

Magistère de Mathématiques
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex

D.E.A. d'Algèbre

Mémoire de D.E.A.

Construction Combinatoire

De Surfaces Algébriques Réelles

↙ *Master student*
effectué par Bihan Frédéric

18 septembre 1995

Table des matières

1	generalites.	3
1.1	Restrictions sur les courbes.	3
1.2	Restrictions sur les surfaces.	4
1.3	Surfaces de degré 3.	5
1.4	Surfaces de degré 4.	6
2	Les T-surfaces.	12
2.1	Construction d'une T -surface de degré m	12
2.2	Caractéristique d'Euler d'une T -surface.	13
2.3	Résultats généraux sur les T -surfaces.	14
3	T-surfaces de degré 3 et 4 dans $\mathbb{R}P^3$.	20
3.1	T -Surfaces de degré 3.	20
3.2	T -Surfaces de degré 4.	20
3.2.1	la T -surface de degré 4 de caractéristique d'Euler minimale.	20
3.2.2	Une triangulation donnant beaucoup de T -surfaces	22

Introduction

On considère une surface algébrique non singulière dans $\mathbb{R}P^3$ donnée par un polynôme de degré d homogène en 4 variables et à coefficients réels.

la question de la classification topologique de telles surfaces pour un degré fixé fut posée dans le 16^{ème} Problème d'Hilbert. Pour y répondre, deux approches aussi nécessaires l'une que l'autre sont étudiées.

On cherche à apporter des restrictions sur le type topologique de ces surfaces; ces restrictions se déduisant à la fois de leur nature topologique et algébrique (chapitre 1). On cherche parallèlement à construire des surfaces de type topologique prescrit. L'objectif de ce mémoire était d'étudier une construction combinatoire de ces surfaces (pour de petits degrés) inspirée d'une méthode plus générale due à Viro.

La définition et quelques propriétés générales d'une T -surface de degré d sont décrites dans le chapitre 2.

Le bilan de ce mémoire aura été la construction de toutes les surfaces de degré 3 et d'un grand nombre de surfaces de degré 4; tous ces résultats sont regroupés dans le chapitre 3.

Chapitre 1

generalites.

1.1 Restrictions sur les courbes.

On considère une courbe réelle A donnée par un polynôme f homogène en 3 variables, de degré d et à coefficients dans \mathbb{R} . On note $\mathbb{C}A$ (resp $\mathbb{R}A$) l'ensemble des points réels (resp complexes) de A .

On suppose les deux courbes sans singularités:

$\mathbb{C}A$ est alors une surface de Riemann de genre $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, et $\mathbb{R}A$ est une variété topologique compacte de dimension 1, donc homéomorphe à une union disjointe de cercles. Ces cercles se présentent sous deux formes distinctes: ceux séparant $\mathbb{R}P^2$ en deux parties connexes disjointes (comme l'immersion classique d'un cercle dans \mathbb{R}^2) appelés ovals, et ceux ne séparant pas $\mathbb{R}P^2$ (comme $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$). Si le degré d du polynôme f est pair alors la notion de signe de f en un point du plan projectif est bien définie; dans ce cas la courbe sera uniquement constituée d'ovals. Ces ovals peuvent être emboîtés les uns dans les autres, on appellera "nid" l'ensemble formé par un ovale et les ovals qu'il contient.

Nous donnons maintenant quelques résultats importants pour la classification à isotopie près des courbes de $\mathbb{R}P^2$ d'un degré d donné (voir [6],[1]):

(a)-(Harnack) le nombre de composantes d'une courbe n'excède pas $g + 1$.

Une courbe avec $g + 1$ composantes sera appelée M -courbe.

(b)-(Hilbert) Pour une courbe de degré $2k$, le nombre d'ovals dans un nid, ou dans deux nids disjoints n'excède pas k .

Suivent les théorèmes de Petrowsky et de Rokhlin, pour lesquels nous avons besoin de diviser les ovals en deux classes: les ovals pairs et les ovals impairs. La courbe $\mathbb{R}A$ divise $\mathbb{R}P^2$ en deux parties disjointes B^+ et B^- définies par:

$$B^+ = \{(x_i) \in \mathbb{R}P^2 \mid f(x_i) \geq 0\},$$

$$B^- = \{(x_i) \in \mathbb{R}P^2 \mid f(x_i) \leq 0\}.$$

On suppose que f est négatif en dehors de tous les ovales; alors on dira qu'un ovale est pair (resp impair) s'il est la frontière extérieure d'une composante de B^+ (resp B^-). Soit P le nombre d'ovales pairs, N le nombre d'ovales impairs. On peut ainsi citer les théorèmes:

(c)-(Petrowsky) pour toute courbe de degré $2k$, on a

$$-\frac{3}{2}k(k-1) \leq P - N \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1.$$

(d)-(Rokhlin) Pour une M -courbe de degré $2k$, on a

$$P - N \equiv k^2 \pmod{8}.$$

Ces quelques résultats permettent d'obtenir pour des degrés d assez petits la classification à isotopie près des courbes réelles de degré d dans $\mathbb{R}P^2$. Par exemple, pour $d = 3$, on obtient une liste réduite à trois éléments: une courbe avec une composante "non-ovale", une courbe avec deux composantes, un ovale et un non-ovale et la courbe vide.

Pour $d = 4$, on obtient une M -courbe avec 4 ovales; puis des courbes avec 3 (resp. 2, 1) ovales, une courbe avec un nid de deux ovales et enfin la courbe vide.

1.2 Restrictions sur les surfaces.

On considère une surface algébrique X dans $\mathbb{R}P^3$ donnée par un polynôme de degré d homogène en 4 variables et à coefficients réels. Soit $\mathbb{R}X$ (resp $\mathbb{C}X$) l'ensemble des points réels (resp complexes) de X .

$\mathbb{R}X$ constitue une variété topologique compacte de dimension 2, orientable ou non suivant la parité de d .

Si d est pair alors la surface est orientable: comme pour les courbes, le signe de f en un point de $\mathbb{R}P^3$ est alors bien défini; donc une composante connexe de la surface aura effectivement un intérieur sur lequel f sera de signe constant.

Une surface de degré d pair aura ainsi des composantes connexes orientables donc homéomorphes à des sphères avec ou sans anses.

Si d est impair, la surface sera non orientable: une seule de ses composantes sera non orientable et sera ainsi homéomorphe au plan projectif avec ou sans anses.

Voici maintenant une liste de restrictions connues sur les types topologiques des surfaces de degré d , totalement analogue à celle donnée pour les courbes ([2], [4], [1], [5]).

(A)-(Comessatti) $|\chi(\mathbb{R}X) - 1| \leq h^{1,1}(\mathbb{C}X) - 1$,
avec $h^{1,1}(\mathbb{C}X) = \frac{2}{3}d^3 - 2d^2 + \frac{7}{3}d$

(B)-(Smith-Thom) $\dim H_*(\mathbb{R}X) \leq \dim H_*(\mathbb{C}X)$,
avec $\dim H_*(\mathbb{R}X) \equiv \dim H_*(\mathbb{C}X) \pmod{2}$,
où $\dim H_*$ est égal à la somme des rangs des groupes d'homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}/2$.

