Géométrie/*Geometry*

Une application du Théorème de Riemann-Roch combinatoire au polynôme d'Ehrhart des polytopes entier de $\mathbb{R}^d$

Jean-Michel KANTOR et Askold KHOVANSKII

Résumé – Le Théorème de Riemann-Roch combinatoire ([8], [9], [6]) relie le volume d'un polytope à sommets entiers de $\mathbb{R}^d$ au nombre de points entiers de ce polytope. Il n'est valable que pour des polytopes dont l'éventail est primitif (la variété torique associée est lisse).

Pourtant, en appliquant convenablement ce théorème, on en déduit une formule explicite pour le coefficient de degré $(d-2)$ du polynôme d'Ehrhart de tout polytope entier de $\mathbb{R}^d$.

On obtient ainsi une formule explicite pour le polynôme d'Ehrhart de tout polytope entier de $\mathbb{R}^4$.

An application of the combinatorial Riemann-Roch theorem to the Ehrhart polynomial of integral polytopes in $\mathbb{R}^d$

Abstract – *The combinatorial Riemann-Roch theorem* ([8], [9], [6]) *relates the volume of an integral polytope to the number of integral points in it. This is only valid for polytopes with primitive fan (the associated toric variety is regular).*

However, applying this result in a suitable manner, we deduce an explicit formula for the coefficient of degree $(d-2)$ of the Ehrhart polynomial of any integral polytope in $\mathbb{R}^d$. In particular this gives

– *a general formula for the number of integral points in any integral polytope in $\mathbb{R}^4$,*

– *a new geometric look at the introduction of Dedekind sums in these questions.*

Abridged English Version – Previous results from ([8], [9], [6]) are used. The purpose of this Note is to state the following application of the combinatorial Riemann-Roch theorem from (*loc. cit.*): Let Δ be an integral polytope in $\mathbb{R}^d$, Σ the associated fan, and T_Σ the Todd operator constructed as in *loc. cit.* Applying this operator to the integral of the convex chain with parameters $\alpha(x, h)$, associated with Δ

$$V(h)=\int \alpha(x, h)\, dx$$

$$T_\Sigma[V(h)]_{h=0}=b_0+b_1(\Delta)+\ldots+b_d(\Delta)$$

sum of homogeneous terms.

Let

$$G_\Delta(n)=1+a_1(\Delta)+\ldots+a_d(\Delta)$$

be the Ehrhart polynomial of Δ.

THEOREM. – *Assume Σ k-primitive, that is all cones of Σ of dimension less or equal to $(k-1)$ are primitive, and all cones of dimension k are simplicial. Then*

$$a_d(\Delta)=b_d(\Delta)\,(=\mathrm{vol}(\Delta)), \qquad \ldots, \qquad b_{d-k+1}(\Delta)=a_{d-k+1}(\Delta)$$

$$b_{d-k}(\Delta)=a_{d-k}(\Delta)+\sum_{F}\mu_{d-k}(F)\,\tau_k(\hat{F})$$

F *runs over all faces of dimension $(d-k)$, and τ_k is a numerical invariant associated to cones of dimension k, $\hat{F}$ the polar cone to* F.

Note présentée par Vladimir ARNOLD.

0764-4442/93/03170501 $ 2.00

As an application we give an explicit formula for the Ehrhart polynomial of any integral polytope in $\mathbb{R}^4$.

I. NOTATIONS ET RAPPELS. — Ils renvoient à ([8], [9], [6]).

1. On désigne par $\mathscr{P}^d$ (resp. $\mathscr{P}^d_{\mathbb{Z}}$) l'ensemble des polytopes à sommets quelconques (resp. à sommets entiers, c'est-à-dire à coordonnées entières) de $\mathbb{R}^d$. Cet ensemble s'injecte dans le groupe des combinaisons linéaires à coefficients entiers de fonctions caractéristiques d'éléments de $\mathscr{P}^d$ (resp. $\mathscr{P}^d_{\mathbb{Z}}$). Une telle combinaison s'appellera *chaîne convexe* (resp. chaîne convexe entière), et la somme des coefficients son intégrale (elle ne dépend pas de la représentation).

