Géométrie Algébrique/ Algebraic Geometry.

Les multilucarnes: Nouveaux contre-exemples à la conjecture de Ragsdale.

Bertrand Haas.

Résumé. Une fameuse conjecture attribuée à Ragsdale [?] affirme que le nombre d'ovales pairs et le nombre d'ovales impairs d'une courbe algèbrique non-singulière de degré 2k sur le plan projectif RP^2 sont chacun majorés par $R(k) = \frac{3k(k-1)}{2} + 1$. Dans une note récente [?] I. Itenberg a construit des courbes ayant $R(k) + [\frac{(k-3)^2+4}{8}]$ ovales pairs, $[a]$ désignant ici la partie entière de a. Dans la présente note sont donnés des contre-exemples où la borne $R(k)$ est dépassée d'un terme de l'ordre de $k^2/6$.

Multilucarnes: New counter-examples to the Ragsdale conjecture.

Abstract. A well known conjecture attributed to Ragsdale [?] asserts that the number of even ovals and the number of odd ovals of a non-singular algebraic curve of degree $2k$ on the projective plane RP^2 are each bounded by $R(k) = \frac{3k(k-1)}{2} + 1$. In a recent paper [?] I. Itenberg has constructed curves with $R(k) + [\frac{(k-3)^2+4}{8}]$ even ovals, where we note $[a]$ for the integer part of a. In the present paper, counter-examples are given where the bound $R(k)$ is exceeded by a term of order $k^2/6$.

English Abridged Version.

Main Theorem. For each integer $k \geq 5$ there exists an algebraic non-singular curve of degree $2k$ on RP^2 with $R(k) + [(k^2 - 7k + 16)/6]$ even ovals.

Signed Triangulations. For any even integer $d = 2k$ let $X_d \subset R^2$ be the convex hull of the points $(0,d), (0,0)$ and $(d,0)$. Let X_d^* be the convex hull of $(0, \pm d), (\pm d, 0)$ with the points of the boundary identified with their opposites (so X_d^* is homeomorphic to RP^2). A triangulation $\mathcal{T}$ of X_d is *convex* if $\mathcal{T}$ can be viewed as the orthogonal projection of the lower part of a 3-dimensional convex polyhedron. A signed triangulation T is a triple of the form $(\cup\Delta, \mathcal{T}, s)$ where $\cup\Delta \subset R_+^2$ is a union of disjoint polygons Δ, $\mathcal{T}$ is the union of primitive triangulations of the polygons Δ, and $s : \cup\Delta \cap Z^2 \to \{-1, +1\}$ is a distribution of signs on the vertices of $\mathcal{T}$. For every $(X_d, \mathcal{T}, s)$ one defines a *Viro curve* on X_d^* (See [?], or the introduction in [?]).

Viro's Theorem. For every $T = (X_d, \mathcal{T}, s)$ with $\mathcal{T}$ convex, there exists a homeomorphism $X_d^* \to RP^2$ which transforms the Viro curve given by T into an algebraic non-singular curve of degree $d = 2k$.

Congruence Classes of Curves. Let H_d be the set of all $(X_d, \mathcal{T}, s_0)$ with s_0 defined by: $s_0(p,q) = +1$ if and only if p and q are both even. Given a $T = (\cup\Delta, \mathcal{T}_1, s_1)$ such that $s_1 = s_0$ on $\partial(\cup\Delta)$, we note $[T \subset H_d]$ the set of all $(X_d, \mathcal{T}_1', s)$ where $\mathcal{T}_1' = \mathcal{T}_1$ on $\cup\Delta$, $s = s_1$ on $\cup\Delta$, and $s = s_0$ on $X_d \setminus \cup\Delta$. One shows: **(a)** The Viro curve given by any element of H_d has $R(k)$ even ovals, none of them contained in one another, and one of them containing all the odd ovals (Harnack curve). **(b)** The Viro curves given by the elements of $[T \subset H_d]$ are all isotopic to each other. Thus we can speak about the *ovals of* H_d or the *ovals of* $[T \subset H_d]$.

