SUR LE NOMBRE DE POINTS A COORDONNÉES ENTIÈRES D'UNE RÉGION CONVEXE PLANE OU SPATIALE

par E. EHRHART

(Reçu le 15 février 1963)

A l'intersection de la géométrie des corps convexes et de l'arithmétique des réseaux entiers se place la recherche, aussi intéressante que difficile, du nombre de points entiers des domaines convexes. On connaît, par exemple, les beaux travaux d'Euler sur les points entiers d'un simplexe $\Sigma\, a_i X_i = n$, $X_i \geqq 0$, de Gauss sur le nombre C_r des points entiers situés dans ou sur une circonférence de rayon r et de centre entier, de Landau, Hardy, Littlewood et Sierpinski sur la valeur asymptotique de C_r.

Un résultat très général dans ce domaine a été obtenu il y a une quinzaine d'années par M. Nosarzewska (Colloquium Mathematicum, Wroclaw, I, 1948, p. 305-311): le nombre i de points entiers intérieurs à une région plane convexe d'aire S et de périmètre l vérifie la double inégalité

$$S - \frac{l}{2} < i < S + \frac{l}{2} + 1\,.$$

La démonstration repose sur un lemme délicat de H. Steinhaus et distingue neuf sortes d'intersections de la région avec les carrés du quadrillage. Remarquons que la borne inférieure peut être illusoire parce que négative. Mentionnons que dans le même volume (p. 1-5), H. Steinhaus démontre l'inégalité de Jarnik $|S - i| < l$, relative à une courbe de Jordan fermée rectifiable quelconque.

Nous allons montrer de manière très élémentaire, que la borne supérieure trouvée par M. Nosarzewska convient même pour les points entiers intérieurs à la région plane convexe *ou* *située sur son bord* et nous en déduirons des bornes strictes analogues pour une région convexe de l'espace.

On s'appuiera sur le théorème fondamental de Brunn: La variation de l'aire ou du périmètre des sections planes parallèles d'un corps convexe ne présente qu'un seul maximum (Über Ovale und Eiflächen. Inaug. Diss. Münich, 1887).

On suppose connue une propriété simple des courbes convexes: Une courbe fermée convexe est plus courte que toute courbe fermée qui l'entoure. Elle résulte comme cas limite d'un théorème élémentaire « Un polygone convexe est plus petit qu'un polygone qui l'enveloppe », que l'on déduit facilement de l'inégalité triangulaire (voir, par exemple, A. Grevy, Géométrie plane pour la classe de seconde, 1920, p. 34; chez Vuibert).

Les axes sont orthonormés. Un point est dit *entier* si ses coordonnées le sont; un polygone ou un polyèdre sont dits entiers si leurs sommets le sont. Le polygone est supposé non croisé et tel que son extérieur soit d'un seul tenant. Les régions planes des deux premiers théorèmes sont rapportées à des axes de leur plan.

THÉORÈME 1. — *Le nombre* p *des points entiers périphériques d'un polygone entier plan et le nombre* j *de ses points entiers intérieurs ou périphériques sont liés à son aire S par*

$$S = j - \frac{p}{2} - 1 .^{1)} \qquad (1)$$

On sait que l'aire d'un triangle qui n'a d'autres points entiers intérieurs ou périphériques que juste ses trois sommets est $\frac{1}{2}$. Décomposons le polygone en de tels triangles. Les nombres f, s, c des faces, des sommets et des côtés de cette décomposition vérifient la relation d'Euler $s-c+f=1$. Or $f=2S$, $s=j$ et $3f=2c-p$ donne $c=\frac{1}{2}(3f+p)=3S+\frac{p}{2}$. Donc $s-c+f = j-S-\frac{p}{2}=1$.

---

[1] Nous en avons donné une autre démonstration dans les C.R. de l'Acad. des Sc., T 241, 1955, p. 686-687.

THÉORÈME 2. — *Le périmètre l d'une région plane convexe, son aire* S *et le nombre* j *des points entiers situés à l'intérieur ou sur le bord vérifient* (1) $\qquad j \leq S + \frac{l}{2} + 1\,.$

L'égalité n'est atteinte que pour les rectangles entiers dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Si $j < 2$ ou si les j points entiers sont alignés, l'inégalité est triviale; écartons ces cas. Le cadre convexe O′ des j points entiers est intérieur ou identique à la région convexe.

