

La valeur optimale des programmes entiers

Jean B. Lasserre ^a

^a LAAS-CNRS, 7 Avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse, Cédex 4
Courriel : lasserre@laas.fr

Résumé.

On donne une expression de la valeur optimale $f_c(b)$ du programme entier $\max\{c'x \mid x \in \Omega(b) \cap \mathbb{N}^n\}$ où $\Omega(b)$ est le polytope convexe $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Elle est une conséquence de la formule de Brion et Vergne qui évalue la somme $\sum_{x \in \Omega(b) \cap \mathbb{N}^n} e^{c'x}$. On montre que comme en programmation linéaire, $f_c(b)$ peut être obtenue par inspection des coûts réduits aux sommets du polytope. On donne aussi un résultat explicite qui relie $f_c(tb)$ à la valeur optimale du programme linéaire associé, pour des valeurs de $t \in \mathbb{N}$ suffisamment grandes. © Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The optimal value of integer programs

Abstract.

We present a formula for the optimal value $f_c(b)$ of the integer program $\max\{c'x \mid x \in \Omega(b) \cap \mathbb{N}^n\}$ where $\Omega(b)$ is the convex polytope $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. It is a consequence of Brion and Vergne's formula which evaluates the sum $\sum_{x \in \Omega(b) \cap \mathbb{N}^n} e^{c'x}$. As in linear programming, $f_c(b)$ can be obtained by inspection of the reduced-costs at the vertices of the polytope. We also provide an explicit result that relates $f_c(tb)$ and the optimal value of the associated continuous linear program, for large values of $t \in \mathbb{N}$. © Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Etant donnés $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, et le polyèdre convexe $\Omega(y) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = y, x \geq 0\}$ supposé compact, on considère la fonction $f_c : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}$

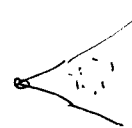
$$y \mapsto f_c(y) := \max\{c'x \mid x \in \Omega(y) \cap \mathbb{N}^n\} \quad (1)$$

dont la version *somme* $\hat{f}_c : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$y \mapsto \hat{f}_c(y) := \sum\{e^{c'x} \mid x \in \Omega(y) \cap \mathbb{N}^n\} \quad (2)$$

a été étudiée par plusieurs auteurs ces dernières années, notamment par Barvinok et Pommersheim [1], Brion et Vergne [2], Pukhlikov et Khovanskii [3]. En particulier, Brion et Vergne [2] donnent une formule explicite de $\hat{f}_c(y)$ comme une somme pondérée sur les sommets de $\Omega(y)$, valide pour tout y dans une chambre γ . Dans cette note on donne une version “*max*” de la formule *somme* de Brion et Vergne, c'est-à-dire, une formule explicite de $f_c(y)$ pour tout y dans une chambre γ . On établit aussi un lien direct entre $f_c(ty)$ et la valeur optimale du programme linéaire associé $p_c^*(ty) := \max_{x \in \mathbb{R}^n}\{c'x \mid Ax = ty; x \geq 0\}$, pour y fixé et des valeurs de $t \in \mathbb{N}$ suffisamment grandes.

$$\sum e < \xi, \eta >$$

$$\xi \in \text{cone}$$


Jean B. Lasserre

$$\text{no formulae ratio } \sum \frac{e < \xi, \eta >}{\text{cone}}$$

2. Résultat principal

On introduit tout d'abord quelques définitions utilisées dans [2]. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{Z}^n$, $y \in \mathbb{Z}^m$ avec $n > m$, et $\Omega(y) \subset \mathbb{R}^n$ le polyèdre convexe

$$\Omega(y) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = y; \ x \geq 0\} \quad (3)$$

que l'on suppose *compact*. Par la suite, c' et $c'x$ dénotent respectivement le transposé du vecteur c et le produit scalaire habituel de deux vecteurs c et x .

