

Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale

Ilia ITENBERG

Résumé – En 1906, V. Ragsdale a proposé la conjecture suivante :

$$p \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}, \quad n \leq \frac{3k^2 - 3k}{2}$$

où p (resp. n) est le nombre d'ovales pairs (resp. impairs) d'une courbe algébrique réelle, plane et projective, non singulière de degré $2k$.

Dans cette Note, on donne des contre-exemples à cette conjecture de Ragsdale.

Counter-examples to Ragsdale conjecture

Abstract – In 1906, V. Ragsdale proposed the following conjecture:

$$p \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}, \quad n \leq \frac{3k^2 - 3k}{2}$$

where p (n , respectively) is the number of even (odd, respectively) ovals of a real algebraic plane projective non-singular curve of degree $2k$.

Counter-examples to Ragsdale conjecture are presented in this Note.

Abridged English Version – In 1906, V. Ragsdale [2] suggested the following conjecture: there are two inequalities for a non-singular real algebraic plane projective curve of degree $2k$:

$$p \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}, \quad n \leq \frac{3k^2 - 3k}{2},$$

where p (n , respectively) is the number of ovals of the real point set of the given curve lying inside of an even (odd, respectively) number of other ovals [such ovals are called by “even” (“odd”, respectively)].

In the present Note counter-examples to Ragsdale conjecture are constructed. The main result is the following.

THEOREM 1. – For each integer positive number k greater than 1

a) there exists a non-singular real algebraic plane projective curve of degree $2k$ with

$$p = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + \left\lceil \frac{(k-3)^2 + 4}{8} \right\rceil,$$

b) there exists a non-singular real algebraic plane projective curve of degree $2k$ with

$$n = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + \left\lceil \frac{(k-3)^2 + 4}{8} \right\rceil - 1.$$

These counter-examples are obtained using Viro's method of construction of real algebraic varieties with prescribed topology (see [4], [5], [6]).

A partition of a convex polygon T in convex polygons t_1, \dots, t_s is called by “convex” if there exists a convex piecewise linear function $T \rightarrow \mathbb{R}$ which is linear on each polygon t_i but is not linear on each union $t_i \cup t_j$ ($i \neq j$).

One can deduce the following theorem from the results of [4], [5].

Note présentée par René THOM.

THEOREM 2. — Let T be the triangle with vertices $(0; 0)$, $(2k; 0)$, $(0; 2k)$, where k is a positive integer. Consider a triangulation of T in triangles t_1, \dots, t_{4k^2} having area $1/2$ and vertices in the points with integer coordinates. Let this triangulation be convex. ¶

Put sign “+” or “-” in each vertex of triangulation in an arbitrary way. ^

Apply to triangle T (with triangulation but without signs) the symmetries with respect to axis OX , to axis OY and to point $(0; 0)$. Let T_1, T_2, T_3 be the symmetric images of triangle T . Identify the points which are symmetric with respect to point $(0; 0)$ on the boundary of the union of triangles T, T_1, T_2, T_3 . Denote the result (homeomorphic to \mathbb{RP}^2) by T_* . Put signs in vertices of triangulations of triangles T_1, T_2, T_3 using the rule: vertex (x, y) has sign of vertex $(|x|, |y|)$ of the triangulation of T multiplied on $[\text{sign}(x)]^x [\text{sign}(y)]^y$. In each triangle of triangulation of T_* having vertices of different signs consider midline connecting the sides having ends of the opposite signs. Denote the union of these midlines by L .

Then there exists such a non-singular real algebraic plane projective curve A of degree $2k$ that topological pairs (\mathbb{RP}^2, RA) (where RA is the real point set of curve A) and (T_*, L) are homeomorphic.

Now we prove theorem 1 using theorem 2.

a) A partition of triangle T with vertices $(0; 0)$, $(2k; 0)$, $(0; 2k)$ is shown in figure 2 (k is equal to 13 in this figure, we have the similar partition in the general case). Consider the triangulation and the signs in its vertices as in polygon $EBFGDH$ (see fig. 1) in each marked polygon. Consider an extension of the described triangulation to obtain a convex triangulation of T .

Outside of the union of the marked polygons put signs in the vertices of triangulation of T using the following rule:

vertex (x, y) has sign “-”, if x, y are even, and sign “+” if not.

It is not difficult to calculate that in this case the number of connected components of line L (in notations of theorem 2) which bound from exterior the regions with signs “+” (these components correspond to even ovals of the curve constructed) is equal to the number pointed out in theorem 1.