Étant donné un polytope entier Δ on s'intéresse aux coefficients (a_i) du polynôme d'Ehrhart $G_\Delta(n)$:

$$\operatorname{card}(\mathbb{Z}^d \cap n\Delta) = G_\Delta(n) = 1 + a_1(\Delta)n + a_2(\Delta)n^2 + \ldots + a_d(\Delta)n^d, \qquad n \geqq 0$$
$$a_d(\Delta) = \operatorname{vol}(\Delta); \qquad a_{d-1}(\Delta) = \mu_{d-1}(\Delta)/2$$

μ_{d-1} mesure $(d-1)$-dimensionnelle relative de Δ.

2. Considérons l'éventail Σ associé au polytope Δ dans l'espace dual $\mathbb{R}^{d*}$. Désignons par Σ^i l'ensemble des cônes de dimension i de Σ.

DÉFINITION 1. — L'éventail Σ est dit *simplicial* (resp. *simplicial en dimension i*) si tous les cônes de Σ (resp. Σ^i) sont simpliciaux. Il est dit *primitif* (resp. *primitif en dimension i*) si tous les cônes de Σ (resp. de Σ^i) sont primitifs, c'est-à-dire engendrés par une famille extraite d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^d$.

Les notions classiques relatives aux polytopes de $\mathbb{R}^d$ s'étendent aux chaînes convexes. Par exemple la notion de fonction de support associé à un polytope s'étend à une chaîne convexe :

Si α est une chaîne convexe (Σ l'éventail associé), sa fonction de support est une fonction h_α définie sur $\mathbb{R}^{d*}$ et à valeurs dans l'algèbre $\mathbb{Z}[\mathbb{R}]$. C'est une fonction linéaire par morceaux relativement à l'éventail Σ. On désigne par $\mathscr{P}^d(\Sigma)$ [resp. $\mathscr{P}^d_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$] l'ensemble des chaînes convexes (resp. entières) dont la fonction de support est linéaire relativement à un éventail Σ donné.

DÉFINITION 2. — La chaîne convexe entière α est dite *virtuelle* si son intégrale vaut 1 ou (-1) et si sa fonction de support h_α est de la forme :

$$h_\alpha = [f]$$

où f est une fonction linéaire par morceaux sur $\mathbb{R}^{d*}$.

L'ensemble des chaînes convexes entières virtuelles coïncide avec le groupe multiplicatif de $\mathscr{P}^d_{\mathbb{Z}}$ (*loc. cit.*).

3. Déformation de chaînes et opérateur de Todd.

A. Soient $(l_1, l_2, \ldots, l_N)$ les vecteurs primitifs des cônes de dimension 1 de l'éventail Σ. Une fonction f linéaire par morceaux relativement à Σ est déterminée de manière unique par la donnée des valeurs z_i de f sur les l_i.

Inversement, *si Σ est primitif*, à la donnée d'une famille arbitraire de z_i (resp. z_i entiers) correspond une chaîne α (resp. entière). On note $\alpha(x, z)$ la chaîne ainsi obtenue, pour des valeurs (z_i) des paramètres choisis pour que $\alpha(x, 0)$ vale α, et on l'appelle *déformation de la chaîne* α.

B. Si h est une variable mesurant le déplacement d'une face F du polytope entier Δ le long du m vecteur orthogonal minimal entier sortant de F, on pose :

$$T_m = \frac{\partial/\partial h}{1-\exp(-\partial/\partial h)}; \qquad T_\Sigma = \prod_{i=1}^{N} T_{l_i}.$$

On a (*loc. cit.*) :

THÉORÈME 1 (Riemann-Roch combinatoire). — *Soit Δ un éventail primitif, $\alpha(x, z)$ la déformation d'une chaîne convexe entière α dont la fonction de support est linéaire par morceaux relativement à Σ, $V(z)$ l'intégrale de $\alpha(x, z)$. C'est une fonction polynomiale* (loc. cit.) *et on a :*

$$T_\Sigma[V(z)]_{|z=0} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \alpha(x).$$