On note $A = [A_1 \mid \dots \mid A_n]$ où $A_j \in \mathbb{Z}^m$ est la colonne j de A , pour tout $j = 1, \dots, n$. Avec $\Delta := (A_1, \dots, A_n)$ soit $C(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ le cône convexe fermé généré par la famille Δ . Un sous ensemble σ de $\{1, \dots, n\}$ est une *base* de Δ si la suite $\{A_j\}_{j \in \sigma}$ est une base de $\mathbb{R}^m$, et l'ensemble des bases de Δ est noté $\mathcal{B}(\Delta)$. Pour $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$ soit $C(\sigma)$ le cône convexe généré par $\{A_j\}_{j \in \sigma}$. A tout $y \in C(\Delta)$ on associe l'intersection de tous les cônes $C(\sigma)$ qui contiennent y , ce qui définit une subdivision de $C(\Delta)$ en cônes polyédraux. Les intérieurs des cônes *maximaux* de cette subdivision sont appelés *chambres* dans Brion and Vergne [2] (avec fermeture notée $\bar{\gamma}$). Pour tout $y \in \gamma$, le polyèdre convexe $\Omega(y)$ en (3) est *simple*. Pour une chambre γ , soit $\mathcal{B}(\Delta, \gamma)$ l'ensemble des bases σ telles que $C(\sigma)$ contienne γ , et soit $\mu(\sigma)$ le volume du polytope $\{\sum_{j \in \sigma} t_j A_j \mid 0 \leq t_j \leq 1\}$. Pour tout $b \in \bar{\gamma}$ et $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta, \gamma)$ on a $b = \sum_{j \in \sigma} x_j(\sigma) A_j$ pour des scalaires $x_j(\sigma) \geq 0$. Le vecteur $x(\sigma) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $x_j(\sigma) = 0$ pour tout $j \notin \sigma$, est un *sommet* du polytope $\Omega(b)$. On note V le sous espace $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$. Finalement, étant donné $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$, soit $\pi^\sigma \in \mathbb{R}^m$ le vecteur ligne, solution unique de $\pi^\sigma A_j = c_j$ pour tout $j \in \sigma$. Le vecteur $c \in \mathbb{Z}^n$ est dit *régulier* si $c_j \neq 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, et $c_j - \pi^\sigma A_j \neq 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$ et tout $j \notin \sigma$.

2.1. La formule "somme" discrète de Brion et Vergne

Soit $\hat{f}_c : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie en (2) où l'on suppose que $c \in \mathbb{Z}^n$ est *régulier* et à l'intérieur du cône dual $(\mathbb{R}_+^n \cap V)^*$. Soit $\Lambda := (A\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^m$. En utilisant la fonction génératrice de $\hat{f}_c$, Brion et Vergne [2] montrent que pour tout $y \in \bar{\gamma} \cap \Lambda$

$$\hat{f}_c(y) = \sum_{x(\sigma) : \text{sommet de } \Omega(y)} \frac{e^{c'x(\sigma)}}{\mu(\sigma)} U_\sigma(y, c) \quad (4)$$

où

$$U_\sigma(y, c) := \sum_{g \in G(\sigma)} \frac{e^{2i\pi y(g)}}{V_\sigma(g, c)} \quad \text{avec} \quad V_\sigma(g, c) := \prod_{k \notin \sigma} (1 - e^{-2i\pi A_k(g)} e^{c_k - \pi^\sigma A_k}), \quad (5)$$

et où $G(\sigma) := (\oplus_{j \in \sigma} \mathbb{Z} A_j)^* / \Lambda^*$ (où $*$ dénote la dualité) est un groupe abélien fini d'ordre $\mu(\sigma)$, avec les caractères $e^{2i\pi y(g)}$ pour tout $y \in \Lambda$; en particulier, en écrivant $A_k = \sum_{j \in \sigma} u_{jk} A_j$ pour tout $k \notin \sigma$, $e^{2i\pi A_k(g)} = e^{2i\pi \sum_{j \in \sigma} u_{jk} g_j}$. On remarque le rôle particulier de $c_k - \pi^\sigma A_k$, $k \notin \sigma$, qui est en programmation linéaire, le *coût réduit* de la variable *hors base* x_k par rapport à la base σ .

