Rigidity of zonohedra

N. P. Dolbilin, M. A. Shtan'ko, and M. I. Shtogrin

In the present note we generalize a theorem stated in [3] on the rigidity of quadrillages[1] on the 2-sphere S^2 in $\mathbf{E}^3$. Namely, we show the rigidity of a very extensive class of non-convex polyhedra embedded in 3-dimensional Euclidean space, the so-called zonohedra, introduced by Fedorov [2] as long ago as 1885.

The basic concepts, results, and problems of the theory of deformations of surfaces can be found in the collection [1].

Here by a *zonohedron* we shall mean an abstractly given polyhedral sphere such that: a) each face is a Euclidean convex polygon with an even number of sides; b) the set of sides of each polygon can be split into pairs of sides that are parallel to each other.

It is natural to introduce the concept of a belt or zone ([2], p. 256) for such polyhedra. A quadrillage of the sphere S^2 is an important special case of Fedorov zonohedra and the concept of a strip, which has served as a useful tool in the study of properties of quadrillages, coincides with the concept of a zone for arbitrary zonohedra.

A zonohedron Q embedded in $\mathbf{E}^3$ (with plane faces) is called ***rigid*** if there is an $\varepsilon > 0$ such that if $Q' \subset \mathbf{E}^3$ is any zonohedron (with the same plane faces) isometric to Q with $\|Q - Q'\| < \varepsilon$, then Q' is congruent to Q.

Theorem. *A zonohedron embedded in* $\mathbf{E}^3$ *is rigid.*

We consider the graph Γ of distinguished edges introduced in [3]. Let us assume that the embedded zonohedron admits a continuous deformation φ in the course of which each face remains plane. Then in the course of the deformation φ at least one dihedral angle, that is, the angle between the planes of two adjacent faces, must change. Let us call each edge of a dihedral angle that changes under φ *distinguished.* We consider a deformation φ and we shall assume that it is so small that under φ the embedded zonohedron remains embedded as before. We denote the graph consisting of all distinguished edges by Γ. The edges of Γ are the distinguished edges of the zonohedron and the vertices of the graph are the vertices of the distinguished edges, and only these.

We list some properties of the graph of distinguished edges. Note that the set of edges of Γ is non-empty if and only if the zonohedron Q admits a deformation φ.

- $\Gamma 1$. *The graph* Γ *divides the surface of the zonohedron into a number of connected components. Each distinguished edge separates two different components, that is, it is a boundary of two faces of the zonohedron belonging to different components.*
- $\Gamma 2$. *At least two edges must meet at each vertex of* Γ. This follows immediately from $\Gamma 1$. ?
- $\Gamma 3$. *If only two distinguished edges meet at a vertex, then they lie on a straight line.*
- $\Gamma 4$. *Either* 2 *edges or at least* 4 *edges meet at a vertex of* Γ.

For the proof of these properties of Γ see [3].

Now let us pass from the graph of distinguished edges to a graph Γ_φ, which we shall call the *graph of the deformation* φ. The vertices of the deformation graph Γ_φ are declared to be only those vertices of Γ at which at least 4 edges meet. We consider an arbitrary distinguished edge e of the original graph Γ and select those distinguished edges which can be joined to e by an edge path passing through vertices of Γ of degree 2. In view of property $\Gamma 3$, and also of the boundedness of the zonohedron, the union of such edges forms a straight-line segment, which we shall regard as an edge of the 'new' graph Γ_φ. Both endpoints of such an edge are vertices of valency at least 4,

The work was completed with the partial support of the Russian Foundation for Fundamental Research (grant no. 96-01-00166) and the Deutsche Forschungsgesellschaft.

[1] The Russian word here is borrowed from the French word quadrillage, which means division into squares.

It is elliptic, that is, it has the signature (0,4) (see [3], for example) but the graph $\Gamma_i - w$ is obtained by a blow-up of $\widetilde{\Gamma}$, and hence it too is elliptic. We have shown that $\Gamma(\widetilde{X})$ is a Lanner graph. Since X is a Fano variety the morphism φ shrinks all the vertices with weight less than -1. For the remaining vertices e_j we define the DP-coefficients η_j as in [4]: $\eta_j = -[\varphi^* K_X] * [e_j] = 1 + \sum_i \alpha_i [F_i] * [e_j]$, where the F_i are the exceptional divisors of the morphism φ, and the coefficients α_i are determined by the equality $K_{\widetilde{X}} = \varphi^* K_X + \sum_i \alpha_i F_i$; $\alpha_i \leq 0$, as we may take $\widetilde{X}$ to be the terminal modification of X, which is non-singular, since the isolated singularities of $(\mathrm{SL}(2), G)$-varieties are not $\mathbb{Q}$-factorial [5]. If all the $\eta_j \geq \varepsilon$ we say that the graph $\Gamma(\widetilde{X})$ satisfies the $\mathrm{DP}(\varepsilon)$ condition. In this case by Theorem 3.13 of [4] we obtain the bound $\rho(\widetilde{X}) \leq 7 + 16/\varepsilon$. It remains to note that $r(X) \leq \mathrm{hcf}(\eta_j)$. This proves the theorem.

