). \quad (1.13)$$

So ist mit der Feststellung $\varphi(A) = W(A)$ und mit Rücksicht auf (1.5) die Integraldarstellung (1.2) nachgewiesen.

Wir schließen diesen Abschnitt mit der weiteren sich aus (1.4) durch partielle Integration ergebenden Integraldarstellung

$$W(A) = V(A) + \int_0^\infty F(A_\varrho) e^{-\pi\varrho^2} d\varrho \quad (1.14)$$

ab, wobei $F(A_\varrho)$ die Oberfläche des Parallelkörpers A_ϱ von A bezeichnet. Diese Formel gestattet die instruktive Lesung

$$W(A) = V(A) + \frac{1}{2} F^*(A), \quad (1.15)$$

wo $F^*(A)$ als gewogenes Integralmittel der Parallelflächen von A interpretierbar ist.

2. Eigenschaften

Sei $E^i \subset E^n$ ($0 \leq i \leq n$) ein i -dimensionaler Teilraum von E^n , $A \in K_n$ und $A \subset E^i$. Wir können A als Körper der Klasse K'_i auffassen und ihm das sich auf seinen Trägerraum E^i bezogene Funktional $W'(A)$ zuweisen. Im Ansatz gehen dann die sich auf den E^i beziehenden Quermaßintegrale $W'_\mu(A)$ ($\mu = 0, \dots, i$) nach Definition (1.1) ein. Eine bemerkenswerte, erstmals von J. M. Wills erwähnte Eigenschaft der Linearform W ist durch

$$W(A) = W'(A) \quad (2.1)$$

orden

gegeben, welche darlegt, daß W *dimensionsinvariant* ist, so daß der Wert nicht von der Dimension eines möglichen Einbettungsraumes abhängt. Dies hat natürlich für die Geometrie dieses Eikörperfunktionalen bedeutsame und angenehme Konsequenzen.

1.11)

Offenbar genügt es, unsere Aussage (2.1) lediglich für $i = n - 1$ nachzuweisen. Sei $p \in E^n$, $A \subset E^{n-1}$, $p' = p|E^{n-1}$ der Lotpunkt von p in E^{n-1} . Ist $h = r(p, p')$, so gilt $r(p, A)^2 = r(p', A)^2 + h^2$. Mit $dp = dp' dh$ resultiert mit der Integraldarstellung (1.2)

1.12)

$$W(A) = \int e^{-\pi r(p, A)^2} dp = \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{-\pi r(p', A)^2 - \pi h^2} dp' dh,$$

z in

Dar-

wobei sich die Integration nach p' hin über die Ebene E^{n-1} zu erstrecken hat. Mit der Bemerkung

1.13)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi h^2} dh = 1$$

auf

folgt jetzt $W(A) = W'(A)$, wzzw.

1.4)

Selbstverständlich ist W (nichtnegativ) *definit*. Als spezielle Funktion φ ist W nach (1.6) und (1.7) auch *bewegungsinvariant* und *monoton*.

1.14)

Mit (1.8) ist W ferner *additiv* und es gilt also die wichtige Additionsformel

A

$$A, B, A \cup B \in K_n \Rightarrow W(A \cup B) + W(A \cap B) = W(A) + W(B). \quad (2.2)$$

15)

von

Seien weiter E^i und E^{n-i} zwei total orthogonale und komplementäre Teilräume von E^n ($0 \leq i \leq n$) und es gelte $A, B \in K_n$, $A \subset E^i$, $B \subset E^{n-i}$. Wird durch das Zeichen $+$ die Minkowskische Addition angezeigt, so gilt

$$W(A + B) = W(A) W(B), \quad (2.3)$$

wonach also W in diesem Sinne *multiplikativ* ist.

E^n ,

af-

ak-

en

fi-

lls

In der Tat: Sei $p \in E^n$ und bedeuten $p' = p|E^i$ und $p'' = p|E^{n-i}$ die Lotpunkte von p auf die Teilräume E^i und E^{n-i} , ferner $r(p', A)$ und $r(p'', B)$ die Abstände der Punkte p' und p'' von A und B , so gilt die Beziehung

$$r(p, A + B)^2 = r(p', A)^2 + r(p'', B)^2.$$

Ausgehend vom Ansatz

1)

$$W(A + B) = \int e^{-\pi r(p, A+B)^2} dp$$

resultiert mit $dp = dp' dp''$ und der oben stehenden Additivität

$$W(A + B) = \int_{E^i} e^{-\pi r(p', A)^2} dp' \int_{E^{n-i}} e^{-\pi r(p'', B)^2} dp'',$$

und somit die Behauptung (2.3), wobei noch die Dimensionsinvarianz von W zu berücksichtigen ist.