2.2. La version "max" de la formule de Brion et Vergne

On donne ici la version "max" de la formule discrète (ou *périodique*) (4) de Brion et Vergne [2].

THEOREM 2.1. – Soient $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, avec c régulier à l'intérieur du cône $(\mathbb{R}_+^n \cap V)^*$. Soit $y \in \bar{\gamma} \cap \Lambda$ et soit q le plus petit commun multiple (p.p.c.m.) de $\{\mu(\sigma)\}_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta, \gamma)}$. Supposons que

$$\max_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta, \gamma)} \left[c'x(\sigma) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln U_\sigma(y, rc) \right],$$

est atteint à un $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta, \gamma)$ unique.

2

$$\langle c, \tilde{u} \rangle$$

$$\langle c, x(\sigma) \rangle + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln U_\sigma(y, rc)$$

$$U_\sigma(y, c) = \sum_{\substack{c_1 \in \mathbb{Z} \\ c_2 = -1}} \log \frac{1}{(1 - e^{c_1 c_2})}$$

$$+ \log(1 - e^{c_1 c_2})$$

$$\log \left(\frac{1}{\prod_{c_1 \in \mathbb{Z}} (1 - e^{c_1 c_2})} \right)$$

La valeur optimale des pogrammes entiers

Si $Ax = y$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{N}^n$ alors $f_c(y) = -\infty$, sinon

$$f_c(y) = \max_{x(\sigma) : \text{sommet de } \Omega(y)} \left[c'x(\sigma) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln U_\sigma(y, rc) \right] \quad (6)$$

$$= \max_{x(\sigma) : \text{sommet de } \Omega(y)} \left[c'x(\sigma) + \frac{1}{q} (\deg(P_{\sigma y}) - \deg(Q_{\sigma y})) \right] \quad (7)$$

pour certains polynômes réels $P_{\sigma y}, Q_{\sigma y}$ d'une variable. Le terme $\lim_{r \rightarrow \infty} U_\sigma(y, rc)/r$ en (6) ou $(\deg(P_{\sigma y}) - \deg(Q_{\sigma y}))/q$ en (7), est la somme de certains coût-réduits $c_k - \pi^\sigma A_k$, $k \notin \sigma$.

Proof. – On utilise la formule $e^{f_c(y)} = \lim_{r \rightarrow \infty} (\hat{f}_{rc}(y))^{1/r}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} e^{f_c(y)} &= \lim_{r \rightarrow \infty} (\hat{f}_{rc}(y))^{1/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{x(\sigma) : \text{sommet de } \Omega(y)} \frac{e^{rc'x(\sigma)}}{\mu(\sigma)} \sum_{g \in G(\sigma)} \frac{e^{2i\pi y(g)}}{V_\sigma(g, rc)} \right]^{1/r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{x(\sigma) : \text{sommet de } \Omega(y)} H_\sigma(y, rc) \right]^{1/r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Avec rc au lieu de c en (5), on voit que $V_\sigma(g, rc)$ est une fonction de la variable $v := e^r$ et donc, à son tour, $H_\sigma(y, rc)$ est une fonction de v de la forme

$$H_\sigma(y, rc) = (e^r)^{c'x(\sigma)} \sum_{g \in G(\sigma)} \frac{e^{2i\pi y(g)}}{\sum_j (\delta_j(\sigma, g, A) \times (e^r)^{\alpha_j(\sigma, c)})}, \quad (9)$$

pour certains coefficients $\{\delta_j(\sigma, g, A), \alpha_j(\sigma, c)\}$. Les coefficients $\alpha_j(\sigma, c)$ sont des sommes de coûts réduits $c_k - \pi^\sigma A_k$, $k \notin \sigma$, qui ne dépendent pas de y , comme d'ailleurs les coefficients (complexes) $\{\delta_j(\sigma, g, A)\}$.