Exemple important. — Si α est la fonction caractéristique d'un polytope Δ entier, la déformation $\alpha(x, z)$ est obtenue à partir du déplacement des facettes parallèlement à elles-mêmes. On prendra garde que $V(z)$ ne s'identifie pas au volume du polytope déformé, qui n'est pas polynomial en général. Cependant, le volume d'un polyèdre est une fonction polynomiale homogène sur l'espace des fonctions de support, seulement définie sur le cône des fonctions convexes. Ce polynôme s'étend à l'ensemble de toutes les fonctions de support, ce qui permet d'appliquer les calculs *aux chaînes convexes virtuelles*, qui correspondent à l'ensemble des fonctions de support.

II. APPLICATION DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH COMBINATOIRE AUX POLYTOPES k-PRIMITIFS. — Soit Σ un éventail rationnel.

DÉFINITION 3. — L'éventail Σ est dit *k-primitif* (k au plus $(d+1)$) si

$$\Sigma^1, \ldots, \Sigma^{k-1} \text{ sont primitifs, et } \Sigma^k \text{ est simplicial,}$$

Le polytope entier Δ est dit k-primitif s'il en est ainsi de l'éventail associé. Les éventails $(d+1)$-primitifs sont primitifs. Tous les éventails sont 1-primitifs. La condition équivaut à exiger que la variété torique soit sans singularité jusqu'en codimension $k-1$, et que ses singularités en codimension k soient du type quotient.

Remarque (importante pour la suite). — Dans $\mathbb{R}^2$, tous les éventails sont 2-primitifs. En effet tous les cônes de dimension 2 sont simpliciaux.

Étant donné un éventail Σ, on sait qu'on peut le subdiviser en un éventail régulier $\tilde{\Sigma}$, sans subdiviser les cônes réguliers de Σ. D'ailleurs, cette subdivision peut se faire « en temps polynomial » relativement aux vecteurs entiers définissant Σ [1].

En dimension 2, la subdivision canonique qui peut être construite est décrite dans [13], 1.1.6. Les notations sont celles du théorème 1, $\alpha(x, z)$ la déformation de 1_Δ.

THÉORÈME 2. — *Soient Δ un polytope k-primitif de $\mathbb{R}^d$, Σ l'éventail associé à Δ, et T_Σ l'opérateur de Todd correspondant. On pose :*

$$T_\Sigma[V(h)]_{|h=0} = b_0 + b_1(\Delta) + \ldots + b_d(\Delta)$$

où les b_i sont homogènes de degré i relativement à l'action de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^d$. Alors, $a_i(\Delta)$ désignant les coefficients du polynôme d'Ehrhart du polytope Δ, on a

$$a_d(\Delta) = b_d(\Delta) = \mathrm{vol}(\Delta), \ \ldots, \ a_{d-k+1}(\Delta) = b_{d-k+1}(\Delta) \tag{1}$$

et

$$a_{d-k}(\Delta) = b_{d-k}(\Delta) + \sum_{F \in \Delta_{d-k}} \mu_{d-k}(F)\,\tau_k(\hat{F}) \tag{2}$$

où Δ_{d-k} désigne l'ensemble des faces de codimension k, $\mu_{d-k}(\mathrm{F})$ la mesure relative de la face F *(en dimension $d-k$) de Δ et $\tau_k(\hat{\mathrm{F}})$ un invariant numérique associé au cône de Σ^k défini par* F.