On a de plus pour une surface $\mathbb{C}X$ de degré d :

$$\dim H_*(\mathbb{C}X) = d^3 - 4d^2 + 6d.$$

On appelle M -surface une surface $\mathbb{R}X$ vérifiant $\dim H_*(\mathbb{R}X) = \dim H_*(\mathbb{C}X)$,
et $(M-1)$ -surface une surface vérifiant $\dim H_*(\mathbb{R}X) = \dim H_*(\mathbb{C}X) - 2$.

(C)-((Rokhlin) Toute M -surface vérifie la congruence:

$$\chi(\mathbb{R}X) \equiv \sigma(\mathbb{C}X) \pmod{16}$$

où $\sigma(\mathbb{C}X)$ est la signature de la forme quadratique donnée par la forme d'intersection sur $H_2(\mathbb{C}X, \mathbb{Z}/2)$.

Pour une surface de degré d , on a $\sigma(\mathbb{C}X) = -\frac{1}{3}d^3 + \frac{4}{3}d$. On a le théorème analogue pour les $M-1$ -surfaces:

(D)-(Kharlamov, Gudkov, Krakhnov) Toute $(M-1)$ -surface vérifie la congruence:

$$\chi(\mathbb{R}X) \equiv \sigma(\mathbb{C}X) \pm 2 \pmod{16}.$$

Il faut dans certains cas ajouter à ces restrictions topologiques des restrictions algébriques données principalement par le théorème de Bezout. Par exemple, l'intersection d'un plan avec une surface $\mathbb{R}X$ de degré d donne une courbe de degré d ; les types topologiques de ces courbes sont dans certains cas mieux connus que ceux des surfaces du même degré.

Dans la suite, S , P désigneront respectivement la sphère et le plan projectif; $S(k)$, $P(k)$ la sphère et le plan projectif avec k anses (on désignera plutôt le tore par T). Le problème de la classification topologique des surfaces algébriques d'un degré donné dans $\mathbb{R}P^3$ fait partie du 16^{ème} Problème d'Hilbert; pour les degrés 2 et 3, la réponse est connue depuis déjà longtemps, la première difficulté apparaît pour le degré 4.

1.3 Surfaces de degré 3.

Pour une surface $\mathbb{R}X$ de degré 3, on a les valeurs:

$$h^{1,1}(\mathbb{C}X) = 7,$$

$$\sigma(\mathbb{C}X) = -5,$$

$$\dim H_*(\mathbb{C}X) = 9.$$

Les restrictions précédemment citées donnent alors:

$$-5 \leq \chi(\mathbb{R}X) \leq 7,$$

$$\dim H_*(\mathbb{R}X) \leq 9,$$

$$\chi(\mathbb{R}X) \equiv -5 \pmod{16} \text{ pour une } M\text{-surface;}$$

$$\chi(\mathbb{R}X) \equiv -7 \pm 2 \pmod{16} \text{ pour une } (M-1)\text{-surface.}$$

Les deux premières inégalités imposent que le nombre de composantes connexes, noté c , est d'au plus 4. Les surfaces avec $c = 4$ et $c = 3$ vérifiant les deux inégalités sont:

$$3S \amalg P; 2S \amalg P(1); 2S \amalg P; S \amalg T \amalg P.$$

Chacune de ces surfaces est soit une M -surface, soit une $(M-1)$ -surface, mais aucune d'entre elle ne satisfait à la congruence prescrite; le nombre de composantes connexes c est donc majoré par 2.

Maintenant l'intersection de la surface avec un plan donne une courbe de degré 3 qui doit être du type: un ovale ou un ovale avec un non ovale. Cette restriction algébrique conduit à la liste définitive des types topologiques des surfaces de degré 3; on obtient:

$P(3)$ (M -surface), ← M

$P(2)$ ($(M-1)$ -surface), ←

$P(1)$,

P ,

$S \amalg P$,

et la surface vide.

$T \amalg T$,

$P(1) \amalg T$ are discarded by Bezout's sections!!!

1.4 Surfaces de degré 4.

La classification topologique des surfaces algébriques de degré 4 dans $\mathbb{R}P^3$ a été donnée par Kharlamov dans sa thèse ([2], [4], [7]). En fait il donna également 2 classifications plus fortes de ces surfaces: la classification à isotopie réelle près et la classification à isotopie rigide près.

Pour une surface $\mathbb{R}X$ de degré 4, on a les valeurs:

$$h^{1,1}(\mathbb{C}X) = 20,$$

Remember

$$h^1 = \frac{2}{3}d^2 - 2d + \frac{7}{3}d$$

$$= -\frac{d^2}{3} + \frac{4d}{3}$$

$$g(X) = d^3 - 4d^2 + 6d$$

$$\sigma(\mathbb{C}X) = -16,$$

$$\dim H_*(\mathbb{C}X) = 24.$$

On obtient les restrictions topologiques suivantes:

$$-18 \leq \chi(\mathbb{R}X) \leq 20,$$

$$\dim H_*(\mathbb{R}X) \leq 24,$$

$$\chi(\mathbb{R}X) \equiv -16 \pmod{16} \text{ pour une } M\text{-surface;}$$

$$\chi(\mathbb{R}X) \equiv -16 \pm 2 \pmod{16} \text{ pour une } (M-1)\text{-surface.}$$

Les deux premières inégalités imposent alors un nombre de composantes connexes d'au plus 12. Comme pour les surfaces de degré 3, les restrictions imposées par les congruences donnent finalement une borne égale à 10 pour c .

Théorème 1.1 (voir par exemple [7]) *Toute surface de degré 4 possédant deux anses sur deux composantes connexes distinctes est soit du type topologique $T \amalg T$, soit du type:*

$$nS \amalg S(k),$$

(n et k entiers).

Tengo que aprender Topología !!!

Preuve:

on considère $\mathbb{C}X$ l'ensemble des points complexes de la surface algébrique X de degré d dans $\mathbb{R}P^3$. La forme d'intersection définit une forme quadratique sur $E = H_2(\mathbb{C}X, \mathbb{Z})$; la signature de cette forme a déjà été notée $\sigma(\mathbb{C}X)$.

La conjugaison complexe notée C est un automorphisme de $\mathbb{C}X$ et vérifie $C^2 = Id$; on peut donc décomposer E en deux sous espaces propres:

$$E = E_1 \oplus E_{-1}.$$

On note σ_1 et σ_{-1} les signatures respectives de la forme quadratique en restriction à E_1 et à E_{-1} ; on a alors:

$$\sigma(\mathbb{C}X) = \sigma_1 + \sigma_{-1}.$$

On appelle signature de la conjugaison la valeur

$$\sigma(C) = \sigma_1 - \sigma_{-1}.$$

On connaît les résultats suivants ([1]):

$$\sigma(\mathbb{C}X) = [\mathbb{R}X \circ \mathbb{R}X]_{\mathbb{C}X} \text{ (corollaire du théorème d'Atiyah et Singer)}$$

et :

$$-\chi(\mathbb{R}X) = [\mathbb{R}X \circ \mathbb{R}X]_{\mathbb{C}X},$$

où le second membre désigne l'auto-intersection de $\mathbb{R}X$ dans $H_2(\mathbb{C}X, \mathbb{Z})$. On peut décomposer chaque espace propre en deux sous espaces sur lesquels la forme quadratique sera définie positive et définie négative.