Corollary. *$\rho(\widetilde{X}) \leq 7 + 16/k$, where k is the Gorenstein index of X.*

The author is grateful to Yu. G. Prokhorov for posing the problem and for his attention to this work, and also to V. V. Nikulin for helpful discussions.

Bibliography

[1] S. Mukai and H. Umemura, *Lecture Notes in Math.* **1016** (1983), 490–518.
[2] V. V. Nikulin, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **52** (1988), 1032–1050; English transl. in *Math. USSR-Izv.* **33** (1989).
[3] A. I. Iliev, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* **1986**, no. 3, 38–44; English transl. in *Moscow Univ. Math. Bull.* **41**:3 (1986).
[4] V. A. Alekseev, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **52** (1988), 1288–1304; English transl. in *Math. USSR-Izv.* **33** (1989).
[5] H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Vieweg, Braunschweig 1984; Russian transl., Mir, Moscow 1987.

Received 15/JAN/96

that is, vertices of the new graph. We list some properties of the deformation graph that we shall need.

$\Gamma_\varphi 1$. *All the edges of* Γ_φ *are straight-line segments consisting of a number of distinguished edges.*

$\Gamma_\varphi 2$. *No two edges of* Γ_φ *have two common endpoints.*

This follows from the fact that the zonohedron Q is embedded in $\mathbf{E}^3$. Hence there are no two-edge cycles in the deformation graph.

$\Gamma_\varphi 3$. *At least* 4 *edges meet at each vertex of* Γ_φ.

$\Gamma_\varphi 4$. *The graph* Γ_φ *divides the surface of the zonohedron into regions among which there are at least eight triangles* (*by a triangle we mean a region whose boundary consists of three and only three edges of* Γ_φ).

In fact, let us denote the number of components of Γ_φ by k, the number of its vertices by v, the number of edges by e, and, finally, the number of regions into which the sphere is divided by the edges of Γ_φ by f. We note that a region need not be a disc, and the edge contour that bounds it, which consists of straight-line segments, need not be connected. Let f_n denote the number of regions with n edges. Then we may write down the following relations:

$$\sum n f_n \geq 4v, \qquad \sum n f_n = 2e, \qquad \sum f_n = f.$$

From these relations and the generalized Euler formula ($v - e + f = k + 1$) we obtain:

$$\sum (4-n) f_n \geq 4(v - e + f) \geq 4 \cdot 2.$$

Hence we deduce that $f_3 \geq 8 + f_5 + 2f_6 + \cdots + (n-4)f_n + \cdots$. Thus there are at least eight triangles in Γ_φ.

Remark. In fact it follows from the above arguments that each connected component of Γ_φ contains at least eight triangles.

Proof of the theorem. Let us assume the contrary: the zonohedron Q embedded in $\mathbf{E}^3$ admits a continuous deformation φ. Then the deformation graph Γ_φ must exist. Let Δ denote one of the triangular regions of Q (see $\Gamma_\varphi 4$), and let a be any edge that lies on a side of Δ. The strip (in the sense of Fedorov) constructed from the edge a contains two faces, F_1 and F_2 say, adjacent to a, of which one, say F_1, lies outside the triangle Δ, while the other face F_2 lies inside Δ. Moving along this strip in the direction from F_1 to F_2, we meet the first face F_k after F_2 that does not already belong to Δ. Then the preceding face F_{k-1} in the strip lies inside Δ. Since the faces F_{k-1} and F_k have only one common edge b and belong to the same strip, the edge b belongs to the contour of Δ and runs parallel to the edge a. Therefore the distinguished edges a and b cannot lie on different sides of Δ, that is, they are obliged to lie on the same side of the triangle. However the edges a and b cannot lie on the same side. This contradiction shows that no graph Γ_φ with properties $\Gamma_\varphi 1$–$\Gamma_\varphi 4$ can be embedded in the edge skeleton of the zonohedron Q. Thus the assumption that there is a deformation has led to a contradiction, which proves the theorem.

Remark 1. Although the theorem speaks of the rigidity of embedded zonohedra, in fact, as is clear from the proof, immersed zonohedra are also rigid, as are also zonohedra which can be mapped into $\mathbf{E}^3$ linearly on each face and whose one-dimensional (edge) skeletons are *immersed* in $\mathbf{E}^3$.