Part *b*) of theorem 1 can be proved similarly. ●

1. INTRODUCTION. — Pour une courbe algébrique réelle, non singulière, plane, projective, de degré $2k$, on note p (resp. n) le nombre d’ovales pairs (resp. impairs) de cette courbe [on appelle ovale pair (resp. impair) un ovale qui est contenu dans un nombre pair (resp. impair) d’ovales].

En 1906, V. Ragsdale [2] a proposé la conjecture suivante :

$$p \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}, \quad n \leq \frac{3k^2 - 3k}{2}.$$

En 1980, O. Ya. Viro [3] a construit des courbes non singulières de degré $2k$ (où k est pair et $k \geq 4$), avec

$$n \leq \frac{3k^2 - 3k}{2} + 1$$

et a proposé de changer la deuxième inégalité dans la conjecture de Ragsdale par l'inégalité

$$n \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}$$

(cette conjecture a aussi été formulée en 1938 par I. G. Petrovsky [1]).

Dans cette Note, on donne des contre-exemples à la conjecture de Ragsdale dans sa version « corrigée ».

Le résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1. — Pour chaque entier $k > 1$,

a) il existe une courbe algébrique réelle non singulière plane projective de degré $2k$ avec

$$p \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + \left\lceil \frac{(k-3)^2 + 4}{8} \right\rceil,$$

b) il existe une courbe algébrique réelle non singulière plane projective de degré $2k$ avec

$$n \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + \left\lceil \frac{(k-3)^2 + 4}{8} \right\rceil - 1.$$

Ces contre-exemples sont obtenus en utilisant la méthode de Viro de construction des variétés algébriques réelles avec topologie prescrite (cf. [4], [5], [6]). O. Ya. Viro a proposé d'étudier la classe des courbes, appelées T-courbes, qui peuvent être obtenues par collage de triangles, en utilisant sa méthode. S. Yu. Orevkov [7] a commencé par étudier cette classe et a utilisé des T-courbes pour la démonstration du fait que les bornes dans les inégalités de Petrovsky

$$p - n \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}, \quad n - p \leq \frac{3k^2 - 3k}{2}$$

sont atteintes.

Les courbes construites dans cette Note sont des T-courbes.

2. CONSTRUCTION. — On dit qu'une triangulation d'un polygone convexe $T \subset \mathbf{R}^2$ par des triangles t_1, \dots, t_l est régulière s'il existe une fonction affine par morceaux convexe $v: T \rightarrow \mathbf{R}$ qui soit affine sur chaque triangle t_i et non affine sur chaque réunion $t_i \cup t_j$ ($i \neq j$).

On peut déduire le théorème suivant des résultats de [4], [5].

THÉORÈME 2. — Soit T le triangle de sommets $(0, 0)$, $(2k, 0)$, $(0, 2k)$, où k est un entier positif. Considérons une triangulation de T par des triangles t_1, \dots, t_{4k^2} à sommets entiers et d'aire $1/2$. Cette triangulation est alors régulière.

Plaçons le signe « + » ou « - » à chaque sommet de la triangulation.

Appliquons au triangle T (avec sa triangulation, mais sans les signes) les symétries de \mathbf{R}^2 par rapport à l'axe OX , à l'axe OY et au point $(0, 0)$. Soient T_1, T_2, T_3 les images symétriques du triangle T . Identifions les points qui sont symétriques par rapport au point $(0, 0)$ sur le bord de la réunion des triangles T, T_1, T_2, T_3 . Notons le résultat (homéomorphe à \mathbf{RP}^2) par T_* .

Plaçons les signes aux sommets des triangulations des triangles T_1, T_2, T_3 en utilisant la règle suivante : le sommet (x, y) a le signe du sommet $(|x|, |y|)$ de la triangulation de T multiplié par $[\text{signe}(x)]^x [\text{signe}(y)]^y$.

Dans chaque triangle de la triangulation de T_* avec les sommets de signes différents considérons le segment reliant les milieux des côtés joignant deux sommets de signes opposés. Notons L la réunion de ces segments.

Avec les hypothèses ci-dessus, il existe une courbe A algébrique réelle non singulière, plane et projective, de degré $2k$ telle que les paires topologiques $(\mathbf{RP}^2, \mathbf{RA})$ (où \mathbf{RA} est l'ensemble des points réels de A) et (T_*, L) sont homéomorphes.

Maintenant, nous démontrons le théorème suivant en utilisant le théorème 2.

THÉORÈME 3. — Pour chaque entier $k \geq 5$ il existe une courbe non singulière plane projective algébrique réelle de degré $2k$ avec

$$p = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + 1.$$

Démonstration. — Nous allons d'abord décrire la triangulation du triangle T de sommets $(0, 0)$, $(2k, 0)$, $(0, 2k)$ et les signes aux sommets de la triangulation, puis nous appliquerons le théorème 2.