On obtient ainsi la décomposition de E en 4 sous espaces:

$$E = E_1^1 \oplus E_{-1}^1 \oplus E_1^{-1} \oplus E_{-1}^{-1}$$

de dimensions respectives a, b, c, d .

Par exemple E_1^{-1} sera le plus grand sous espace de E sur lequel C agira comme l'identité et où la forme quadratique sera définie négative.

On obtient alors 3 égalités:

$$a + b + c + d = \dim H_2(\mathbb{C}X, \mathbb{Z}),$$

$$a + b - c - d = \sigma(\mathbb{C}X),$$

$$a + d - b - c = -\chi(\mathbb{R}X).$$

On peut également appliquer le théorème du point fixe de Lefschetz à C et obtenir:

$$a + c - b - d = \chi(\mathbb{R}X) - 2.$$

Ces égalités donnent plus particulièrement:

$$a = 1.$$

On considère les classes d'homologie des composantes connexes de $\mathbb{R}X$ dans E : $[S]$, $[T]$ ou $[S(k)]$. Chacune de celles ci vit sont dans l'espace propre E_1 . Il reste alors à déterminer le signe de la forme quadratique sur ces composantes. Pour cela on peut utiliser les deux corollaires du théorème d'Atiyah et Singer; on obtient pour $S(k)$ par exemple:

$$[S(k) \circ S(k)]_{\mathbb{C}X} = -\chi S(k);$$

on en déduit:

$$[S \circ S]_{\mathbb{C}X} = -2$$

$$[T \circ T]_{\mathbb{C}X} = 0$$

$$[S(k) \circ S(k)]_{\mathbb{C}X} = 2k - 2.$$

Une composante du type $S(k)$ se trouve donc dans E_1^1 qui est de dimension $a = 1$; ce qui conduit à:

la surface $\mathbb{R}X$ a au plus une composante du type $S(k)$.

Supposons maintenant qu'il existe une surface avec deux composantes du type $S(k)$ et T ; alors les deux éléments $[S(k)]$ et $[S(k) + T]$ de E seraient tous les deux dans E_1^1 , tout en étant linéairement indépendants; ce qui aboutirait à une contradiction avec la dimension de E_1^1 .

Il reste finalement à examiner le cas où l'on aurait une surface avec plus de 3 tores. L'intersection d'un plan avec $\mathbb{R}X$ donne une courbe de degré 4 dont on connaît la liste des types d'isotopie (voir chapitre précédent). On obtient alors immédiatement que $\mathbb{R}X$ ne peut avoir plus de deux composantes connexes homéomorphes à un tore, et qu'alors la seule surface existante a pour type $T \amalg T$. \square

Les restrictions topologiques et le théorème donne la liste qui suit, on notera c le nombre de composantes connexes de la surface.

Surfaces algébriques dans $\mathbb{R}P^3$ de degré 4 classées par nombre de composantes connexes.

$c = 10$:

$S(2) \amalg 9S$ (M -surface),
 $T \amalg 9S$ ($(M - 1)$ -surface),
 $10S$,

$c = 9$:

$T \amalg 8S$,
 $9S$,

$c = 8$:

$S(2) \amalg 7S$,
 $T \amalg 7S$,
 $8S$,

$c = 7$:

$S(3) \amalg 6S$, $S(2) \amalg 6S$, $T \amalg 6S$,
 $7S$,

$c = 6$:

$S(6) \amalg 5S$ (M -surface),
 $S(5) \amalg 5S$ ($(M - 1)$ -surface),
 $S(4) \amalg 5S$, $S(3) \amalg 5S$, $S(2) \amalg 5S$,
 $T \amalg 5S$, $6S$,

$c = 5$:

$S(6) \amalg 4S$ ($(M - 1)$ -surface),
 $S(5) \amalg 4S$, $S(4) \amalg 4S$, $S(3) \amalg 4S$,
 $S(2) \amalg 4S$, $T \amalg 4S$, $5S$,

$c = 4$:

$S(6) \amalg 3S$, $S(5) \amalg 3S$, $S(4) \amalg 3S$,
 $S(3) \amalg 3S$, $S(2) \amalg 3S$, $T \amalg 3S$,
 $3S$,

$c = 3$:

$S(7) \amalg 2S$, $S(6) \amalg 2S$, $S(5) \amalg 2S$,
 $S(4) \amalg 2S$, $S(3) \amalg 2S$, $S(2) \amalg 2S$,
 $T \amalg 2S$, $3S$,

$c = 2$:

$S(10) \amalg S$ (M -surface),
 $S(9) \amalg S$ ($(M - 1)$ -surface),
 $S(8) \amalg S$, $S(7) \amalg S$, $S(6) \amalg S$,
 $S(5) \amalg S$, $S(4) \amalg S$, $S(3) \amalg S$,
 $S(2) \amalg S$, $T \amalg S$, $2S$,

c = 1:

		$S(10)$		$((M - 1)\text{-surface}),$
$S(9),$	$S(8),$	$S(7),$	$S(6),$	
$S(5),$	$S(4),$	$S(3),$	$S(2),$	
	$T,$	$S.$		

Chapitre 2

Les T -surfaces.

Dans le premier chapitre, on énonce certains résultats qui permettent, pour les degrés 2, 3, 4 d'obtenir la classification topologique des surfaces algébriques dans $\mathbb{R}P^3$. Le chapitre 2 est basé sur la construction de ces surfaces, on peut construire certaines surfaces d'une manière combinatoire: les T -surfaces. Cette construction ainsi que celle des T -courbes est basée sur la méthode de Viro ([8]).

2.1 Construction d'une T -surface de degré m .

Soit T le tétraèdre dans \mathbb{R}^3 avec pour sommets les points $(0, 0, 0)$, $(m, 0, 0)$, $(0, m, 0)$, $(0, 0, m)$.

Soit τ une triangulation de T dont les sommets sont des points entiers et possédant chacun un signe $+$ ou $-$.

On considère les 8 transformations données par les 3 symétries par rapport aux plans d'axes et leurs composées. On note \mathcal{T} la réunion de T avec ses images par ces transformations: \mathcal{T} est l'enveloppe convexe des points $(\pm m, 0, 0)$, $(0, \pm m, 0)$, $(0, 0, \pm m)$.

On étend la triangulation τ de T à une triangulation de \mathcal{T} qui soit symétrique par rapport aux plans d'axes ainsi que la distribution de signes initiale à une distribution sur T de la manière qui suit.

Soit P un sommet de la triangulation de \mathcal{T} , $s_*(P)$ le sommet symétrique de P par rapport à l'un des 3 plans d'axes, alors $s_*(P)$ aura le même signe que P si la distance qui le sépare du plan d'axe en question est paire, le signe opposé sinon.