Itenberg's Lucarne. The signed triangulation shown in fig. 1 with p and c both odd will be called *a lucarne* and noted $L(p,c)$ or just L. Itenberg used a packing $\cup L$ of these lucarnes for his counter-examples. Each L in $[\cup L \subset H_d]$ gives one more even oval than in the Harnack curve. We observe that in fact **(a)** we get two more even ovals in the interior of $L(p,c)$, and **(b)** we lose one even oval on the boundary: Two ovals of H_d around the points $(p, -c-3)$ and $(p, -c+3)$ join into one oval in $[\cup L \subset H_d]$. See fig. 2.

The Multilucarne. Using two transvections one can deform the two half-lucarnes Lh and Lb (see fig. 1) and reglue them into a twisted lucarne $\widetilde{L}$. The Viro curves of $[\widetilde{L} \subset H_d]$ are isotopic to those of $[L \subset H_d]$. We define a *multilucarne*, and note it ML, as the union $\cup\widetilde{L}$ of m' adjacents twisted lucarnes with the two points $(p', c+3)$ and $(p'', c-3)$ in common (see fig. 3). For each $\widetilde{L}$ the loss of one oval on the boundary (see **(b)** above) is located around the same points $(p', -c-3)$ and $(p'', -c+3)$. Since the interior of each $\widetilde{L}$ gives two more even ovals (see **(a)** above), we see that $[ML \subset H_d]$ has $2m' - 1$ more even ovals than the Harnack curve.

Proof of the main theorem. Take the packing $\cup ML$ of multilucarnes shown in fig. 4 in X_d. Counting as above, we calculate that the Viro curves given by $[\cup ML \subset H_d]$ have $R(k) + [(k^2 - 7k + 16)/6]$ even ovals. To have a primitive convex triangulation of X_d which contains the triangulation of $\cup ML$, we subtriangulate the first rough convex triangulation given in fig. 5. Now the main theorem follows from Viro's theorem.

Version française.

1 Théorème principal. *Pour tout entier $k \geq 5$ il existe une courbe algèbrique non-singulière de degré $2k$ sur RP^2 dont le nombre d'ovales pairs est égal à $R(k) + [(k^2 - 7k + 16)/6]$.* .

2 Extrait de la méthode de Viro [?] (voir aussi [?]). *Polygone* signifiera *polygone fermé entier convexe de dimension deux.* Une triangulation $\mathcal{T}$ d'un polygone Δ est *primitive* si l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ est $\Delta \cap Z^2$. On dit que $\mathcal{T}$ est *convexe* sur Δ s'il existe une application $\nu : \Delta \to R$, convexe, affine sur chaque triangle de $\mathcal{T}$ et non-affine sur la réunion de deux triangles. Une *triangulation signée* T est un triplet de la forme $(\cup\Delta, \mathcal{T}, s)$ où $\cup\Delta \subset R^2_+$ est une réunion de polygones disjoints (*le support de* T), $\mathcal{T}$ est la réunion de triangulations primitives des polygones Δ, et s est une *distribution de signes* $\cup\Delta \to \{-1, +1\}$ sur les sommets de $\mathcal{T}$. Si $D \subset R^2_+$ on note D^* la réunion des images de D par les symétries axiales $(x,y) \mapsto (\pm x, \pm y)$.

L'enveloppe convexe des points $(0,d), (0,0), (d,0)$, pour tout entier pair $d = 2k$, sera notée X_d. Les points $(x,y) \in X_d^*$ tels que $|x| + |y| = d$ sont identifiés à leurs opposés. Le résultat, encore noté X_d^* par abus, est homéomorphe à RP^2. Si $T = (X_d, \mathcal{T}, s)$, on prolonge sur X_d^* la triangulation $\mathcal{T}$ par les symétries axiales, et la distribution de signe s par la règle: $s(\varepsilon_1 p, \varepsilon_2 q) = \varepsilon_1^p \varepsilon_2^q s(p,q)$ où $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ (on a bien $s(p,q) = s(-p,-q)$

si $|p|+|q|=2k$). La *courbe de Viro* associée à $(X_d, \mathcal{T}, s)$ est la courbe lisse (définie à isotopie prés) sur X_d^* qui sépare les points entiers de signes positifs des points négatifs en coupant chaque arête de $\mathcal{T}$ sur X_d^* au plus une fois.

