$\Delta_{21}(d;\delta,1) = \delta_{6,c}(2d,\Delta_{20}(d.(\delta+1);\delta-1))$

$\delta_1(d,\delta,s+2) = (d-s-1).(\delta-s-2)+d$ que nous notons δ_1 ci-dessous

$\Delta_{21,u}(d;\delta,s+2) = \Delta_{14,a}(\,4\delta_1\,;\,[\Delta_{21}(\delta_1;\delta_1,s),\delta_1,\delta_1]\,)$

$\Delta_{21,a}(d;\delta,s+2) = \Delta_{21}(d;\delta,s+1) + 2\delta$

$\Delta_{21,b}(d;\delta,s+2) = \Delta_{20}(\,\Delta_{21,u}(d;\delta,s+2) + 2(\delta-s-2))\,;\,\delta\,)$

$\Delta_{21}(d;\delta,s+2) = \delta_{6,c}(\,\Delta_{21,a}(d;\delta,s+2)\,,\,\Delta_{21,b}(d;\delta,s+2)\,)$

preuve> Nous renvoyons le cas $n = 0$ à la fin de la preuve.
Voyons le cas général.
Tout d'abord, si $s = 0$, l'implication forte $^*(\,P^2 \leqslant 0 \Rightarrow P = 0)^*$ admet pour fonction Δ la fonction $d \longmapsto 2.d$ (prop. 14.4.f)) et elle se relit :

$$^*(\,P(U).P(V) \leqslant 0 \Rightarrow P(Z) = 0\,)^*.$$

Si $s = 1$, $P(X,U) = C(X).U - D(X)$. On raisonne selon le signe de $C(X)$.
Avec $C(X) = 0$:

On a une implication simple qui ne coûte rien : $[C(X) = 0,\ P(U).P(V) \leqslant 0] \Rightarrow P(Z)^2 \leqslant 0$ obtenue en écrivant $P(Z)^2 \equiv P(U).P(V)$ (mod $C(X)$). Puis, comme pour $s = 0$, l'implication $P(Z)^2 \leqslant 0 \Rightarrow P(Z) = 0$, qui accepte pour fonction Δ la fonction $d \longmapsto 2d$.

Avec $C(X) \neq 0$:

On a tout d'abord l'existence potentielle $^*(\,C(X) \neq 0 \Rightarrow \exists\, T\ \ 1 = C(X).T\,)^*$ avec pour fonction Δ : $\Delta_{20}(d;\delta-1)$
L'implication simple $1 = C(X).T \Rightarrow P(X,T.D(X)) = 0$, ne coûte rien.
Elle fournit donc (prop. 17) l'existence potentielle :

$$^*(\,1 = C(X).T \Rightarrow \exists\, Z\ \ P(X,Z) = 0)^*$$

avec pour fonction Δ la fonction $d.(\delta+1)$.
En combinant ces deux existences potentielles, on obtient :

$^*(\,C(X) \neq 0 \Rightarrow \exists\, T, Z\ \ P(X,Z) = 0)^*$ avec la fonction Δ : $\Delta_{20}(d.(\delta+1);\delta-1)$

Il ne reste plus qu'à regrouper les deux cas $C(X) = 0$ et $C(X) \neq 0$ (majoration 15,c).

Nous passons à la partie "récurrence sur s " de la preuve. Nous supposons P de degré $s+2$ en Z.

Nous cherchons tout d'abord une majoration $\Delta_{21,u}(\,d\,;\,\delta\,,\,s+2\,)$ *valable pour le cas où* P *est unitaire*. Il s'agit, pour tout système $\mathbb{H}$ de csg où ne figure pas la variable Z, d'expliciter la majoration correspondant à la construction:

$$^*(\,\mathbb{H} \Rightarrow P(X,Z) \neq 0\,)^* \quad \underset{\text{cons}}{\Longleftarrow} \quad ^*(\,\mathbb{H} \Rightarrow P(X,U).P(X,V) > 0\,)^*$$