On peut définir cette distribution de signes d'une manière plus algébrique: Soit $m = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in (\mathbb{Z}_2)^3$, m représentera la région $\{(x, y, z) \mid (-1)^{\epsilon_1} x \geq 0, (-1)^{\epsilon_2} y \geq 0, (-1)^{\epsilon_3} z \geq 0\}$; de telle manière que l'on puisse attribuer à chaque copie de T un élément de $(\mathbb{Z}/2)^3$. Par exemple la copie de T contenue dans $\{(x, y, z) \mid x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$ correspondra à $m = (1, 0, 1)$ et T à $m = (0, 0, 0)$.

Soient P un sommet de la triangulation de \mathcal{T} , \tilde{P} le point de T dont P est l'image par l'une des 8 transformations, m l'élément de $(\mathbb{Z}/2)^3$ correspondant à P .

La valeur 1 sera attribuée au signe $-$, tandis que 0 le sera au signe $+$. Le signe de P sera alors:

$$\text{sign}(P) = \text{sign}(\tilde{P}) + m \cdot \tilde{P} \pmod{2}.$$

Soit t un tétraèdre de \mathcal{T} dont les sommets n'ont pas même signe (on dira qu'il est non vide). Pour chacun des triangles formant une face de t , si les 3 sommets n'ont pas même signe; traçons, dans le triangle, le segment séparant les $+$ des $-$. La réunion de ces segments formera dans t le contour d'un triangle si 3 des sommets de t ont même signe, d'un quadrilatère dans le cas contraire. La réunion de tous ces triangles et quadrilatères se notera \mathcal{L} ;

la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ est appelée "the result of affine combinatorial patchworking".

Recollons maintenant les faces de \mathcal{T} par la symétrie centrale par rapport à l'origine; l'espace Γ ainsi obtenu est homéomorphe à $\mathbb{R}P^3$. On note par Υ l'image de \mathcal{L} dans Γ ; la paire (Γ, Υ) est alors appelée "the result of projective combinatorial patchworking".

Une triangulation de \mathcal{T} est convexe, s'il existe une fonction convexe, affine par morceaux, linéaire sur chaque tétraèdre de \mathcal{T} mais non linéaire sur la réunion de deux tétraèdres. Sous l'hypothèse que la triangulation de \mathcal{T} est convexe, on a le théorème suivant ([9]):

Théorème 2.1 *Il existe une surface réelle non singulière de degré m et un homéomorphisme de \mathbb{R}^3 dans l'intérieur de \mathcal{T} dont l'image des points réels de la surface soit \mathcal{L} . De plus, il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}P^3$ dans Γ , dont l'image de la surface projective correspondante soit Υ .*

2.2 Caractéristique d'Euler d'une T -surface.

La méthode de calcul de la caractéristique d'Euler d'une T -surface qui suit est due à I. Itenberg ([3]).

On se donne la paire (Γ, Υ) ; Υ est une partition d'une T -surface de degré 4 $\mathbb{R}X$; si b_0, b_1, b_2 désignent le nombre de sommets, d'arêtes et le nombre de faces de dimension 2 (triangle ou quadrilatère) de Υ alors on a la formule bien connue:

$$\chi(\mathbb{R}X) = b_0 - b_1 + b_2.$$

Comment peut calculer b_2 , par exemple, à partir de T et de sa triangulation τ dont les sommets sont équipés de signes?

Soit t , un tétraèdre de T , de sommets a_0, a_1, a_2, a_3 dotés de signes respectifs $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. On cherche à calculer la contribution de t et de ses 7 copies à b_2 ; on veut donc trouver le nombre de copies non vides de t . Pour cela, il suffit évidemment de calculer le nombre de copies qui soient vides.

Soit \tilde{t} la copie de t de sommets $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ située dans la région correspondante à $m \in (\mathbb{Z}/2)^3$; \tilde{t} est vide si et seulement si

$$\text{sign}(\tilde{a}_0) = \text{sign}(\tilde{a}_1) = \text{sign}(\tilde{a}_2) = \text{sign}(\tilde{a}_3)$$

dans \mathbb{Z}^2 ; ce qui est équivalent au système:

$$\begin{cases} m \cdot (a_0 + a_1) = \text{sign}(a_0) + \text{sign}(a_1) \\ m \cdot (a_0 + a_2) = \text{sign}(a_0) + \text{sign}(a_2) \\ m \cdot (a_0 + a_3) = \text{sign}(a_0) + \text{sign}(a_3) \end{cases}$$

On a donc une équation en $m \in (\mathbb{Z}/2)^3$ du type

$$\mathcal{A} \cdot m = s$$

à résoudre.

Le nombre de solutions se déduit donc du rang de la matrice \mathcal{A} à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$, en particulier si les vecteurs $a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_3 - a_0$ définissant le tétraèdre sont linéairement indépendants dans $(\mathbb{Z}/2)^3$, 7 copies de t seront non vides.

On procède de la même manière pour calculer b_0 et b_1 à partir des arêtes et triangles contenus dans T . De façon générale un k -simplexe de T situé dans \mathbb{R}^n et défini par k vecteurs linéairement indépendants de $(\mathbb{Z}/2)^n$ donnera $2^n - 2^{n-k}$ copies non vides.

2.3 Résultats généraux sur les T -surfaces.

On peut distinguer 3 classes de triangulation de T .

une triangulation n'utilisant pas tous les points entiers sera nommée triangulation arbitraire.

Les triangulations utilisant tous les points entiers sont elles mêmes divisées en 2 classes.

Une triangulation sera qualifiée de primitive si tous les tétraèdres qu'elle contient sont de volume $\frac{1}{6}$ (un tel tétraèdre sera dit primitif). Cette condition équivaut à dire que pour chaque triplet de vecteurs définissant un tétraèdre de T , la matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$ associée est de rang maximal, ou bien que chaque tétraèdre de T donne 7 copies non vides dans \mathcal{T} . Sinon on dira que la triangulation est maximale. On peut énoncer certaines propriétés importantes des T -surfaces provenant de triangulations primitives et maximales (voir [3]).

Théorème 2.2 Soit $\mathbb{R}X$ une T -surface issue d'une triangulation primitive, sa caractéristique d'Euler vérifie:

$$\chi(\mathbb{R}X) = -\frac{1}{3}m^3 + \frac{4}{3}m.$$

Il faut remarquer que $-\frac{1}{3}m^3 + \frac{4}{3}m$ est égal à $\sigma(\mathbb{C}X)$.

Preuve.

Calcul de b_2 .

T contient m^3 tétraèdres primitifs, chacun donnant 7 copies non vides: donc $b_2 = 7m^3$.

calcul de b_1 .