Soit S' l'aire de O′ ($S' \leq S$), l' son périmètre, p' le nombre des points entiers de son bord et j' le nombre de ses points entiers intérieurs augmenté de p' ($j' = j$). Or $p' \leq l' \leq l$ (courbes convexes dont l'une est intérieure à l'autre) car sur un côté c du polygone O′ deux points entiers consécutifs ont une distance égale ou supérieure à 1. En remplaçant j', p', S' respectivement par j, l, S dans $j' = S' + \frac{p'}{2} + 1$ (th. 1), on trouve l'inégalité annoncée.

Remarque. — On peut calculer j *exactement par* $j = S' + \frac{p'}{2} + 1.$

Appelons hauteur d'une région plane convexe dans la direction OX la distance des droites d'appui perpendiculaires à cet axe.

THÉORÈME 3. — *Soient* S *l'aire d'une région plane convexe,* h *sa hauteur dans la direction OX et* c *sa plus grande corde perpendiculaire à cet axe. Le nombre j des points entiers situés dans la région ou sur son bord vérifie*

$$j \leq S + h + c + 1\,.^{2)} \tag{2}$$

---

2) En considérant les trapèzes qui ont pour bases deux c_i consécutifs (notations de la démonstration du th. 3), on voit que $\Sigma\, c_i < S + \frac{c_i + c_n}{2}$, ce qui donne la formule

$$j \leq S + h + \frac{c_1 + c_n}{2} + 1,$$

plus avantageuse que (2), puisque $\frac{c_1 + c_n}{2} \leq c$ peut être nul. *Pour un cercle dont les tangentes parallèles à* OY *ont des abscisses entières*, cette relation fournit $j < \pi r^2 + 2\,r + 1$.
On voit même aisément que $j < \pi r^2 + 2r$. Cette inégalité est triviale pour $2r = 1$ ou 2, et pour $2r < 3$ on montre que S dépasse l'aire des trapèzes de plus 1. Plus généralement pour une région plane convexe $j < S + h + 1$, si les droites d'appui parallèles à OY ont des abscisses entières et que chacune ne touche le bord qu'en un point (car alors $\frac{c_1 + c_n}{2} = 0$).

L'égalité n'est atteinte que pour les parallélogrammes qui ont un côté perpendiculaire à OX *et dont toutes les cordes d'abscisses entières, parallèles à ce côté, sont entières.*

Considérons les cordes d'abscisses entières, plus éventuellement les arcs rectilignes d'abscisses entières du contour, soit $c_1, c_2, \ldots, c_n$. D'après le théorème de Brunn leur variation en fonction de l'abscisse ne présente qu'un seul maximum. Supposons alors, pour fixer les idées, que c_i croît pour $X = 1, 2, \ldots, m$ et décroît pour $X = m+1, m+2, \ldots, n$. Sur les cordes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ construisons les rectangles de hauteur 1 dans le sens de l'axe OX et sur les cordes $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_n$ les rectangles de hauteur 1 en sens contraire. Supprimons le plus grand des deux rectangles c_m, c_{m+1} (ou l'un d'eux s'ils sont égaux), soit c_m pour fixer les idées. La somme des aires des rectangles restants $\Sigma c_i - c_m < S$. D'où $\Sigma c_i < S + c$. Or le nombre j_i de points entiers situés sur la corde fermée c_i vérifie $j_i \leq c_i + 1$. Donc $j = \Sigma j_i < S + c + n$, ou $j < S + c + h + 1$, car $n \leq h + 1$.

En examinant de même les quatre autres cas de variation de c_i que permet le théorème de Brunn $\left(\nearrow, \searrow, \longrightarrow, \nearrow\!\longrightarrow\!\searrow\right)$, on voit facilement que l'égalité n'est atteinte que dans le cas signalé par l'énoncé.

Remarques. — 1) Pour une région donnée en position, on obtient par ce théorème deux bornes supérieures différentes de j, selon qu'on privilège l'un ou l'autre des axes de coordonnées. 2) La formule (2) peut être plus avantageuse que (1) ou non, suivant le cas. Elle introduit trois paramètres S, c, h, au lieu de S, l mais c, h sont souvent plus faciles à déterminer que l. La borne (1) est indépendante des déplacements de la région convexe, (2) ne l'est que des translations et des symétries d'axes parallèles à OX ou à OY.

Pour le cercle de rayon r (1) et (2) donnent respectivement

$$j < \pi r^2 + \pi r + 1 , \qquad j < \pi r^2 + 4r + 1 .$$

et pour un parallélogramme de côtés a, b, dont a est parallèle à OY, et de hauteur h relative à a

$$j < ah + a + b + 1 , \qquad j \leqq ah + a + h + 1 .$$

Pour une ellipse d'axes $2a$, $2b$ parallèles aux axes de coordonnées, (2) donne

$$j < \pi ab + 2(a+b) + 1 .$$

Considérons maintenant une région convexe à trois dimensions. Sa hauteur dans la direction OX est la distance des deux plans d'appui perpendiculaires à cet axe.