L'implication forte de l'hypothèse, supposée de degré $d \geq \delta$, (sinon, P n'y figure pas explicitement) s'écrit :

$$S_1(X) + \sum_{i=1}^{h} Q_i(X).B_i^{\,2}(X,Z) \; - \; P(X,Z).G(X,Z) + \sum_{j=1}^{r} N_j(X).C_j(X,Z) \; = 0$$

avec $Q_i(X) \in \mathcal{Cp}(F_{\geq} \cup F_{>})$ et $N_j(X) \in F_{=}$. Les polynômes $B_i(X,Z)$ et $C_j(X,Z)$ peuvent être pris modulo P en Z (parce que P est unitaire), auquel cas $\deg_Z(G) \leqslant s$. Après cette réduction modulo P nous obtenons une implication forte $\mathfrak{I}$ dont le degré est majoré par :

$\delta_1(d,\delta,s+2) = (d-s-1).(\delta-s-2) + d$ que nous notons δ_1 dans la suite

L'implication forte $\mathfrak{I}$ se relit tout d'abord :

$$^*(\,\mathbb{H} \Rightarrow G(X,Z) \neq 0\,)^* \quad \text{de degré majoré par } \delta_1$$

Ce qui fournit, par hypothèse de récurrence, une implication forte:

$$^*(\,\mathbb{H} \Rightarrow G(X,U).G(X,V) > 0\,)^* \quad \text{de degré majoré par } \Delta_{21}(\delta_1;\delta_1,s)$$

En remplaçant Z par U et V l'implication forte $\mathfrak{I}$ se relit

$$^*(\mathbb{H} \Rightarrow P(\mathbf{X},U).G(\mathbf{X},U) > 0)^* \quad , \quad ^*(\mathbb{H} \Rightarrow P(\mathbf{X},V).G(\mathbf{X},V) > 0)^*$$

de degrés majorés par δ_1 . On obtient donc l'implication forte:

$$^*(\mathbb{H} \Rightarrow [G(\mathbf{X},U).G(\mathbf{X},V) > 0,\ P(\mathbf{X},U).G(\mathbf{X},U) > 0,\ P(\mathbf{X},V).G(\mathbf{X},V) > 0])^* \quad (1)$$

acceptant pour fonction Δ : $d' \longmapsto \Delta_{14,a}(d';[\Delta_{21}(\delta_1;\delta_1,s)),\delta_1,\delta_1])$.

En combinant l'implication triviale $[A.C > 0, B.D > 0] \Rightarrow A.B.C.D > 0$ avec l'implication : $[A.B.C.D > 0, A.B > 0] \Rightarrow C.D > 0$ (cf.14.4.c) on obtient une implication forte :

$$^*([A.B > 0, A.C > 0, B.D > 0] \Rightarrow C.D > 0)^* \qquad (2)$$

Avec pour A, B, C, D : $G(\mathbf{X},U)$, $G(\mathbf{X},V)$, $P(\mathbf{X},U)$, $P(\mathbf{X},V)$, une fonction Δ acceptable est : $d' \longmapsto \sup(d'.\delta_1/\delta\ ,\ d'+2(\delta_1-\delta))$ (majoration 14,4,b)

Il reste à combiner par transitivité (1) et (2) pour obtenir :

$$^*(\mathbb{H} \Rightarrow P(\mathbf{X},U).P(\mathbf{X},V) > 0)^*$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{14,a}(\sup(d'.\delta_1/\delta,d'+2(\delta_1-\delta))\ ;\ [\Delta_{21}(\delta_1;\delta_1,s)),\delta_1,\delta_1])$, et donc de degré majoré par : $\Delta_{14,a}(4\delta_1;[\Delta_{21}(\delta_1;\delta_1,s)),\delta_1,\delta_1])$ (partie réciproque dans la proposition 14 : remplacer d' par 4δ).

En définitive, nous avons obtenu, pour P unitaire de degré s+2 en Z, l'existence potentielle:

$$^*(P(U).P(V) \leqslant 0 \Rightarrow \exists\, Z\ \ P(Z) = 0)^*$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{21,u}(d;\delta,s+2) = \Delta_{14,a}(4\delta_1\ ;\ [\Delta_{21}(\delta_1;\delta_1,s),\delta_1,\delta_1])$.