Remark 2. We consider a decomposition of $\mathbf{E}^3$ into Fedorov parallelohedra, that is, into 3-dimensional convex polyhedra that fill the space under parallel transfers. It is known that there are 5 affine types of such parallelohedra. Let Q be a polyhedral sphere consisting of faces of the 2-dimensional skeleton of a decomposition of the space into parallelohedra. Then the polyhedral sphere Q is a zonohedron and is rigid by the theorem proved above.

Bibliography

[1] *Investigations in the metric theory of surfaces*, A collection of articles. Mathematics: recent publications in foreign science, Vol. 18, Mir, Moscow 1980. (Russian)

[2] E. S. Fedorov, ***The elements of the study of figures***, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Leningrad 1953. (Russian)
[3] N. P. Dolbilin, M. A. Shtan'ko, and M. I. Shtogrin, "Rigidity of a quadrillage of the sphere", *Dokl. Akad. Nauk* (1996) (to appear).

Steklov Institute of Mathematics

Received 15/JAN/96

НЕИЗГИБАЕМОСТЬ ЗОНОЭДРОВ

Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин

В настоящей заметке обобщается теорема о неизгибаемости квадрильяжей двумерной сферы S^2 в $\mathbf{E}^3$, изложенная в [3]. А именно, мы покажем неизгибаемость очень широкого класса невыпуклых многогранников, введенных Е. С. Федоровым еще в 1885 году [2], так называемых зоноэдров, вложенных в 3-мерное евклидово пространство.

С основными понятиями, результатами и проблемами теории изгибания поверхностей можно познакомиться в сборнике [1].

Здесь под *зоноэдром* мы будем понимать абстрактно заданную полиэдральную сферу такую, что: а) каждая грань является евклидовым выпуклым многоугольником с четным числом сторон; б) множество сторон каждого многоугольника разбивается на пары сторон, параллельных между собой.

Для таких многогранников естественно вводится понятие пояса или зоны [2, с. 256]. Квадрильяж сферы S^2 есть важный частный случай зоноэдров Федорова и понятие полоски, служившей полезным инструментом для изучения свойств квадрильяжа, совпадает с понятием пояса для произвольных зоноэдров.

Зоноэдр Q, вложенный в $\mathbf{E}^3$ (с плоскими гранями), называется *неизгибаемым*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что любой изометричный ему (с теми же плоскими гранями) зоноэдр $Q' \subset \mathbf{E}^3$ при условии $\|Q - Q'\| < \varepsilon$ конгруэнтен Q.

Теорема. *Зоноэдр, вложенный в* $\mathbf{E}^3$, *является неизгибаемым.*

Рассмотрим граф отмеченных ребер Г, который был введен в [3]. Допустим, что вложенный зоноэдр допускает непрерывное изгибание φ, в процессе которого каждая грань остается плоской. Тогда в процессе изгибания φ хотя бы один двугранный угол, т.е. угол между плоскостями двух смежных граней, должен изменяться. Назовем всякое ребро изменяющегося при изгибании φ двугранного угла *отмеченным*. Рассмотрим изгибание φ и будем предполагать его настолько малым, что вложенный зоноэдр при изгибании φ остается по-прежнему вложенным. Обозначим граф, состоящий из всех отмеченных ребер, через Г. Ребра графа Г – это отмеченные ребра зоноэдра, а вершины графа – это вершины отмеченных ребер и только они.

Перечислим некоторые свойства графа отмеченных ребер. Заметим, что множество ребер графа Г непусто тогда и только тогда, когда зоноэдр Q допускает изгибание φ.

Г1. *Граф Г разбивает поверхность зоноэдра на несколько компонент связности. Каждое отмеченное ребро разделяет две различные компоненты, т.е. является границей двух граней зоноэдра, принадлежащих разным компонентам.*

Г2. *В каждой вершине графа Г должно встречаться не менее двух ребер.* Это немедленно следует из Г1.

Г3. *Если в вершине сходятся только два отмеченных ребра, то они лежат на прямой.*

Г4. *В вершине графа Г сходятся либо 2 ребра, либо не меньше 4.*

Доказательство этих свойств графа Г см. в [3].

Перейдем от графа отмеченных ребер к графу Γ_φ, который будем называть *графом изгибания* φ. Вершинами графа изгибания Γ_φ объявляются лишь те вершины графа Г, в которых сходятся не менее 4 отмеченных ребер. Рассмотрим произвольное отмеченное ребро e из исходного графа Г и выделим те отмеченные ребра, которые можно соединить с e реберным путем, проходящим через вершины графа Г степени 2. В силу свойства Г3, а также ограниченности зоноэдра, объединение таких ребер образует прямолинейный отрезок, который мы будем считать ребром "нового" графа Γ_φ. Оба конца такого ребра являются вершинами валентности не ниже 4, т.е. вершинами нового графа. Приведем необходимые нам свойства графа изгибания.