THÉORÈME 4. — *Soient* V *le volume d'un corps convexe,* h *sa hauteur dans la direction* OX, s *l'aire maximum des sections planes perpendiculaires à cet axe et* l *le périmètre maximum de ces sections. Le nombre* j *des points entiers situés dans le corps ou sur son bord vérifie*

$$j \leqq V + s + (h+1)\left(\frac{l}{2} + 1\right) \cdot \tag{3}$$

L'égalité n'est atteinte que pour les parallélépipèdes entiers dont une face est un rectangle de côtés parallèles à OY *et à* OZ *et dont toutes les sections parallèles à cette face et d'abscisse entière sont entières.*

Les sections perpendiculaires à OX d'abscisses entières, y compris s'il y a lieu les faces ou les points de contact situés dans les plans d'appui qui leur sont parallèles, vérifient, avec des notations évidentes

$$j_i \leqq s_i + \frac{l_i}{2} + 1 \quad (th.\ 2)\,; \tag{4}$$

l'égalité n'est atteinte que si la section correspondante est un rectangle entier dont les côtés sont parallèles à OY et à OZ. D'après le théorème de Brunn la variation de s_i avec X ne présente qu'un seul maximum. Supposons alors, pour fixer les idées, que s_i croît pour $X = 1, 2, \ldots, m$ et décroît pour $X = m+1, m+2, \ldots, n$. Sur les sections $X = 1, 2, \ldots, m$ construisons des cylindres de hauteur 1 dans la direction et le sens de OX, sur les sections $X = m, m+1, \ldots, n$ les cylindres de hauteur 1 de même direction mais de sens opposé. Supprimons le plus grand des deux cylindres c_m, c_{m+1} (ou l'un d'eux s'ils sont égaux), soit c_m pour fixer les idées. La somme des volumes des cylindres restants est $\Sigma s_i - s_m < V$; d'où $\Sigma s_i < V+s$. D'autre part $\Sigma l_i < nl$, $n \leqq h+1$ et $\Sigma j_i = j$. En sommant les inégalités (4), on obtient

$$j < \sum s_i + \frac{\Sigma l_i}{2} + n\,,$$

qui devient (3) (avec le signe $<$), quand on remplace les termes à droite par leurs majorants.

En examinant de même les quatre autres cas de variations de s_i que permet le théorème de Brunn, on voit facilement que l'égalité n'est atteinte que dans le cas signalé dans l'énoncé.

Applications. — Le théorème précédent donne pour la sphère de rayon r

$$j < \frac{4\pi}{3} r^3 + 3\pi r^2 + (\pi+2)\, r + 1\,,$$ [3]

et pour l'ellipsoïde de révolution autour d'une parallèle à OX, de rayon principal a et de hauteur h

$$j < \frac{4\pi}{3} a^2 h + \pi a^2 + (h+1)\,(\pi a + 1)\,.$$

THÉORÈME 5. — *Soient* V *le volume d'un corps convexe,* S *l'aire de sa surface diminuée des faces perpendiculaires à* OX *s'il y en a,* h *sa hauteur dans la direction* OX, s *l'aire maximum des sections planes perpendiculaires à cet axe et* l *le périmètre maximum de ces sections. Le nombre* j *des points entiers situés dans le corps ou sur son bord vérifie*

$$j \leqq V + \frac{S}{2} + s + \frac{l}{2} + h + 1\,. \tag{5}$$

---

[3]) Pour une sphère $\Sigma s_i < V + \frac{s_1+s_n}{2}$, car le volume du segment sphérique de bases s_i, s_{i+1} est supérieur à la moyenne arithmétique des volumes des cylindres de bases s_i et s_{i+1} qui ont même hauteur. On peut alors remplacer dans (3) s par $\frac{s_1+s_n}{2}$ En particulier *pour une sphère dont les plans tangents perpendiculaires à* OX *ont des abscisses entières,*

$$\frac{s_1+s_n}{2} = 0 \quad \text{et} \quad j < \frac{4\pi r^3}{3} + 2\pi r^2 + (\pi+2)r + 1.$$

L'égalité n'est atteinte que pour les parallélépipèdes entiers dont une face est un rectangle de côtés parallèles à OY *et à* OZ *et dont toutes les sections parallèles à cette face et d'abscisses entières sont entières.*

Par analogie avec la démonstration précédente, on montre que la somme des aires latérales des cylindres c_i, diminuée de celle du cylindre qui correspond au plus grand l_i est $\Sigma\, l_i - l_m \leq S$. On peut donc majorer Σl_i par $S+l$, au lieu de le faire par nl.