Nous passons maintenant au cas non unitaire, et nous raisonnons selon le signe de $C(\mathbf{X})$, coefficient dominant en Z de $P(\mathbf{X},Z)$: $P(\mathbf{X},Z) = C(\mathbf{X}).Z^{s+2} + R(\mathbf{X},Z)$

Avec $C(\mathbf{X}) = 0$:

On a l'implication simple, de degré absolu $\leq 2.\delta$

$$^*\ [C(\mathbf{X}) = 0,\ P(U).P(V) \leqslant 0] \Rightarrow R(U).R(V) \leqslant 0 \qquad (3)$$

obtenue en écrivant $R(U).R(V) \equiv P(U).P(V)$ (mod $C(\mathbf{X})$). avec donc pour fonction Δ la fonction $d \longmapsto d + 2\delta$.

Par ailleurs on a l'existence potentielle (hypothèse de récurrence) :

$$^*(R(U).R(V) \leqslant 0 \Rightarrow \exists\, Z\ \ R(Z) = 0)^* \qquad (4)$$

qui admet pour fonction Δ : $\Delta_{21}(d;\delta,s+1)$.

Enfin on a l'implication simple qui ne coûte rien :

$$[C(\mathbf{X}) = 0,\ R(Z) = 0] \Rightarrow P(Z) = 0 \qquad (5)$$

Par transitivité de ces trois existences potentielles, on obtient :

$$^*([C(\mathbf{X}) = 0,\ P(U).P(V) \leqslant 0] \Rightarrow \exists\, Z\ \ P(Z) = 0)^* \qquad (6)$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{21,a}(d;\delta,s+2) = \Delta_{21}(d;\delta,s+1) + 2\delta$

Avec $C(\mathbf{X}) \neq 0$: on pose $P_1(\mathbf{X},T,Z) = T.R(\mathbf{X},Z) + Z^{s+2}$.

On a tout d'abord l'existence potentielle

$$^*(C(\mathbf{X}) \neq 0 \Rightarrow \exists\, T\ \ 1 = C(\mathbf{X}).T\ )^*$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{20}(d;\delta)$

Par renforcement simultané de l'hypothèse et de la conclusion, on obtient l'existence potentielle ;

$$^*([\ C(\mathbf{X}) \neq 0\ ,\ P(U).P(V) \leqslant 0] \Rightarrow \exists\, T\ \ [1 = C(\mathbf{X}).T,\ P(U).P(V) \leqslant 0]\ )^* \qquad (7)$$

avec la même fonction Δ : $\Delta_{20}(d;\delta)$

On a l'implication simple, de degré absolu $\leq 2.(\delta - s - 2)$

$$[1 = C(\mathbf{X}).T,\ P(U).P(V) \leqslant 0] \Rightarrow P_1(U).P_1(V) \leqslant 0 \qquad (8)$$

obtenue en écrivant : $P_1(U).P_1(V) \equiv P(U).P(V)$ (mod $1 - C(\mathbf{X}).T$).

Par ailleurs l'existence potentielle (cas unitaire) :

$$^{*}\!\left(P_1(U).P_1(V) \leqslant 0 \Rightarrow \exists\, Z\ P_1(Z) = 0\right)^{*} \tag{9}$$

a pour fonction Δ : $\Delta_{21,u}(d;\delta,s+2)$.

En combinant (8) et (9) on obtient une existence potentielle avec pour fonction Δ :

$\Delta_{21,u}(d;\delta,s+2)+2(\delta - s - 2)$.

Et on peut rappeler l'hypothèse $1 = C(\mathbf{X}).T$ dans la conclusion :

$$^{*}\!\left([1 = C(\mathbf{X}).T,\ P(U).P(V) \leqslant 0] \Rightarrow \exists\, Z\ [1 = C(\mathbf{X}).T,\ P_1(Z) = 0]\ \right)^{*} \tag{10}$$

(même fonction Δ)

Enfin on a l'implication simple qui ne coûte rien :

$$^{*}\!\left([1 = C(\mathbf{X}).T,\ P_1(Z) = 0] \Rightarrow P(Z) = 0\right)^{*} \tag{11}$$