2.1 Théorème de Viro. *Pour toute $T=(X_d, \mathcal{T}, s)$ dont la triangulation $\mathcal{T}$ est convexe, il existe un homéomorphisme $X_d^* \to RP^2$ transformant la courbe de Viro associée à T en une courbe algèbrique non singulière de degré d.*

3 Courbes d'Itenberg.

On dit que la distribution de signe s de $(\Delta, \mathcal{T}, s)$ est *de Harnack* sur $D \subset \Delta$ si $\forall (p,q) \in D$ on a l'équivalence: $s(p,q)=+1 \Leftrightarrow p$ et q sont pairs. On note H_d l'ensemble des $(X_d, \mathcal{T}, s)$ où s est de Harnack sur X_d. Si $(\cup\Delta) \subset X_d$, et si la distribution de signe s de $T=(\cup\Delta, \mathcal{T}, s)$ est de Harnack sur $\partial(\cup\Delta)$, on note $[T \subset H_d]$ l'ensemble des $(X_d, \mathcal{T}', s')$ où $\mathcal{T}'$ prolonge $\mathcal{T}$ et où s' prolonge s et est de Harnack sur $X_d \setminus \cup\Delta$. Les courbes de Viro sur X_d^* qui ont $R(k)$ ovales pairs, tous non-emboités, et $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ ovales impairs, tous emboités dans un même ovale pair, seront appelées *courbes de Harnack* (cf. les courbes algébriques de Harnack [?]).

3.1 Lemme. (a) *Pour tout $T \in H_d$, la courbe de Viro associée à T est une courbe de Harnack.* **(b)** *Si $T=(\cup\Delta, \mathcal{T}, s)$, toutes les courbes de Viro associées aux éléments de $[T \subset H_d]$ sont isotopes entre elles.*

(a) est bien connu, voir [?]. **(b)** se démontre de la même façon.

Ce lemme justifie l'emploi abusif, dans la suite, des termes *ovales de H_d* et *ovales de $[T \subset H_d]$* pour $T=(\cup\Delta, \mathcal{T}, s)$. Le *gain* de $[T \subset H_d]$ sera la différence entre le nombre d'ovale pairs de $[T \subset H_d]$ et le nombre $R(k)$ d'ovales pairs de H_d. Ce gain se décompose en *gain interieur* (on ne calcule la différence que pour les ovales dans $int(\cup\Delta^*)$) et *gain au bord* (on ne calcule la différence que pour les ovales qui coupent $\partial(\cup\Delta^*)$).

3.2 Les lucarnes. Les triangulations signées représentées fig. 1, avec p et c impairs, seront appelées *lucarnes* et seront notées $L(p,c)$ ou plus simplement L. On note $Lh(p,c+3)$ (resp. $Lb(p,c-3)$) la moitié haute (resp. basse) d'une lucarne L coupée sur la ligne $y=c$.

3.3 Gain d'une lucarne (Itenberg [?]). *Soit $L(p,c)$ une lucarne dont le support est dans X_d. Le gain de $[L \subset H_d]$ est de 1 ovale.*

La figure 2 schématise la démonstration quand $(p,c)=(3,3)$. Le décompte est le même pour toute autre position de la lucarne dans X_d. On observe sur cette figure que **(a)** Le gain se décompose en fait en un gain intérieur de 2 ovales et un gain au bord de -1 ovale. **(b)** La perte de 1 ovale sur le bord est localisée aux points $(p,-c-3)$ et $(p,-c+3)$: les deux petits ovales de H_d entourant ces points se rejoignent en un gros ovale de $[L \subset H_d]$. **(c)** Les autres petits ovales de H_d qui coupent ∂L sont conservés.

4 Les multilucarnes.

Soit $\alpha \in Z$, et $f_{\alpha,P}$ la transvection affine sur R^2 laissant fixe le point entier P, de partie vectorielle $(x,y) \mapsto (x+\alpha y, y)$. Si $T=(\Delta, \mathcal{T}, s)$, on pose $s'(f_{\alpha,P}(p,q))=s(p,q)$ et on note $f_{\alpha,P}(T)$ la triangulation signée $(f_{\alpha,P}(\Delta), f_{\alpha,P}(\mathcal{T}), s')$.