Une partie de la triangulation et les signes aux sommets de cette partie sont indiqués sur la figure 1.

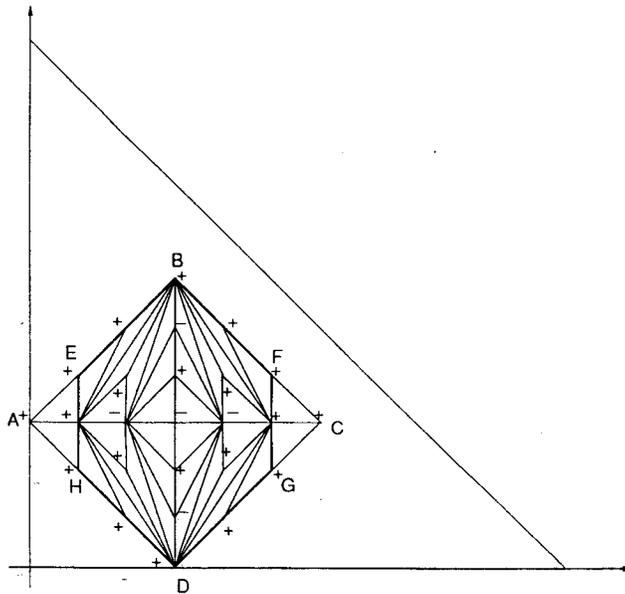


Fig. 1.

On peut voir facilement que la triangulation du carré ABCD est régulière, et qu'il est possible d'étendre cette triangulation en une triangulation régulière de T dont tous les triangles sont d'aire $1/2$. Fixons une telle triangulation régulière.

A l'extérieur du carré ABCD plaçons les signes aux sommets de la triangulation de T en utilisant la règle suivante :

le sommet (x, y) a le signe « - », si x, y sont pairs, et le signe « + » sinon.

Plaçons les signes aux sommets des triangulations des copies symétriques du triangle T comme expliqué dans le théorème 2.

Calculons le nombre de composantes connexes de la courbe L affine par morceaux (avec les notations du théorème 2) qui bordent par l'extérieur les régions comportant des

signes « + » (ces composantes sont appelées composantes positives, elles correspondent aux ovals pairs de la courbe).

On peut voir qu'il y a 11 composantes connexes positives à l'intérieur du carré ABCD et de ses trois copies symétriques.

LEMME 4. — Pour chaque sommet de la triangulation de T qui est strictement à l'intérieur de T mais à l'extérieur du carré ABCD et qui a au moins une coordonnée impaire, une des trois copies symétriques de l'étoile de ce sommet contient une composante positive de la courbe L.

Démonstration. — Considérons l'image symétrique du sommet donné avec le signe « + ». Tous les sommets voisins de cette image ont évidemment le signe « - ».

Nous pouvons aussi appliquer ces arguments aux sommets qui sont strictement à l'intérieur du triangle T sur le bord du carré ABCD, excepté le point B.

Le nombre total de sommets qui sont strictement à l'intérieur de T et qui ont au moins une coordonnée impaire est égal à

$$\frac{3k^2 - 3k}{2}$$

Le nombre de sommets qui sont strictement à l'intérieur du carré ABCD et ont au moins une coordonnée impaire est égal à 9. Donc, avec le point B, il y a 10 sommets de la triangulation de T qui sont strictement à l'intérieur de T, qui ont au moins une coordonnée impaire et qui n'ont pas l'étoile nécessaire. Par conséquent, nous avons

$$\frac{3k^2 - 3k}{2} - 10$$

« petites » composantes positives qui ne sont pas complètement à l'intérieur du carré ABCD et de ses trois copies symétriques. Notons qu'il y a une composante positive de plus. Son intérieur contient le carré ABCD. Nous obtenons donc que le nombre de composantes positives de la courbe L (et le nombre d'ovales pairs de la courbe construite) est égal à

$$\frac{3k^2 - 3k}{2} - 10 + 11 + 1 = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + 1$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — a) Une partie de la triangulation du triangle T de sommets (0, 0), (2k, 0), (0, 2k) est indiquée sur la figure 2 (ici k est égal à 13, dans le cas général nous considérons la triangulation analogue; dans chaque polygone marqué nous prenons la triangulation (et les signes à ses sommets) comme dans le polygone EBFGDH de la démonstration du théorème 3).

Considérons une extension régulière de cette triangulation.