Soit $v := e^{r/q}$ où q est le p.p.c.m. de $\{\mu(\sigma)\}_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta, \gamma)}$. Comme $q(c_k - \pi^\sigma A_k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \notin \sigma$,

$$H_\sigma(y, rc) = v^{qc'x(\sigma)} \times \frac{P_{\sigma y}(v)}{Q_{\sigma y}(v)}, \quad (10)$$

pour des polynômes réels $P_{\sigma y}, Q_{\sigma y} \in \mathbb{R}[v]$. Donc quand $r \rightarrow \infty$,

$$H_\sigma(y, rc) \approx (e^{r/q})^{qc'x(\sigma) + \deg(P_{\sigma y}) - \deg(Q_{\sigma y})}, \quad (11)$$

de telle sorte que la limite en (8) est donnée par

$$\max_{x(\sigma) : \text{sommet de } \Omega(y)} e^{c'x(\sigma) + (\deg(P_{\sigma y}) - \deg(Q_{\sigma y}))/q},$$

ce qui donne (6)-(7). □

Comme pour le programme linéaire associé $p_c^*(y) := \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{c'x \mid Ax = y, x \geq 0\}$, la valeur optimale $f_c(y)$ peut être obtenue par inspection (mais plus compliquée, via (7)) des *coûts réduits* aux sommets.

En considérant maintenant le polytope dilaté $\Omega(ty)$, $t \in \mathbb{N}$, on obtient le résultat suivant.

COROLLARY 2.2. – Soient $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, avec c régulier à l'intérieur du cône $(\mathbb{R}_+^n \cap V)^*$. Soit $y \in \gamma \cap \Lambda$ et soit $x^* \in \Omega(y)$ un sommet optimal du programme linéaire $p_c^*(y) := \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{c'x \mid Ax = y, x \geq 0\}$, i.e., $p_c^*(y) = c'x^* = c'x(\sigma^*)$, $\sigma^* \in \mathcal{B}(\Delta, \gamma)$. Alors, pour $t \in \mathbb{N}$ suffisamment grand

$$f_c(ty) - p_c^*(ty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{r} \ln U_{\sigma^*}(ty, rc) \right]. \quad (12)$$

En particulier, pour $t \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, la fonction $t \mapsto f_c(ty) - p_c^*(ty)$ est périodique (constante) de période $\mu(\sigma^*)$, et est une somme de coûts réduits par rapport à la base optimale $\sigma^* \in \mathcal{B}(\Delta, \gamma)$.

Jean B. Lasserre

$$\begin{array}{c} \text{leur cardinal en } t \\ \downarrow \\ \text{pol en } t \end{array} \quad \frac{e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle}}{\pi (1 - e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle})} \quad y \text{ tel } \langle \alpha, \gamma \rangle \neq 0 \quad \forall (\alpha, \gamma)$$

Proof. – Soit $t \in \mathbb{N}$ et notons que $p_{rc}^*(ty) = \text{trp}_c^*(y) = \text{trc}'x^* = \text{trc}'x(\sigma^*)$. Comme dans la preuve du Théorème 2.1, et avec ty au lieu de y , on a

$$\widehat{f}_{rc}(ty)^{1/r} = e^{tc'x^*} \left[\frac{U_{\sigma^*}(ty, rc)}{\mu(\sigma^*)} + \sum_{\text{sommet } x(\sigma) \neq x^*} \left(\frac{e^{rc'x(\sigma)}}{e^{rc'x(\sigma^*)}} \right)^t \frac{U_{\sigma}(ty, rc)}{\mu(\sigma)} \right]^{1/r}$$

et au vu de (9)-(10), posant $\delta_{\sigma} := c'x^* - c'x(\sigma) \geq 0$ et $v := e^{r/q}$,

$$\widehat{f}_{rc}(ty)^{1/r} = e^{tc'x^*} \left[\frac{U_{\sigma^*}(ty, rc)}{\mu(\sigma^*)} + \sum_{\text{sommet } x(\sigma) \neq x^*} v^{-tq\delta_{\sigma}} \frac{P_{\sigma ty}(v)}{Q_{\sigma ty}(v)} \right]^{1/r}$$