Démonstration. — Elle consiste dans l'examen attentif des termes de $\mathrm{V}(z)$ pour l'éventail Σ et des termes analogues pour l'éventail primitif $\tilde{\Sigma}$ obtenu par subdivision de Σ. Les termes de degré i de $\mathrm{V}(h)$ ne font intervenir au plus que i vecteurs de $\tilde{\Sigma}$. Pour $i<k$ seuls deux types de cônes peuvent apparaître dans $\mathrm{V}(h)$ associés à ces i vecteurs :

— les cônes de dimension i de Σ,

— les nouveaux cônes de dimension i associés à des vecteurs $(l_1, \ldots, l_j, \tilde{l}_{j+1}, \ldots, \tilde{l}_i)$ où au moins un des vecteurs $\tilde{l}_k$ n'appartient pas aux générateurs fixés pour Σ^i. Mais la contribution est nulle car $\mathrm{V}(z, \tilde{z})$ ne dépend en fait que de z ! Les termes homogènes de degré k de $\mathrm{V}(h)$ s'obtiennent en considérant pour chaque face F de codimension k le volume « infinitésimal » déterminé par le déplacement des faces contenant F. On constate que le terme homogène de degré k peut s'exprimer sous la forme (2).

Remarque. — Les résultats connus sur les coefficients du polynôme d'Ehrhart sont les suivants :

— Des propriétés générales sur le caractère rationnel des fonctions ont été obtenues récemment [11].

— Dans le cas des pyramides de $\mathbb{R}^3$:

$$0 \leqq x, y, z; \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} \leqq 1$$

le travail ancien de Rademacher et Mordell ([15], [10]) a été approfondi par J. Pommershein [14] qui utilise la théorie de l'intersection des cycles algébriques sur les variétés toriques singulières et réobtient la formule de Rademacher, pour les pyramides. On peut, d'ailleurs, ramener le cas général à ce cas [2]. Directement :

Définition 3. — On appelle *défaut* d'un cône C de dimension 2 d'un espace vectoriel E muni d'un réseau l'invariant $\tau_2(\mathrm{C})$ défini comme suit :

Il existe une base du réseau dans laquelle

$$\mathrm{C}=(e_1, e_2), \quad e_1=(1, 0), \quad e_2=(p, q), \qquad 0 \leqq p<q$$

alors :

$$\tau_2(\mathrm{C})=s(p, q)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4q},$$

où $s(p, q)$ désigne la somme de Dedekind associée à (p, q) [15].

On a alors le

Théorème 3. — *Soit Δ un polytope entier quelconque de $\mathbb{R}^d$. On considère le terme b_{d-2} obtenu en déplaçant les faces de Δ parallèlement à elles-mêmes, et en appliquant au volume du polytope obtenu l'opérateur T_Σ. On a :*

$$(*) \qquad a_{d-2}(\Delta)=b_{d-2}(\Delta)+\Sigma\, \mu_{d-2}(\mathrm{F})\, \tau_2(\hat{\mathrm{F}})$$

où F *parcourt la famille des faces de dimension $(d-2)$ de Δ, et τ_2 le défaut associé au cône* $\hat{\mathrm{F}}$ *dans l'espace vectoriel engendré.*

Proposition 2. — 1) *Dans $\mathbb{R}^3$, pour tout Δ entier, on a :*

$$\mathrm{G}_\Delta(n)=1+a_1(\Delta)\, n+\frac{\mu_2(\Delta)}{2} n^2+\mathrm{vol}(\Delta)\, n^3$$

avec $a_1(\Delta)$ *comme dans* (*).

2) *Pour tout* Δ *de* $\mathbb{R}^4$ *on a*

$$G_\Delta(n) = 1 + a_1(\Delta)\,n + a_2(\Delta)\,n^2 + \frac{\mu_3(\Delta)}{2}n^3 + \mathrm{vol}(\Delta)\,n^4$$

avec :

μ_3 *mesure* 3-*dimensionnelle relative de* Δ

$$a_2(\Delta) = b_2(\Delta) + \Sigma\,\mu_2(F)\,\tau_2(\hat{F})$$

F *parcourant les faces de dimension* 2 *de* Δ *et*

$$a_1(\Delta) = \frac{1}{2}[\mathrm{card}(\partial\Delta \cap \mathbb{Z}^4) - \mu_3(\Delta)].$$

Démonstration. — 1) La seconde partie résulte de la première, par l'intermédiaire de la dualité du polynôme d'Ehrhart.