$\Gamma_\varphi 1$. *Все ребра графа Γ_φ суть прямолинейные отрезки, состоящие из нескольких отмеченных ребер.*

$\Gamma_\varphi 2$. *Никакие два ребра графа Γ_φ не имеют два общих конца.*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00166) и Немецкого научно-исследовательского общества (DFG).

Это вытекает из того, что зоноэдр Q вложен в $\mathbf{E}^3$. Таким образом, в графе изгибания нет двуреберных циклов.

$\Gamma_\varphi 3$. *В каждой вершине графа* Γ_φ *сходятся не менее* 4 *ребер.*

$\Gamma_\varphi 4$. *Граф* Γ_φ *разбивает поверхность зоноэдра на области, среди которых имеется по крайней мере восемь треугольников (под треугольником понимается область, граница которой состоит из трех и только трех ребер графа* Γ_φ*).*

В самом деле, обозначим число компонент графа Γ_φ через k, число его вершин – через v, число ребер – через e и, наконец, число областей, на которые сфера разбивается ребрами графа Γ_φ, – через f. Заметим, что область может быть и не диском, а ограничивающий ее реберный контур, состоящий из прямолинейных отрезков, может быть не связным. Обозначим через f_n число областей с n ребрами. Тогда можно написать следующие соотношения:

$$\sum n f_n \geqslant 4v, \qquad \sum n f_n = 2e, \qquad \sum f_n = f.$$

Из этих соотношений и обобщенной формулы Эйлера ($v - e + f = k + 1$) получаем:

$$\sum (4-n) f_n \geqslant 4(v - e + f) \geqslant 4 \cdot 2.$$

Отсюда выводим, что $f_3 \geqslant 8 + f_5 + 2f_6 + \dots + (n-4)f_n + \cdots$. Таким образом, в графе Γ_φ имеется, по крайней мере, восемь треугольников.

Замечание. Из приведенных рассуждений фактически следует, что каждая связная компонента графа Γ_φ содержит не менее восьми треугольников.

Доказательство теоремы. Предположим противное: вложенный в $\mathbf{E}^3$ зоноэдр Q допускает непрерывное изгибание φ. Тогда должен существовать граф изгибания Γ_φ. Обозначим через Δ одну из треугольных областей зоноэдра Q (см. $\Gamma_\varphi 4$), и пусть a – какое-нибудь ребро, которое лежит на стороне треугольника Δ. Пояс (в смысле Федорова), построенный по ребру a, содержит две грани, скажем, F_1 и F_2, примыкающие к ребру a, причем одна из них, пусть F_1, лежит вне треугольника Δ, в то время как другая грань, F_2, лежит внутри Δ. Двигаясь вдоль этого пояса в направлении от F_1 к F_2, мы встретим первую после F_2 грань F_k, которая уже не принадлежит треугольнику Δ. Тогда предыдущая грань F_{k-1} в поясе лежит внутри Δ. Так как грани F_{k-1} и F_k имеют лишь одно общее ребро b и принадлежат одному поясу, то ребро b принадлежит контуру Δ и проходит параллельно ребру a. Поэтому отмеченные ребра a и b не могут лежать на разных сторонах треугольника Δ, т.е. обязаны лежать на одной стороне треугольника. Однако ребра a и b не могут лежать и на одной стороне. Полученное противоречие показывает, что никакой граф Γ_φ со свойствами $\Gamma_\varphi 1$–$\Gamma_\varphi 4$ не может быть вложен в реберный остов зоноэдра Q. Таким образом, предположение об изгибании привело к противоречию, что доказывает теорему.

Замечание 1. Хотя в теореме говорится о неизгибаемости вложенных зоноэдров, в действительности же, как видно из доказательства, неизгибаемыми являются и погруженные зоноэдры, а также такие зоноэдры, которые отображены в $\mathbf{E}^3$ линейно на каждой грани и чьи одномерные (реберные) остовы *погружены* в $\mathbf{E}^3$.

Замечание 2. Рассмотрим разбиение $\mathbf{E}^3$ на федоровские параллелоэдры, т.е. на 3-мерные выпуклые многогранники, заполняющие пространство при помощи параллельных переносов. Как известно, существует 5 аффинных типов таких параллелоэдров. Пусть Q – полиэдральная сфера, составленная из граней 2-мерного остова разбиения пространства на параллелоэдры. Тогда полиэдральная сфера Q является зоноэдром и по доказанной теореме неизгибаема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Исследования по метрической теории поверхностей. Сборник статей. Серия Математика. Новое в зарубежной науке. Т. 18. М.: Мир, 1980. [2] Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. Л.: Изд-во АН СССР, 1953. [3] Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. Неизгибаемость квадрильяжа сферы // ДАН. 1996 (в печати).

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Принято редколлегией
15.01.1996