4.1 Construction d'une multilucarne. Soient quatre points $P=(p,c+3), P'=(p',c-3), E=(e,c), E'=(e',c)$ tels que: $e, c-3, p$ soient positifs ou nuls, c, p soient impairs, e soit pair, $e'>e$, $e-p \equiv 0 \ mod\, 3$, et $p-p' \equiv e-e' \equiv 0 \ mod\, 6$. La réunion des $f_{\alpha,P}(Lh(P))$ et des $f_{\alpha,P'}(Lb(P'))$ dont les supports remplissent le quadrilatère de sommets E, P, E', et P' (voir fig. 3) est une triangulation signée que l'on appellera *multilucarne* et que l'on notera $ML(P,P',E,E')$ ou plus simplement ML. L'entier pair $m=(e'-e)/3$ sera appelé la *largeur* de ML. Une multilucarne de largeur $m=2$ sera appelée une *lucarne tordue* et notée $\widetilde{L}$ au lieu de ML.

4.2 Gain d'une multilucarne. *Soit ML une multilucarne de largeur m dont le support est dans X_d. Le gain de $[ML \subset H_d]$ est de $m-1$ ovales.*

ML est une réunion $\cup\widetilde{L}$ de $m/2$ lucarnes tordues. L'intérieur $int(ML)$ se décompose donc en $\cup int(\widetilde{L})$ et $\cup\partial\widetilde{L} \setminus \partial ML$. On déduit de 3.3(a) qu'on gagne m ovales dans $\cup int(\widetilde{L})$

et de 3.3(c) qu'on ne gagne ni ne perd rien de plus dans $\cup\partial\widetilde{L} \setminus \partial ML$. Le gain intérieur est donc m. Enfin la perte de un ovale de chaque $\widetilde{L}$ étant localisée aux mêmes points $(p, -c-3)$ et $(p', -c+3)$, on déduit de 3.3(b) et (c) que le gain au bord est -1.

4.3 Empilement des multilucarnes. Pour tout entier $k \geq 5$ et pour $t = 0, 1, 2, \ldots, [(k-5)/2]$ on note $x_t = 2k - (4t+3)$. On place sur chaque ligne $y = 4t+3$ une multilucarne $ML_t = ML(P_t, P'_t, E_t, E'_t)$ définie selon la valeur de $x_t \, mod\, 3$ par:

	$x_t \equiv 2 \, mod\, 3$	$x_t \equiv 1 \, mod\, 3$	$x_t \equiv 0 \, mod\, 3$
P_t	$(3, 4t+6)$	$(2k-4t-1, 4t+6)$	$(3, 4t+6)$
E_t	$(0, 4t+3)$	$(4, 4t+3)$	$(0, 4t+3)$
P'_t	$(3, 4t)$	$(2k-4t+5, 4t)$	$(2k-4t+5, 4t)$
E'_t	$(2k-4t+2, 4t+3)$	$(2k-4t+2, 4t+3)$	$(2k-4t, 4t+3)$
$\Rightarrow$ largeur	$k-2t+1$	$k-2t-1$	$k-2t$

Si $k = 2l+6$, on translate la dernière multilucarne ML_l par le vecteur $(2,0)$. Ainsi ML_{l-1} et ML_l sont disjointes. Notons $\cup ML$ la réunion des ML_t (fig. 4).

4.4 Gain final. *Le gain de* $[\cup ML \subset H_d]$, $d = 2k$, *est de* $[(k^2 - 7k + 16)/6]$.

On additionne les gains de chaque multilucarne (donnés en **4.2**) en distinguant les deux cas $k = 2l+6$ et $k = 2l+5$ avec leurs trois sous-cas $l \equiv 0, 1$ ou $2 \, mod\, 3$.

5 Convexité.

Considérons deux opérations élémentaires qui permettent d'affiner une triangulation $\mathcal{T}$. L'opération A consiste à rajouter un sommet à l'intérieur d'un triangle (lequel se subdivise ainsi en trois nouveaux triangles). L'opération B consiste à rajouter un sommet sur une arête commune à deux triangles adjacents (lesquels se subdivisent chacuns en deux nouveaux triangles).