Par transitivité des existences potentielles (7), (10) et (11), on obtient :

$$^{*}\!\left([C(\mathbf{X}) \neq 0,\ P(U).P(V) \leqslant 0] \Rightarrow \exists\, Z\ P(Z) = 0\right)^{*} \tag{12}$$

avec pour fonction Δ :

$$\Delta_{21,b}(d;\delta,s+2) = \Delta_{20}(\ \Delta_{21,u}(d;\delta,s+2) + 2(\delta - s - 2))\ ;\ \delta\ )$$

Il ne reste plus qu'à regrouper les deux cas $C(\mathbf{X}) = 0$ (6) et $C(\mathbf{X}) \neq 0$ (12) au moyen de la majoration 15,c) pour obtenir la majoration finale :

$$\Delta_{21}(d;\delta,s+2) = \delta_{6,c}(\ \Delta_{21,a}(d;\delta,s+2)\ ,\ \Delta_{21,b}(d;\delta,s+2)\ )$$

Voyons pour terminer le cas $n = 0$. Les initialisations sont faciles. La récurrence s'obtient par relecture du cas général. Le calcul est simplifié parce qu'il n'y a pas à raisonner selon le signe ($= 0$ ou $\neq 0$) du coefficient dominant de P et l'inverse du coefficient dominant est dans $\mathbf{K}$ donc ne nécessite pas d'existence potentielle. En particulier, contrairement au cas général, la récurrence n'introduit pas de nouvelle variable. ❑

Théorème et majorations 22 : (autorisation de rajouter une racine sur l'intervalle où le signe change) Hypothèses et notations comme au théorème 21.

On a l'existence potentielle :

$$^{*}\!\left([\ P(U).P(V) < 0\ ] \Rightarrow \exists\, Z\ [\ P(Z) = 0,\ P(U).P(V) < 0\ ,\ (Z - U).(Z - V) < 0\ ]\ \right)^{*}$$

et une fonction Δ acceptable, notée $\Delta_{22,a}(d;\delta,s)$, peut être calculée au moyen des formules récurrentes suivantes:

$$\Delta_{22,a}(d;\delta,0) = 2.\delta\ ,\quad \Delta_{22,a}(d;\delta,1) = \Delta_{21}(\ (d+4).\delta\ ;\ \delta\ ,\ 1\ )$$

$$\Delta_{22,a}(d;\delta,s+1) = \Delta_{21}(\ \delta_{6,a}(\ d.\delta\ ,\ (\ \Delta_{22,a}(d;\delta-1,s)+4\ )\ .\ \delta\ )\ ;\ \delta\ ,\ s+1\ ).$$

On a également les existences potentielles :

$$^{*}\!\left([\ P(U) < 0 < P(V),\ U < V\ ] \Rightarrow \exists\, Z\ [\ P(Z) = 0,\ P(U) < 0 < P(V),\ U < Z < V\ ]\ \right)^{*}$$

$$^{*}\!\left([\ P(U) > 0 > P(V),\ U < V\ ] \Rightarrow \exists\, Z\ [\ P(Z) = 0,\ P(U) > 0 > P(V),\ U < Z < V\ ]\ \right)^{*}$$

Et une fonction Δ acceptable est donnée par :

$$\Delta_{22}(d;\delta,s) = \Delta_{22,a}(\ 2.d+2\ ;\ \delta\ ,\ s\ ).$$

preuve> Voyons tout d'abord la première existence potentielle, qui se démontre par récurrence sur s.

Si $s = 0$ on a l'implication forte $^{*}(\ [\ P(U).P(V) < 0\ ] \Rightarrow 1 = 0\ )^{*}$ de degré $2.\delta$ ce qui montre que $\Delta_{22,a}(d;\delta,0) = 2.\delta$.

Avec $s+1$: tout d'abord, le théorème 21, avec renforcement de l'hypothèse puis rappel de l'hypothèse dans la conclusion fournit l'existence potentielle :

$$^{*}\!\left(P(U).P(V) < 0 \Rightarrow \exists\, Z\ [\ P(U).P(V) < 0\ ,\ P(Z) = 0\ ]\ \right)^{*} \tag{1}$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{21}(\ d\ ;\ \delta\ ,\ s+1\ )$.