Chacune des 4 faces d'un tétraèdre de la triangulation est soit située sur l'une des faces de T , soit commune à un autre tétraèdre (on parlera alors de face intérieure). Le nombre de triangles sur les faces de T est égal à $4m^2$. Le nombre de triangles intérieurs est donc égal à $\frac{4m^3 - 4m^2}{2}$. Un triangle de T est défini par 2 vecteurs linéairement indépendants dans $(\mathbb{Z}/2)^3$ et donne donc, 6 copies non vides s'il est intérieur, 3 copies non vides s'il est situé sur les faces de T (3 des faces de T sont sur les plans d'axes, sur la dernière, on doit faire des identifications). On obtient donc $b_1 = 12m^2(m - 1) + 12m^2$, soit finalement:

$$b_1 = 12m^3.$$

Calcul de b_0 .

Chaque arête de T donne un vecteur non nul de $(\mathbb{Z}/2)^3$; donc une arête intérieure donne 4 copies non vides, une arête sur un plan d'axe donne 2 copies non vides, une arête sur un axe donne 1 copie non vide. Le nombre d'arêtes sur les axes et plans d'axe est aisé à obtenir (il ne dépend pas de m). Pour calculer le nombre d'arêtes intérieures (qui ne dépend pas non plus de m), on peut se rappeler que Γ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^3$ donc de caractéristique d'euler égale à 1. On a une triangulation de Γ , on connaît le nombre de simplexes de dimension 0, 2, 3; en se servant de la formule liant la caractéristique d'euler de Γ à ces nombres, on trouve le nombre total d'arêtes de la triangulation, et donc le nombre d'arêtes intérieures qui est égal à $\frac{7}{6}m^3 - 3m^2 + \frac{11}{6}m$. On obtient finalement:

$$b_0 = \frac{14}{3}m^3 + \frac{4}{3}m.$$

Il reste alors à calculer $b_0 - b_1 + b_2$ pour terminer. □

On appelle tétraèdre maximal un tétraèdre non primitif d'une triangulation maximale, c'est donc un tétraèdre dont le déterminant de la matrice associée est nul modulo 2. Ce déterminant donnant, au facteur $1/6$ près, le volume du tétraèdre, un tétraèdre sera maximal si son volume est de la forme $\frac{2k}{6}$.

On vérifie aisément que le tétraèdre ne contenant aucun point entier hormis ses sommets a_0, a_1, a_2, a_3 , les 3 vecteurs $u_i = a_i - a_0$ $i = 1, 2, 3$ formant les lignes de la matrice associée vérifient la seule relation:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad \text{mod } 2.$$

↑ rank = 2

Parce que even normal field

Un tétraèdre maximal donnera donc 8 copies non vides si le produit des signes de ces sommets est $-$, 6 copies non vides sinon. On se donne une triangulation maximale. Soit M le nombre de tétraèdres maximaux de la triangulation, V le volume total occupé par ces tétraèdres, n le nombre de tétraèdres maximaux dont le produit des signes des sommets est $-$, alors on peut énoncer le théorème (voir aussi [3]).

Théorème 2.3 *La caractéristique d'euler d'une T -surface issue d'une triangulation maximale vaut:*

$$\chi(\mathbb{R}X) = -\frac{1}{3}m^3 + \frac{4}{3}m + 6V - 2(M - n).$$

Preuve:

La démonstration est similaire à celle donnée pour le théorème précédent.

Calcul de b_2 :

T contient $m^3 - 6V$ tétraèdres primitifs donnant chacun 7 copies non vides, n (resp $M - n$) tétraèdres maximaux donnant chacun 8 (resp 6) copies non vides, ce qui donne:

$$b_2 = 7m^3 - 42V + 8n + 6(M - n).$$

Calcul de b_1 :

T contient $m^3 - 6V + M$ tétraèdres. Le nombre de triangles sur les faces de T reste égal à $4m^2$; le nombre de triangles intérieurs est donc $2m^3 - 2m^2 - 12V + 2M$, ce qui donne:

$$b_1 = 12m^3 - 72V + 12M.$$

idea: possibly having few points in boundary could be good(?)

Calcul de b_0 :

on imite la démonstration du précédent théorème, on trouve:

$$b_0 = \frac{14}{3}m^3 + \frac{4}{3}m - 24V + 4M.$$

□

Corollaire 2.1 *La caractéristique d'Euler d'une T -surface issue d'une triangulation maximale vérifie:*

$$\chi(\mathbb{R}X) \geq -\frac{1}{3}m^3 + \frac{4}{3}m.$$

Preuve:

Le volume minimal d'un tétraèdre maximal est de $\frac{1}{3}$, le théorème précédent donne alors le résultat.



in other words

$6V - 2(M - n)$ is a positive number. □

for maximal!

Le nombre de points à l'intérieur (on dira point intérieur) de T est égal à: $\frac{1}{6}m^3 - m^2 + \frac{11}{6}m - 1$ qui coïncide avec $h_{2,0}(\mathbb{C}X)$.

Théorème 2.4 *Le nombre de composantes connexes d'une T -surface issue d'une triangulation primitive n'excède pas $h_{2,0}(\mathbb{C}X) + 1$.*

Preuve:

On obtient cette inégalité à partir des 2 inégalités suivantes:

$$\chi(\mathbb{R}X) \geq -\frac{1}{3}m^3 + \frac{4}{3}m,$$

$$\dim H_*(\mathbb{R}X) \leq \dim H_*(\mathbb{C}X),$$

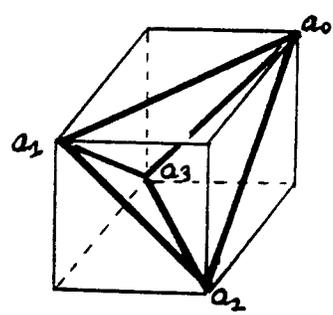
avec $\dim H_*(\mathbb{C}X) = d^3 - 4d^2 + 6d$. □

On obtient une inégalité pour les T -surfaces qui ressemble à celle du théorème de Harnack pour les courbes, on peut de même en tirer une conséquence immédiate:

Corollaire 2.2 *Une T -surface issue d'une triangulation primitive est maximale si et seulement si son nombre de composantes connexes vaut:*

$$c = h_{2,0}(\mathbb{C}X) + 1.$$

On se donne un cube unité (de volume 1), il en existe une triangulation comprenant 6 tétraèdres primitifs; mais on peut également obtenir une triangulation comprenant un tétraèdre maximal de volume $\frac{1}{3}$ et 4 tétraèdres primitifs. Un cube bord sera un cube unité auquel on a enlevé un tétraèdre primitif.



On rappelle que la caractéristique d'euler et le degré d'une surface ont même parité, on peut alors citer le théorème ([3]):

Théorème 2.5 *Pour tout χ (avec la bonne parité) vérifiant:*

$$-\frac{1}{3}m^3 + \frac{4}{3}m \leq \chi \leq m,$$

il existe une T -surface de degré m dont la caractéristique d'euler soit égale à χ .

Preuve:

Soit χ compris entre $-\frac{1}{3}m^3 + \frac{4}{3}m$ et m , χ s'écrit:

$$\chi = -\frac{1}{3}m^3 + \frac{4}{3}m + 2k$$

avec $0 \leq k \leq \frac{1}{6}m^3 - \frac{m}{6}$.