5.1 Lemme. *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation convexe d'un polygone Δ, et $\mathcal{T}'$ une triangulation plus fine obtenue par A ou B. Alors $\mathcal{T}'$ est convexe.*

Notons t_i les triangles de $\mathcal{T}$, et si ν est une fonction donnée par définition (section 2) de la convexité de $\mathcal{T}$, notons ν_i la fonction affine sur Δ égale à ν sur t_i. Soit s le nouveau sommet. La convexité de ν nous assure qu'on peut choisir une valeur $\nu'(s)$ entre $\nu(s)$ et $sup\{\nu_i(s) \ , \ t_i \not\ni s\}$. La fonction ν' prenant la valeur $\nu'(s)$ en s, affine sur chaque nouveau triangle de la subdivision et égale à ν ailleurs, montre que $\mathcal{T}'$ est convexe.

5.2 Corollaire. *Pour l'empilement $\cup ML$ de* **4.3**, *on peut trouver un élément de* $[\cup ML \subset H_d]$, *dont la triangulation $\mathcal{T}$ est convexe.*

La figure 5 donne une première triangulation convexe grossière de X_d. En utilisant A et B on affine cette triangulation en rajoutant **(1)** d'abord tous les points E_t, E'_t, P_t, et P'_t, **(2)** puis tous les points entiers entre les E_t et les E'_t, **(3)** ensuite tous les autres points entiers du support de $\cup ML$, et **(4)** enfin tous les autres points entiers extérieurs au support. On vérifie que la triangulation primitive finale $\mathcal{T}$ contient celle de $\cup ML$. Le lemme 5.1 nous assure que $\mathcal{T}$ est convexe.

6 Démonstration du théorème 1.

Pour $d = 2k \geq 10$, les courbes de Viro associées aux éléments de $[\cup ML \subset H_d]$ ont $R(k) + [(k^2 - 7k + 16)/6]$ ovales pairs (proposition **4.4**). Le corollaire **5.2** et le Théorème de Viro nous assurent l'existence d'une courbe algèbrique de degré d sur RP^2 qui a ce même nombre d'ovales pairs.

7 Remarques.

Les courbes du théorème s'éloignent des M-courbes (courbes ayant le maximum d'ovales) de façon linéaire (ce sont des $(M-2l-2)$-courbes, $l = [\frac{k-5}{2}]$) tout en donnant des contre-exemples d'ordre quadratique à la conjecture. En plongeant seulement la multilucarne ML_0 (voir **4.3**) dans H_d, on obtient des $(M-2)$-courbes qui sont des contre-exemples d'ordres linéaires. On ne sait toujours pas si la conjecture est vraie ou non pour les M-courbes ni même pour les M-courbes de Viro.

Le gain obtenu au théorème 1 est encore suceptible d'être amélioré. Notamment Itenberg [?] a amélioré le terme quadratique en $k^2/6+k^2/48$ en casant des lucarnes tordues et couchées dans l'espace (qui croît avec le degrés) entre les multilucarnes. Observons que d'après les inégalités de Harnack [?] et de Petrowski [?] on ne peut pas obtenir un gain d'ordre supérieur à $k^2/4$ (voir aussi [?] et [?]). En utilisant des multilucarnes de largeurs impaires, on peut aussi améliorer le terme linéaire.

La méthode des multilucarnes donne aussi des contre-exemples à la conjecture pour les ovales impairs. On peut par exemple décaler l'empilement précédent de multilucarnes $\cup ML$ sur les lignes $y = 4t + 5$. On complète sur X_d la triangulation en imposant les arêtes $((0,0),(2k-1,1))$ et $((0,1),(2k-2,2))$, et on complète la distribution de signes en une distribution de Harnack sauf à l'origine, $s(0,0) = -1$. On ne perd des ovales que de façon linéaire, le gain final en ovales impairs reste d'ordre $k^2/6$. Ici aussi on peut caser des lucarnes supplémentaires pour que le gain augmente en $k^2/6 + k^2/48$.

Je tiens à remercier V. Kharlamov pour son aide.

Université Louis Pasteur
U.F.R. de Mathématique et Informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex, France.