Si $s+1 = 1$, notons A le coefficient de Z dans $P(Z)$, l'implication forte :

$^*([P(Z) = 0, P(U).P(V) < 0] \Rightarrow [P(Z) = 0, P(U).P(V) < 0 , (Z-U).(Z-V) < 0])^*$
obtenue en écrivant : $A^2.(Z-U).(Z-V) \equiv P(U).P(V) \mod P(Z)$, accepte pour fonction $\Delta : d \longmapsto d\delta + 4\delta$ (comme 14.4.d).

Supposons $s \geq 1$. Nous démontrons maintenant l'existence potentielle :
$^*([P(U).P(V) < 0, P(Z) = 0] \Rightarrow \exists Z' [P(Z') = 0, P(U).P(V) < 0, (Z'-U).(Z'-V) < 0])^*$
cas par cas, selon le signe de $(Z-U).(Z-V)$.

Si $(Z-U).(Z-V) \nless 0$.

L'implication : $[P(U).P(V) \neq 0, P(Z) = 0] \Rightarrow (Z-U).(Z-V) \neq 0$ admet pour fonction Δ : $d \longmapsto d.\delta$. (petit calcul sans difficulté)

Et l'implication $[(Z-U).(Z-V) \nless 0, (Z-U).(Z-V) \neq 0] \Rightarrow (Z-U).(Z-V) < 0$ est triviale. Donc l'implication :

$$[P(U).P(V) < 0, P(Z) = 0 , (Z-U).(Z-V) \nless 0] \Rightarrow (Z-U).(Z-V) < 0$$

admet pour fonction $\Delta : d \longmapsto d.\delta$.

Si $(Z-U).(Z-V) \ngtr 0$.

On considère une nouvelle variable T et le polynôme R défini par :

$$R(\mathbf{X},Z,T) := (P(\mathbf{X},T) - P(\mathbf{X},Z)) / (T-Z)$$

qui est de degré total $\leq \delta-1$, et de degré $\leq s$ en T .

Notons pour alléger $R(T)$ pour $R(\mathbf{X},Z,T)$ et $P(T)$ pour $P(\mathbf{X},T)$.

Notons $\mathbb{H}_1(\mathbf{X},Z)$ pour $[P(U).P(V) < 0 , P(Z) = 0 , (Z-U).(Z-V) \ngtr 0]$.

(c'est l'hypothèse de l'existence potentielle que nous voulons démontrer)

On a une implication forte :

$$^*(\mathbb{H}_1(\mathbf{X},Z) \Rightarrow R(U).R(V) < 0)^* \qquad (2)$$

obtenue en écrivant : $(R(U).R(V)).((Z-U).(Z-V)) \equiv P(U).P(V) \quad (\mod P(Z))$

ce qui fournit la fonction $\Delta : d \longmapsto (d+4).\delta$ (comme 14.4.d)

Comme $R(T)$ est de degré $\leq s$ en T on applique l'hypothèse de récurrence. On obtient :

$$^*(R(U).R(V) < 0 \Rightarrow \exists Z' [R(Z') = 0, R(U).R(V) < 0, (Z'-U).(Z'-V) < 0])^* \qquad (3)$$

avec pour fonction $\Delta : \Delta_{22,a}(d;\delta-1,s)$.

En combinant (2) et (3) et en rappelant une hypothèse dans la conclusion, on obtient :

$$^*(\mathbb{H}_1(\mathbf{X},Z) \Rightarrow \exists Z' [R(Z') = 0, P(Z) = 0, (Z'-U).(Z'-V) < 0])^* \qquad (4)$$

avec pour fonction $\Delta : (\Delta_{22,a}(d;\delta-1,s)+4) . \delta$.

L'implication

$$^*([R(Z') = 0, P(Z) = 0, (Z'-U).(Z'-V) < 0] \Rightarrow [P(Z') = 0, (Z'-U).(Z'-V) < 0])^* \qquad (5)$$

est une implication simple qui ne coûte rien.

En combinant (4) et (5) on obtient :

$^*(\mathbb{H}_1(\mathbf{X},Z) \Rightarrow \exists Z' [P(Z') = 0, (Z'-U).(Z'-V) < 0])^*$

avec pour fonction $\Delta : (\Delta_{22,a}(d;\delta-1,s)+4) . \delta$.