Considérons le polytope convexe de $\mathbb{R}^2$ de côtés $A_0, A_1, \ldots, A_m$ identique à A_0, dans l'ordre direct.

Soient m_i le vecteur entier primitif orthogonal à la face A_i, h_i un déplacement mené selon m_i, e_i la trace sur A_{i+1} du déplacement de A_i, v_i la trace sur A_i du déplacement de A_{i+1} (*fig.* 1 et 2).

Si P_i est la surface du parallélogramme (e_i, v_i)

$$P_i = \frac{[h_i h_{i+1}]}{[m_i, m_{i+1}]}$$

($[a, b]$ déterminant des deux vecteurs a et b).

La variation de surface du polytope est composée de somme de termes P_i et de sommes du type de la surface T_{i+1} du trapèze MNPQ (*fig.* 3)

$$T_{i+1} = h_{i+1} \times L_{i+1} - \frac{[e_{i+1}, v_i]}{2}.$$

D'où

$$T_{i+1} = h_{i+1}\,L_{i+1} - \frac{1}{2}h_{i+1}^2 \frac{[m_i, m_{i+2}]}{[m_i, m_{i+1}][m_{i+1}, m_{i+2}]}.$$

En calculant le développement en série formelle de l'opérateur de Todd à une variable et en l'appliquant au polynôme $V(h)$ on trouve

$$(3)\qquad T_\Sigma[V(h)]|_{h=0} = V(\Delta) + \frac{1}{2}\sum L_i + \frac{1}{4}\sum\frac{1}{[m_i, m_{i+1}]} - \frac{1}{12}\sum\frac{[m_i, m_{i+2}]}{[m_i, m_{i+1}][m_{i+1}, m_{i+2}]}.$$

2) Le calcul pour un polytope entier de $\mathbb{R}^3$ est ramené, d'après le théorème 2 au calcul des invariants $\tau_2(\hat{F})$ pour le cône rationnel associé à la face F, de dimension 1, avec la subdivision construite en [13]. On peut compléter la figure en un polygône fermé Δ_1 (resp. Δ_2) ayant 0 pour sommet (resp. où 0 est remplacé par les extrémités des vecteurs de la subdivision) (*fig.* 4).

Le cône $\hat{F}$ peut être remplacé, par l'intermédiaire d'une transformation unimodulaire, en le cône engendré par les vecteurs

$$n = (1, 0),\quad n' = (p, q)\qquad \text{avec } (p, q) = 1,\qquad 0 \leqq p < q.$$

On voit facilement que le terme complémentaire qu'il faut ajouter à $b_1(\Delta)$ pour obtenir $a_1(\Delta)$ est constitué des deux derniers termes de (3) pour les vecteurs normaux entrant pour OM et ON (*fig.* 3) et *sortant* pour la partie concave soit pour la suite

$(m_0, m_1, \ldots, m_t, m_{t+1})$ avec :

$$m_0=(0,-1), \quad m_1=(-1,0), \quad \ldots, \quad m_t=(p', q'), \quad m_{t+1}=(-q, p), \; pp'+qq'=0, \; 0 \leqq p' < q.$$

Un calcul élémentaire donne (compte tenu de [12])

$$\tau_2(\hat{F}) = s(p, q) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4q}$$

terme déjà explicité par [14].

Les auteurs remercient J. Pommershein qui leur a fait connaître [14] avant publication.

Dans une Note à paraître au *Bull. Amer. Math. Soc.*, S. Cappell et J. Shaneson obtiennent, par d'autres méthodes, une formule pour les $a_i(\Delta)$ pour tout simplexe Δ.

Note remise le 20 juin 1993, acceptée le 16 juillet 1993.

Références bibliographiques

[1] A. I. Barvinok, A polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed, *preprint TRITA*, Royal Institute of Technology, Stockholm 1993.

[2] U. Betke et M. Kneser, Zerelegung und Bewerertungen von Glitter polytopen, *J. Reine Angew. Math.*, 358, 1985, p. 202-208.