Le nombre de cubes unité et de cubes bord que l'on peut placer dans T est exactement $\frac{1}{6}m^3 - \frac{m}{6}$ (le volume de T est alors totalement occupé par ces cubes).

Choisissons k cubes parmi ces cubes unité et cubes bord, donnons leur la triangulation précédemment citée de façon à chacun de ces cubes contiennent un tétraèdre maximal de volume $\frac{1}{3}$.

Encore une fois, choisissons une triangulation primitive de l'espace laissé libre par les cubes dans T (par exemple, en prenant la triangulation donnant 6 tétraèdres primitifs dans chacun des cubes restants).

On obtient alors une triangulation maximale de T avec k tétraèdres maximaux de volume $\frac{1}{3}$; il suffit alors d'appliquer le théorème 2.2. \square

Théorème 2.6 *Pour tout entier m pair, la M -surface algébrique dans $\mathbb{R}P^3$ de type topologique:*

$$h_{2,0}(\mathbb{C}X)S \coprod S(\alpha)$$

(avec $\alpha = \frac{1}{3}m^3 - m^2 + \frac{7}{6}m$) est une T -surface.

Preuve:

On cherche à construire une T -surface de degré m avec le type topologique précédent.

On se donne T .

On décompose T en $m+1$ étages t_i , $i = 1, \dots, m$.

Soit T_{2k+1} ($k \in \{0, \dots, \frac{m-1}{2}\}$) la partie de T située entre les étages t_{2k} et t_{2k+1} ; T_{2k+1} contient donc les 3 étages t_{2k} , t_{2k+1} , t_{2k+2} .

Pour tout k dans $\{0, \dots, \frac{m-1}{2}\}$, on se donne la triangulation primitive de T_{2k+1} suivante: Pour chacun des triangles t de t_{2k+1} , on forme 2 tétraèdres primitifs: t sera une face commune aux 2 tétraèdres qui auront respectivement comme sommet supplémentaire les points $(0, 0, 2k)$ et $(0, 0, 2k+2)$.

Soit X_{2k} (resp X_{2k+2}) l'arête de t_{2k} (resp t_{2k+2}) située sur le plan $\{y = 0\}$, Y_{2k+1} l'arête de t_{2k+1} située sur le plan $\{x = 0\}$, il reste dans T_{2k+1} les 2 tétraèdres, notés γ_{2k} et γ_{2k+2} , dont 2 des arêtes sont respectivement Y_{2k+1} , X_{2k} et Y_{2k+1} , X_{2k+2} .

On se donne une triangulation primitive de γ_{2k} comme suit:

pour chaque paire de segments primitifs (de longueur 1) sur Y_{2k+1} et X_{2k} , on forme le tétraèdre dont 2 des arêtes sont ces segments. On vérifie aisément qu'un tel tétraèdre est de volume $\frac{1}{6}$ et qu'aucun de ces tétraèdres n'en intersecte un autre. On procède de la même manière pour avoir une triangulation primitive de γ_{2k+2} .

On obtient de la sorte une triangulation primitive de T , il reste à définir une distribution de signes.

Un point (x, y, z) aura le signe $-$ si $x \equiv y \equiv z \pmod{2}$, le signe $+$ sinon.

Cette distribution donnera sur chaque étage de T une distribution de signe de Harnack (voir [6, 3]).

Soit \sqcup_i l'intersection du plan $\{z = i\}$ avec T ; pour tout point intérieur \tilde{P} de t_i , il existe une copie P , dotée du signe ϵ , de ce point dans \sqcup_i qui soit entourée de points de signe $-\epsilon$: pour chacun des triangles de \sqcup_i ayant P parmi leurs sommets, les 2 autres sommets ont le signe $-\epsilon$ ([6, 3]). Il reste à remarquer que les 2 points $(0, 0, i - 1)$ et $(0, 0, i + 1)$ ont également le signe $-\epsilon$ pour pouvoir dire que chacun des tétraèdres de T ayant P parmi leurs sommets ont leurs 3 autres points de signe $-\epsilon$, ce qui signifie que la réunion de ces tétraèdres contiendra une composante de Υ homéomorphe à une sphère.

Maintenant tout point intérieur de T (au nombre de $h_{2,0}(\mathbb{C}X)$) est un point intérieur de l'un des t_i ; on peut donc dire que la T -surface issue de la triangulation aura $h_{2,0}(\mathbb{C}X)$ composantes homéomorphes à une sphère.

L'intersection de Υ avec chacun des plans d'axes est non vide, donc la T -surface possède au moins $h_{2,0}(\mathbb{C}X) + 1$ composantes connexes, il suffit alors d'appliquer le corollaire (2.2) pour avoir le résultat. \square

Chapitre 3

T -surfaces de degré 3 et 4 dans $\mathbb{R}P^3$.

3.1 T -Surfaces de degré 3.

Théorème 3.1 *Toute surface de degré 3 dans $\mathbb{R}P^3$ est une T -surface.*

Preuve: Chaque entier impair compris entre -5 et 3 est la caractéristique d'Euler d'une et une seule surface de degré 3 (voir chapitre 1). Le théorème 2.5 donne alors le résultat. \square

3.2 T -Surfaces de degré 4.

Il est toujours intéressant de chercher à construire des surfaces vérifiant des conditions extrémales..

3.2.1 la T -surface de degré 4 de caractéristique d'Euler minimale.

Pour une surface $\mathbb{R}X$ de degré m dans $\mathbb{R}P^3$, la caractéristique d'Euler minimale vaut:

$$2 - h^{1,1}(\mathbb{C}X) = -\frac{2}{3}d^3 + 2d^2 - \frac{7}{3}d + 2. \quad \leftarrow \text{why}$$

On calcule alors la différence $\sigma(\mathbb{C}X) - (2 - h^{1,1}(\mathbb{C}X))$ et l'on obtient:

$$\sigma(\mathbb{C}X) - (2 - h^{1,1}(\mathbb{C}X)) = 2h_{2,0}(\mathbb{C}X).$$

Cette égalité indique l'idée à l'origine de la triangulation donnant pour $m = 4$ la T -surface de caractéristique d'Euler minimale.

Pour $m = 4$, on a:

$$2 - h^{1,1}(\mathbb{C}X) = -18,$$

$$\sigma(\mathbb{C}X) = -16,$$

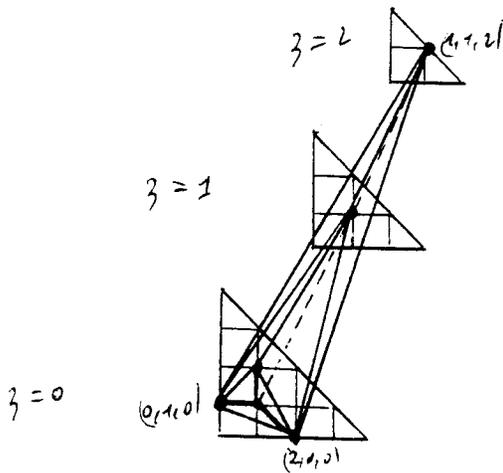
$$h_{2,0}(\mathbb{C}X) = 1.$$

L'unique surface de degré 4 dans $\mathbb{R}P^3$ de caractéristique d'Euler égale à -18 a pour type topologique $S(10)$ (voir premier chapitre).