Remarques. — 1) Suivant le cas *la formule (5) peut être plus avantageuse que (3) ou non.* Elle a l'inconvénient de renfermer un paramètre de plus, S. Pour la sphère les deux formules donnent la même borne. Pour un cône de révolution autour d'une parallèle à OX de rayon de base r, de hauteur h et de génératrice g, (3) et (5) donnent respectivement

$$j < \frac{\pi r^2 h}{3} + \pi r^2 + \pi(h+1)\,r + h + 1\,,\; j < \frac{\pi r^2 h}{3} + \pi r^2 + \pi\left(\frac{g}{2}+1\right) r + h + 1\,.$$

La seconde borne de j est donc inférieure à la première si $\frac{g}{2} < h$ ou $\frac{h}{g} > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si l'ouverture du cône est inférieure à $\frac{2\pi}{3}$.

2) La *méthode d'intégration numérique* que nous avons employée pour démontrer les trois derniers théorèmes peut s'étendre de proche en proche aux corps convexes de plus de trois dimensions. La convenxité n'intervient dans les démonstrations que par deux théorèmes fondamentaux:

— la section d'un corps convexe par une variété linéaire est convexe;
— la variation de la mesure de la section d'un corps convexe n-dimensionnel par un hyperplan à n-1 dimensions de direction fixe et celle de la mesure de son bord ne présentent qu'un seul maximum.

3) *Les formules 1, 2, 3, 5 s'appliquent aussi à certains corps non convexes*, pourvu que les sections parallèles considérées soient convexes et que la variation de leurs mesures et de celles de leur bord ne présente qu'un seul maximum. On peut penser, par exemple, à un tube sinusoïdal.

Plus généralement pour un corps convexe de révolution autour d'un axe parallèle à OX, qui a deux plans tangents perpendiculaires à cet axe d'abscisses entières,

$$j < V + \frac{S}{2} + \pi r + h + 1 ,$$

où r est le rayon du cercle principal et h la hauteur du corps dans la direction OX.

Terminons par une proposition hautement probable, quoique incomplètement démontrée:

CONJECTURE. — *Soient* a, b, c *les hauteurs dans les directions des axes OX, OY, OZ d'un corps convexe de volume V et d'aire S. Le nombre* j *de points entiers situés dans ou sur ce corps vérifie l'inégalité*

$$j \leqslant V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 . \qquad (6)$$

L'égalité n'est atteinte que pour les parallélépipèdes rectangles entiers, dont les arêtes sont parallèles aux axes.

Remarques. — 1) *L'égalité est bien atteinte par les parallélépipèdes de l'énoncé.* Ici a, b, c sont les longueurs des arêtes. Donc

$$j = (a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$$
$$= V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 .$$

2) *Il suffit que* (6) *s'applique aux polyèdres convexes entiers, pour qu'il s'applique à tout corps convexe.* L'enveloppe convexe des points entiers situés dans ou sur le corps convexe (C) est un polyèdre entier (C'). Or leurs caractéristiques sont liées par

$$j' = j \, , \; V' \leqslant V , \; S' \leqslant S , \; a' + b' + c' \leqslant a + b + c .$$

(Nous avons d'ailleurs démontré que (6) est vrai pour une famille de polyèdres entiers, qui comprend en particulier les prismes de bases parallèles à un plan de coordonnées.)

3) *L'aire réticulaire* S' d'un polyèdre entier s'obtient par définition en prenant comme unité d'aire dans chaque face la maille du réseau plan de ses points entiers ($S' \leqslant S$). Montrons que *si un polyèdre entier convexe* P *vérifie*

$$j \leqq V + \frac{S'}{2} + a + b + c + 1\,, \tag{7}$$

cette inégalité est également vérifiée par tout polyèdre P_n *qui s'en déduit par une homothétie* (O, n) *de centre et de rapports entiers.*

On sait que

$$j_n = Vn^3 + \frac{S'}{2}n^2 + \left(j - \frac{p}{2} - V\right)n + 1\,, \quad S' = p - 2\,.$$ [1]

Donc l'inégalité à démontrer

$$j_n \leqq Vn^3 + \frac{S'}{2}n^2 + (a+b+c)\,n + 1$$

revient à

$$j - \frac{S'+2}{2} - V \leqq a + b + c\,,$$

qui est équivalente à (7).

E. Ehrhart
11, rue de Bruges
Strasbourg.

---

1) E. Ehrhart, *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, 1959, T. 248, p. 1097.