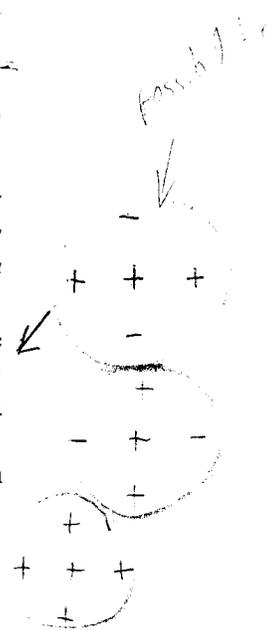
A l'extérieur de la réunion des polygones marqués, plaçons les signes aux sommets de la triangulation de T en utilisant la règle de la démonstration du théorème 3 :

le sommet (x, y) a le signe « - », si x, y sont pairs, et le signe « + » sinon.

Plaçons les signes aux sommets des triangulations des copies symétriques du triangle T comme expliqué dans l'énoncé du théorème 2.

On peut montrer (comme dans la démonstration du théorème 3) que le nombre d'ovales pairs de la courbe obtenue est égal à

$$\frac{3k^2 - 3k}{2} - 10a + 11a + 1 = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + a$$



of integral points = $\frac{4k^2 + 2k}{2}$
 # interior integral points = $\frac{4k^2 - 6k + 2}{2}$

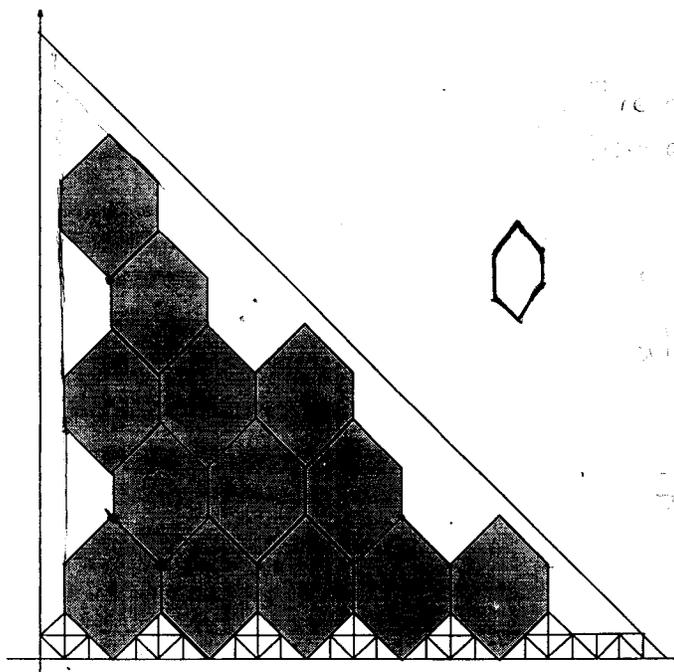


Fig. 2. - $k=13$.

où a est le nombre de polygones marqués à l'intérieur de T . Ce nombre est égal à

$$\left[\frac{(k-3)^2 + 4}{8} \right]$$

← count! [3]

Par analogie nous pouvons démontrer la partie b) du théorème 1. Mais à la différence de la partie a) il faut fixer maintenant la triangulation et les signes dans un voisinage de l'axe OY pour obtenir la correspondance entre les ovales impairs de la courbe et les composantes positives de L . En outre, il n'y a pas dans ce cas de composante positive de L dont l'intérieur contienne la réunion des polygones marqués. ●

Note remise le 1^{er} mars 1993, acceptée le 26 mars 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] I. G. PETROVSKY, On the topology of real plane algebraic curves, *Ann. of Math.*, 39, 1938, n° 1, p. 187-209.
- [2] V. RAGSDALE, On the arrangement of the real branches of plane algebraic curves, *Amer. J. Math.*, 28, 1906, p. 377-404.
- [3] O. Ya. VIRO, Curves of degree 7, curves of degree 8, and Ragsdale conjecture, *Soviet Math. Dokl.*, 22, 1980, p. 566-569.
- [4] O. Ya. VIRO, Gluing of algebraic hypersurfaces, smoothing of singularities and construction of curves, *Intern. Topol. Conf.*, Leningrad, 1983, p. 149-197 (en russe).
- [5] O. Ya. VIRO, Gluing of plane real algebraic curves and construction of curves of degree 6 and 7, *Topology Proceedings*, 1982, Lecture Notes in Math., 1060, 1984, p. 187-200.
- [6] J.-J. RISLER, Construction d'hypersurfaces réelles (d'après Viro), *Séminaire N. Bourbaki*, novembre 1992, exposé n° 763.
- [7] S. Yu. OREVKOV, Communication privée.