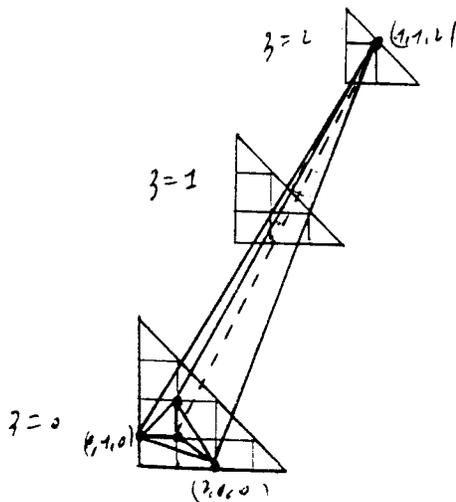
Construction de la T -surface.

On peut appeler voisinage d'un point dans T l'ensemble des tétraèdres contenant ce point. Le voisinage d'un point sera dit primitif s'il existe une triangulation primitive de T où P ait ce voisinage.

On se donne une triangulation primitive de T contenant le voisinage primitif V du point $(1, 1, 1)$ suivant:



on peut alors transformer ce voisinage, sans affecter la triangulation située à l'extérieur dans T , pour obtenir le voisinage non primitif \tilde{V} de $(1, 1, 1)$ suivant:



on appelle χ (resp $\tilde{\chi}$) la contribution du voisinage primitif (resp non primitif) à la caractéristique d'Euler de la T -surface correspondante. Le calcul donne alors:

$\tilde{\chi} = \chi$ si les points $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 2)$ ont même signe,

$\tilde{\chi} = \chi - 2$ si les 2 points ont un signe différent. Δ

Donnons nous une triangulation primitive de T dont le voisinage primitif de $(1, 1, 1)$ soit V , remplaçons V par \tilde{V} , donnons enfin aux points $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 2)$ des signes différents, alors, une simple application du théorème 2.2 permet d'affirmer que la T -surface issue de cette triangulation aura pour caractéristique d'Euler -18 . \square

3.2.2 Une triangulation donnant beaucoup de T -surfaces

Par la suite, on notera Q le triangle dans T de sommets $(0, 0, 2), (4, 0, 0), (0, 4, 0)$.

Théorème 3.2 *Les surfaces algébriques de degré 4 de type topologique suivant sont des T -surfaces.*

$c = 7$:

$$T \amalg 6S,$$

$c = 6$:

$$T \amalg 5S,$$

$c = 5$:

$$S(2) \amalg 4S, \quad T \amalg 4S,$$

$c = 4$:

$$S(4) \amalg 3S, \quad S(3) \amalg 3S, \quad S(2) \amalg 3S, \quad T \amalg 3S,$$

$c = 3$:

$$S(5) \amalg 2S, \quad S(4) \amalg 2S, \quad S(3) \amalg 2S, \quad S(2) \amalg 2S, \quad T \amalg 2S,$$

$c = 2$:

$$S(6) \amalg S, \quad S(5) \amalg S, \quad S(4) \amalg S, \quad S(3) \amalg S, \quad S(2) \amalg S, \quad T \amalg S,$$

$c = 1$:

$$S(9), \quad S(8), \quad S(7), \quad S(6), \\ S(5), \quad S(4), \quad S(3), \quad S(2), \quad T.$$

Preuve: On appelle

t_1 la face de T située sur le plan $\{z = 0\}$,

t_2 la face de T située sur le plan $\{x + y + z = m\}$.

On se donne une triangulation primitive de t_1 et t_2 ; pour chacun des triangles situé sur t_1 et t_2 , on forme le tétraèdre dont l'une des faces est ce triangle, et dont l'un des sommets est le point $(0, 0, 2)$.

On fixe le signe du point $(0, 0, 2)$: il aura le signe $-$.

On appelle T_1 (resp T_2) la partie de T située en dessous (resp au dessus) de Q . Ces 2 parties sont symétriques par rapport à Q ; le calcul de la caractéristique d'Euler de la T -surface correspondante à cette triangulation se résume donc à l'étude de la contribution de T_1 à cette même caractéristique en fonction de la distribution de signes sur les points entiers de t_1 . Il faut remarquer que la triangulation de t_1 contient exactement 4 triangles n'ayant aucun sommet parmi les points pairs (points à coordonnées paires).

Le calcul montre que le type topologique de la T -surface associée à la triangulation de T dépend uniquement:

1. des signes des points pairs

$$(2, 0, 0); (0, 2, 0); (4, 0, 0); (0, 4, 0); (2, 2, 0); (2, 0, 2); (0, 2, 2)$$

2. du produit des signes des sommets de chacun des 8 triangles de t_1 et t_2 n'ayant aucun point pair parmi leurs sommets.

On présente maintenant le tableau donnant le type topologique de la T -surface en fonction de ces signes.

	$(2,1,0)$	$(0,2,0)$	$(2,2,0)$	$(2,0,2)$	$(0,2,2)$	t_1	t_2
6S \perp T	-	-	-	-	-	++++	++++
5S \perp T	-	-	-	-	-	+++ -	++++
4S \perp SC2	-	+	-	-	-	++ --	++++
4S \perp T	-	-	-	-	-	+++ -	+++ -
3S \perp SC4	-	-	-	+	+	++++	----
3S \perp SC3	-	-	-	+	-	++++	----
3S \perp SC2	-	-	-	-	-	++++	----
3S \perp T	-	-	-	-	-	++++	---+
2S \perp SC5	-	-	+	-	-	++ --	++ --
2S \perp SC4	-	-	-	+	+	+++ -	----
2S \perp SC3	-	+	-	+	-	++ --	++ --
2S \perp SC2	-	+	-	-	-	++ --	++ --
2S \perp T	-	-	-	-	-	++ --	++ --

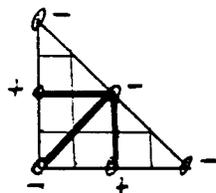
S4S(6)	-	-	+	+	+	++	--	-	-	-	-
S4S(5)	-	-	+	+	-	++	--	-	-	-	-
S4S(4)	-	-	+	-	-	++	--	-	-	-	-
S4S(3)	-	-	+	-	-	++	--	-	-	-	+
S4S(2)	-	-	-	-	-	++	--	-	-	-	-
S4T	-	-	-	-	-	++	--	-	-	-	+
S(9)	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
S(8)	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
S(7)	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-
S(6)	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-
S(5)	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
S(4)	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
S(3)	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
S(2)	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-
T	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	+
	(2,0,0)	(0,2,0)	(1,1,0)	(2,0,1)	(0,2,1)	t_1		t_2			

Prenons maintenant une triangulation analogue à celle du théorème précédent: on se donne une triangulation qui cette fois n'est pas primitive de t_1 et t_2 , pour chaque triangle situé sur t_1 et t_2 on forme le tétraèdre dont l'une des faces est ce triangle, et dont l'un des sommets est le point $(0, 0, 2)$. On peut alors donner le théorème:

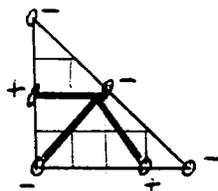
Théorème 3.3 *Les surfaces algébriques de degré 4 de type topologique kS pour $k = 1 \dots 8$ et $T \amalg T$ sont des T -surfaces.*

Preuve: On donne maintenant les triangulations de t_1 (resp t_2) telles que l'intersection de Υ avec le plan $\{z = 0\}$ (resp $\{x + y + z = m\}$) donne respectivement 4, 3, 2, 1, 0 ovals et un nid de 2 ovals.