[3] M. Dyer, On counting lattice points in polyhedra, *SIAM J. Computing*, 20, 4, 1991, p. 695-707.

[4] L. E. Ehrhart, Nombre de points entiers d'un tétraèdre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258, 1964, p. 39-45.

[5] J.-M. Kantor, Sur le polynôme associé à un polytope à sommets entiers dans $\mathbb{R}^n$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 314, série I, 1992, p. 669-672.

[6] J.-M. Kantor et A. Khovanskii, *Integral points in convex polyhedra, combinatorial Riemann-Roch Theorem and generalized Mac-Laurin formula*, IHES/M/932/37, juin 1992.

[7] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford et B. Saint-Donat, Toroidal Embeddings I, *in* Lecture Notes in Math., 339, Springer-Verlag.

[8] A. Khovanskii et S. Pukhlikov, Mesures additives invariantes pour les polyèdres virtuels, *Algebra i Analyz*, 4, 92, 2, p. 161-185.

[9] Théorème de Riemann-Roch pour les intégrales et les sommes de quasi-polynômes sur les polyèdres virtuels, *ibid.*, 4, 92, 4, p. 188-216.

[10] J. Mordell, Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums, *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*), 15, 1951, p. 41-46.

[11] R. Morelli, Pick's Theorem and the Todd class of a toric variety, *Adv. in Math.* (à paraître).

[12] G. Myerson, On semi-regular continued fractions, *Arch. Math.*, 48, A 1987, p. 420-425.

[13] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Springer-Verlag.

[14] J. Pommershein, Toric varieties, lattice points and Dedekind sums, *Math. Ann.*, 93, p. 1-24.

[15] H. Rademacher et E. Grosswald, *Dedekind Sums, M.A.A. Stud. Math.*, 1972.

J.-M. K. : 29, *rue Lacépède*, 75005 *Paris, France;*

A. K. : *Institut d'étude des systèmes, Académie des Sciences,* 09-*Prospekt* 60-*letia Oktabria*, 117312 *Moscou.*

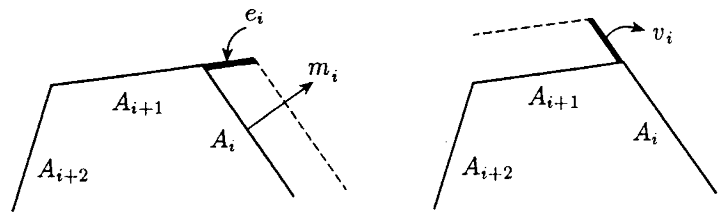

Fig. 1 et 2

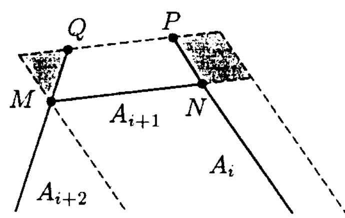

Fig. 3

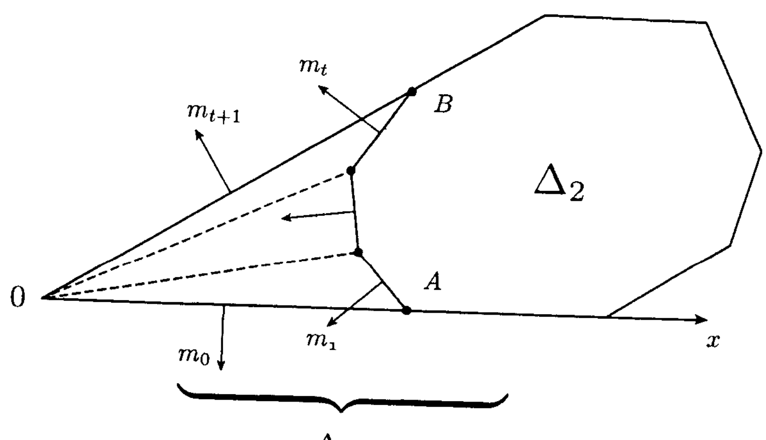

Fig. 4