Nachfolgend begründen wir noch eine Ungleichung und erwähnen die für das Wills'sche Funktional gültige Zylinderformel. Es sei $A \in K_n$ und u bedeute einen in o angreifenden Einheitsvektor, $|u| = 1$, der eine Richtung in E^n anzeigt. Wenn wir wie üblich Punkte und ihre in o angreifenden Ortsvektoren mit dem gleichen Zeichen anschreiben, so ist mit dem Ansatz

$$H_t := \{x \in E^n; \langle x, u \rangle = t, -\infty < t < \infty\}$$

eine einparametrische Schar von $(n-1)$ -dimensionalen Ebenen gegeben, die auf u orthogonal stehen. Es sollen nun H_0 und H_h die beiden parallelen Stützebenen von A bezeichnen. Es gilt sodann die Ungleichung

$$W(A) \geq \frac{1}{2} [W(A \cap H_0) + W(A \cap H_h)] + \int_0^h W(A \cap H_t) dt, \quad (2.4)$$

wo das Gleichheitszeichen für den geraden Zylinder $A = A' + hI$ der Höhe h und der Grundfläche $A' \in K_n$, $A' \subset E_0$ gilt. Hierbei bezeichnet I die Einheitsstrecke $[0, u]$ der Richtung u . Diese Gleichheit in (2.4) ergibt die Zylinderformel

$$W(A) = W(A') (1 + h), \quad (2.5)$$

die vermöge der Bemerkung $W(hI) = 1 + h$ auch aus dem Multiplikationstheorem (2.3) abgelesen werden kann.

Um den Beweis von (2.4) zu führen, ist es nützlich, das Partialfunktional

$$W(A, T) := \int_T e^{-\pi r(p, A)^2} dp$$

als Hilfsgröße einzuführen, wobei sich die Integration wie angedeutet, lediglich über einen passend gewählten Raumteil $T \subset E^n$ erstrecken soll. Es sei jetzt

$$T_0 := \{p \in E^n; \langle p, u \rangle \leq 0\}$$

$$T_h := \{p \in E^n; \langle p, u \rangle \geq h\}$$

$$T := \{p \in E^n; 0 \leq \langle p, u \rangle \leq h\},$$

so daß also $W(A) = W(A, T_0) + W(A, T_h) + W(A, T)$ ist. Nun gilt offenbar

$$p \in T_0 \Rightarrow r(p, A) \leq r(p, A \cap H_0)$$

$$p \in T_h \Rightarrow r(p, A) \leq r(p, A \cap H_h),$$

so daß auf $W(A, T_0) \geq (1/2) W(A \cap H_0)$, $W(A, T_h) \geq (1/2) W(A \cap H_h)$ geschlossen werden kann. Weiter gilt für $p \in T$, $\langle p, u \rangle = t$ $r(p, A) \leq r(p, A \cap H_t)$. Für $p = p' \in H_t$ setzen wir $dp = dp' dt$, wobei dp' die Punktdichte bezüglich der Ebene H_t anzeigt. So resultiert $W(A, T) \geq \int_0^1 W(A \cap H_t) dt$. Zusammengefaßt ergibt sich so die Ungleichung (2.4), wzzw.

Nachfolgend fügen wir noch eine weitere Darstellungsformel für das Wills'sche Funktional an.

Es seien E^n und E_0^n zwei total orthogonale Teilräume des E^{2n} und es gelte $A \subset E^n$ und $Z \subset E_0^n$, wo $A \in K_n$ ist und $Z \in K_n^0$ einen Einheitswürfel in E_0^n anzeigt. Bedeutet W_n^* das n -te Minkowskische Quermaßintegral der Eikörper im E^{2n} , so gilt die Integralformel

$$(2.4) \quad W(A) = \binom{2n}{n} (n+1) \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 W_n^*[(1-t)A + tZ] dt, \quad (2.6)$$

die sich mit [3] Seite 215, Formel (51), leicht direkt verifizieren läßt.

Abschließend erwähnen wir eine Vermutung, deren Bestätigung die anschließend erläuterte wichtige ungelöste Frage klären würde. Es handelt sich um die folgende Ungleichung: Sind $A, B \in K_n$ zwei Eikörper, die einen Abstand $d(A, B) \geq 1$ aufweisen, so gilt für die konvexe Hülle $C = \text{conv}(A \cup B)$

$$(2.5) \quad W(C) \geq W(A) + W(B). \quad (2.7)$$

Trotz erheblicher Anstrengungen gelang es dem Verfasser nicht, diese Schlüsselbeziehung nachzuweisen.