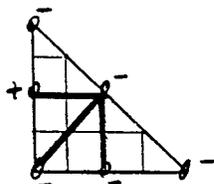
Un tel ovale donnera une sphère dans Υ et le nid de 2 ovals un tore; il suffit alors de disposer de ces triangulations sur t_1 et t_2 pour avoir le résultat. \square



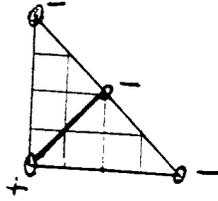
4 ovals



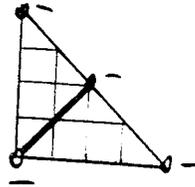
3 ovals



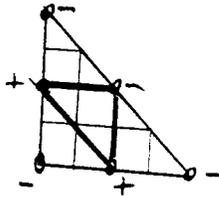
2 ovals



1 ovale



0 ovale



1 mid de 2 ovales

Types Topologiques Des T -Surfaces De Degré 4 Construites.

Les types topologiques des T -surfaces apparaitront en gras.

- $c = 10$:
 $S(2) \amalg 9S$ (M -surface),
 $T \amalg 9S$ ($(M - 1)$ -surface),
 $10S$,
- $c = 9$:
 $T \amalg 8S$,
 $9S$,
- $c = 8$:
 $S(2) \amalg 7S$,
 $T \amalg 7S$,
 $8S$,
- $c = 7$:
 $S(3) \amalg 6S$, $S(2) \amalg 6S$, $T \amalg 6S$,
 $7S$,
- $c = 6$:
 $S(6) \amalg 5S$ (M -surface),
 $S(5) \amalg 5S$ ($(M - 1)$ -surface),
 $S(4) \amalg 5S$, $S(3) \amalg 5S$, $S(2) \amalg 5S$,
 $T \amalg 5S$, $6S$,
- $c = 5$:
 $S(6) \amalg 4S$ ($(M - 1)$ -surface),
 $S(5) \amalg 4S$, $S(4) \amalg 4S$, $S(3) \amalg 4S$,
 $S(2) \amalg 4S$, $T \amalg 4S$, $5S$,
- $c = 4$:
 $S(6) \amalg 3S$, $S(5) \amalg 3S$, $S(4) \amalg 3S$,
 $S(3) \amalg 3S$, $S(2) \amalg 3S$, $T \amalg 3S$,
 $4S$,
- $c = 3$:
 $S(7) \amalg 2S$, $S(6) \amalg 2S$, $S(5) \amalg 2S$,
 $S(4) \amalg 2S$, $S(3) \amalg 2S$, $S(2) \amalg 2S$,
 $T \amalg 2S$, $3S$,
- $c = 2$:
 $S(10) \amalg S$ (M -surface),
 $S(9) \amalg S$ ($(M - 1)$ -surface),
 $S(8) \amalg S$, $S(7) \amalg S$, $S(6) \amalg S$,
 $S(5) \amalg S$, $S(4) \amalg S$, $S(3) \amalg S$,
 $S(2) \amalg S$, $T \amalg S$, $2S$, et $T \amalg T$,

c = 1:

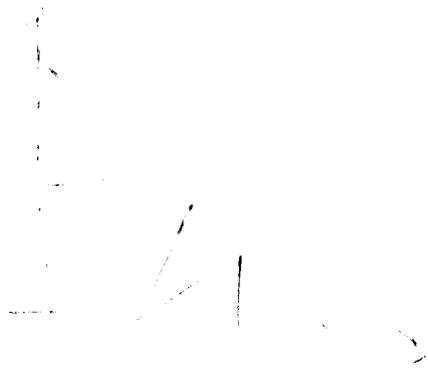
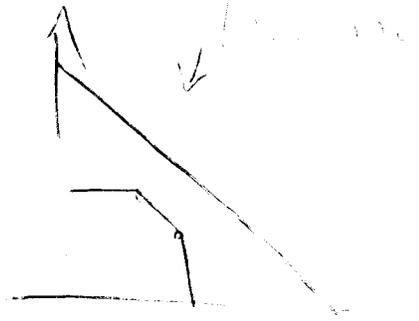
S(10) ((M - 1)-surface),
S(9), S(8), S(7), S(6),
S(5), S(4), S(3), S(2),
T, S.

Je tiens à remercier Ilia Itenberg pour l'aide qu'il m'a apportée durant ce mémoire, ainsi que pour toute la disponibilité dont il a fait preuve à mon égard.

Références

- [1] G.Wilson , Hilbert's sixteenth problem, *Topology*, vol. 17(1978), no.1,53 - 73.
- [2] V.M. Kharlamov, Maximum number of components of a surface of degree 4 in $\mathbb{R}P^3$, *Funkz. Ana. i Prilov.*, vol. 6 (1972), no. 4, 101 (in russian, English translation in *Funct.Anal. and its Appl.*, vol.6 (1972), no.4, 345-346).
- [3] I.Itenberg, (a paraitre).
- [4] V.M. Kharlamov, Real algebraic surfaces, *Proc. Internat. Congress Math.*, Helsinky, 1978,vol. 1,421-428 (in russian).
- [5] V.M. Kharlamov,I.Itenberg, Towards the Maximal Number of Components of a Non-singular Surface of Degree 5 in $\mathbb{R}P^3$, *LEMNS*, 1993 (preprint).
- [6] O. Ya. Viro,Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years, *Russian Math, Surveys* 41:3 (1986), 55-82.
- [7] V.M. Kharlamov, Topologicals Types of Non singular Surface of degree 4 in $\mathbb{R}P^3$, *Funct.Anal. pril.* 10 n.4 (1976), 55-68 (en russe)
- [8] O. Ya. Viro, Patchworking Real Algebraic Varieties, (preprint), Uppsala University, 1995.
- [9] I.Itenberg, O. Ya. Viro, Patchworking Algebraic Curves Disproves The Ragsdale Conjecture

- (5, 0) -
- (6, 1) +
- (7, 2) +
- (8, 3) +



There is a function f from V to V such that $f(u) = v$ if and only if $(u, v) \in E$.

Subdivisions
can't have
edges

Bandwidth H_n : B_n \approx $\frac{1}{2} \log_2 n$

(?) Que subdivisión no-regular (no sea
transcripción) conoces???????