En fait, $\delta_{\sigma} > 0$ si $\sigma \neq \sigma^*$ parce que $\Omega(y)$ est simple si $y \in \gamma$, et c est régulier. Donc, si x^* est un sommet optimal du programme linéaire associé, les coûts réduits $c_k - \pi^{\sigma^*} A_k$, $k \notin \sigma^*$, par rapport à la base optimale σ^* , sont alors tous non positifs, et en fait, strictement négatifs si c est régulier. Alors, $c'x^* > c'x(\sigma)$ si $\sigma \neq \sigma^*$. Donc, au vu du coefficient $e^{-tq\delta_{\sigma}}$ et du nombre fini de sommets, quand $r \rightarrow \infty$, le terme

$$\sum_{\text{sommet } x(\sigma) \neq x^*} v^{-tq\delta_{\sigma}} \frac{P_{\sigma ty}(v)}{Q_{\sigma ty}(v)} \sim \frac{e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle}}{\pi \langle \alpha, \gamma \rangle} \left(\frac{e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle}}{1 - e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle}} \right)$$

est négligeable devant $U_{\sigma^*}(ty, rc)$ pour t suffisamment grand, parce que les degrés et coefficients de $P_{\sigma ty}$ and $Q_{\sigma ty}$ qui dépendent de ty , mais pas de la grandeur de ty (cf. (9)-(10)) sont tous bornés en ty . Le passage à la limite quand $r \rightarrow \infty$, donne

$$e^{f_c(ty)} = e^{tc'x(\sigma^*)} \lim_{r \rightarrow \infty} U_{\sigma^*}(ty, rc)^{1/r},$$

d'où l'on déduit (12). Finalement, la périodicité vient du terme $e^{2i\pi ty}(g)$ en (5) pour $g \in G(\sigma^*)$. La période est donc l'ordre de $G(\sigma^*)$, i.e., le volume du polytope $\{ \sum_{j \in \sigma^*} t_j A_j \mid 0 \leq t_j \leq 1 \}$ (ou le déterminant de la matrice $[A_j]_{j \in \sigma^*}$). $\square$

$$e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle} \sum$$

Références bibliographiques

- [1] A.I. Barvinok, J.E. Pommersheim. An algorithmic theory of lattice points in polyhedra, in: New Perspectives in Algebraic Combinatorics, MSRI Publications 38 (1999) 91-147.
- [2] M. Brion, M. Vergne. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997) 797-833.
- [3] A.V. Pukhlikov, A.G. Khovanskii. A Riemann-Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials over virtual polytopes, St. Petersburg Math. J. 4 (1993) 789-812.

read y such that

$$\frac{1}{(1 - e^{(y_1 - y_2)})} \frac{1}{(1 - e^{(y_2 - y_3)})} \left(\frac{1}{(1 - e^{(y_3 - y_1)})} \right) \frac{y_1 e_1}{e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle}} \frac{1}{\pi (1 - e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle})}$$

so that

$$\frac{1}{(1 - e^{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3})} \left(\frac{1}{(1 - e^{b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3})} \right) \frac{1}{(1 - e^{c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3})}$$

y tel $\langle \alpha, \gamma \rangle \neq 0$ $y_3 = 0$ $t \in \langle \alpha, \gamma \rangle$ $\frac{e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle}}{\pi (1 - e^{t \langle \alpha, \gamma \rangle})}$