3. Die Wills'sche Vermutung

Nachfolgend soll eine Beziehung dargelegt werden, die zwischen dem oben behandelten Eikörperfunktional W und dem Problem der Gitterpunktanzahlschätzung bei Eikörpern besteht. Für einen Punkt $p \in E^n$ bedeute $x_\nu(p)$ die ν -te Koordinate von p bezüglich eines orthogonalen cartesischen Koordinatensystems im Raum E^n . Das orthonormierte Punktgitter ist mit $Z^n = \{p \in E^n; x_\nu(p) \in Z, \nu = 1, \dots, n\}$

$v = 1, \dots, n$ gegeben. Sei $A \in K_n$ so bezeichne $G(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z}^n)$ die Anzahl der zu A gehörenden Gitterpunkte. Für diese Gitterpunktanzahl gilt nun vermutlich die Ungleichung

$$G(A) \leq W(A). \quad (3.1)$$

Diese Vermutung wurde erstmals in [7], Seite 60, Formel (5) in einer gedruckten Note von J. M. WILLS formuliert. Gleichheit besteht für ein gerades Gitterparallelotop P . Sei

$$k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n, a_v \in \mathbb{N} \ (v = 1, \dots, k) \text{ und}$$

$$P := \{p \in \mathbb{E}^n; 0 \leq x_v(p) \leq a_v \ (v = 1, \dots, k), x_v(p) = 0 \ (v = k+1, \dots, n)\}$$

Es ist dann

$$G(P) = \prod_{v=1}^k (1 + a_v) \text{ und } W(P) = \prod_{v=1}^k (1 + a_v)$$

(zur zweiten Feststellung vgl. [3], Seite 216, Formel (53)), so daß sich $G(P) = W(P)$ oder die Gültigkeit der Gleichheit in (3.1) ergibt.

Für $n = 2$ ist die Vermutung leicht beweisbar. Vgl. hierzu M. NOSARZEWSKA [6] und Verschärfung und Varianten von E. EHRHART [2]. Im Falle $n = 3$ sind verschiedene Teilergebnisse sichergestellt worden; vgl. hierzu [4]³.

Für $n \leq 6$ ist die Richtigkeit u. a. für Rotationskörper mit gitterparallelen Achsen nachgewiesen worden; vgl. [5]. Eine zusammenfassende Darstellung vieler Resultate und noch offener Fragen findet sich bei J. BOKOWSKI [1]. Dort wird beispielsweise gezeigt, daß für $2 \leq n \leq 5$ die Schätzung

$$G(A) \leq V(A \varrho_n) \quad (3.2)$$

gilt, wobei $\varrho_n = \omega_n^{-1/n}$ ist. Da sich $W(A) \leq V(A \varrho_n)$ für alle n nachweisen läßt, würde die Richtigkeit von (3.1) auch diejenige von (3.2) für alle Dimensionen nach sich ziehen.

Aber abgesehen von der Bedeutung des Funktional W für die Geometrie der Zahlen im obengenannten Sinn, scheint das Studium von W auch allgemeiner für die Eikörpergeometrie sehr lohnend zu sein.

³ Nach Abschluß des Manuskriptes hat J. M. Wills mit Post vom 20. 6. 1974 dem Verfasser eine handschriftliche Fassung einer Beweisführung von Betke und Overhagen (Berlin) zugestellt, die das Problem im Falle $n = 3$ vollständig gelöst haben.

Literatur

- [1] BOKOWSKI, J.: Obere Schranken zur Gitterpunktsanzahl konvexer Körper. Diss. TU Berlin 1973.
- [2] ENRIHART, E.: Sur le nombre de points à coordonnées entières d'une région convexe ou spatiale. *L'Enseignement Math.* **10**, 138—146 (1964).
- [3] HADWIGER, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer. 1957.
- [4] HADWIGER, H., J. M. WILLS: Über Eikörper und Gitterpunkte im gewöhnlichen Raum. *Geometriae Dedicata* **2**, 255—260 (1973).
- [5] HADWIGER, H., J. M. WILLS: Gitterpunktanzahl konvexer Rotationskörper. *Math. Ann.* **208**, 221—232 (1974).
- [6] NOSARZEWSKA, M.: Evaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle. *Coll. Math.* **1**, 305—311 (1948).
- [7] WILLS, J. M.: Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen. *El. Math.* **28**, 57—63 (1973).

Prof. H. HADWIGER
Mathematisches Institut
Universität Bern
Sidlerstraße 5
CH-3012 Bern, Schweiz

$1 \cap Z^n$
Gitter-

(3.1)

(5) in
eit be-

$\dots, n\}$

so daß
(3.1)

hierzu
von
bnisse

gitter-
men-
ragen
zeigt,

(3.2)

nach-
von

für
t das
sehr

20. 6.
g von
 $n = 3$