En regroupant les deux cas $(Z-U).(Z-V) \nless 0$ et $(Z-U).(Z-V) \ngtr 0$ on obtient :
$^*([P(U).P(V) < 0,P(Z) = 0] \Rightarrow \exists Z'[P(Z') = 0, P(U).P(V) < 0, (Z'-U).(Z'-V) < 0])^*$
avec pour fonction Δ :

$$\Delta_{22,b}(d;\delta,s) = \delta_{6,a}(d.\delta , (\Delta_{22,a}(d;\delta-1,s)+4) . \delta).$$

Enfin en combinant le dernier résultat avec (1) :

$$^*(P(U).P(V) < 0 \Rightarrow \exists Z' [P(Z') = 0, P(U).P(V) < 0, (Z'-U).(Z'-V) < 0])^* \qquad (6)$$

avec pour fonction $\Delta : \Delta_{21}(\Delta_{22,b}(d;\delta,s) ; \delta , s+1)$. Ceci fournit la relation récurrente cherchée.

Il nous reste à calculer Δ_{22} .
D'après la proposition 14.4.e (en prenant pour A et B : $(Z-U)$ et $(V-Z)$)
$[\ P(Z)=0,\ P(U).P(V)<0\ ,\ (Z-U).(Z-V)<0,\ U<V\ ] \Rightarrow$
$$[\ P(Z)=0,\ P(U).P(V)<0\ ,\ U<Z<V\ ]$$
accepte pour fonction $\Delta:\ d \longmapsto 2.d+2$.
Par ailleurs, on a l'implication triviale : $P(U)<0<P(V) \Rightarrow P(U).P(V)<0$
D'où, par transitivité avec (6) : $\Delta_{22}(d;\delta,s)=\Delta_{22,a}(\ 2.d+2\ ;\ \delta\ ,\ s\ )$. ❑

Tableaux de Hörmander et C^ie^

Proposition et majorations 23 : (Tableau et algorithme de Hörmander)
Soit **K** un corps ordonné, sous-corps d'un corps réel clos **R** .
Soit $L=[P_1\ ,P_2\ ,...,P_k]$ une liste de polynômes de **K**[Y] .
Soit $\mathcal{P}$ la famille de polynômes engendrée par les éléments de L et par les opérations $P \longmapsto P'$, et $(P,Q) \longmapsto$ **Rst**(P,Q) . Alors :

1) $\mathcal{P}$ est finie.
2) On peut établir le tableau complet des signes pour $\mathcal{P}$ en utilisant les seules informations suivantes : le degré de chaque polynôme de la famille; les diagrammes des opérations $P \longmapsto P'$, et $(P,Q) \longmapsto \mathrm{Rst}(P,Q)$ (où $\deg(P) \geq \deg(Q)$) dans $\mathcal{P}$; et les signes des constantes de $\mathcal{P}$.

Si s majore les degrés des P_i , le nombre de coefficients d'éléments de $\mathcal{P}$, et donc aussi le nombre de points du tableau de Hörmander est majoré par : $\Lambda_{23}(s,k)=(k+1)^{2^s}$

preuve> D'après la preuve le la proposition 23 , pour obtenir $\mathcal{P}$, il suffit de répéter s fois les deux opérations "dérivation" et "reste". Un calcul précis ne donnerait guère mieux que la majoration $\Lambda_{27}(s,k)$ qui sera obtenue plus loin, et à laquelle nous renvoyons. ❑

Pseudo-restes : Dans un tableau de Hörmander paramétré, on a intérêt à remplacer les restes par des psudo-restes. Rappelons que le pseudo-reste de $P(X,Y)$ par $Q(X,Y)$, de degrés respectifs en Y égaux à p et $q \leq p$ est défini comme égal au déterminant polynomial de la matrice ayant pour lignes les polynômes :

$Q,\ Q.Y,\ ...,\ Q.Y^{p-q},\ P$ écrits sur la base $Y^p,\ ...,\ Y,\ 1$ (on est dans **K**[X][Y]).

On a alors une égalité : $S(X)^{p-q+1}.P(X,Y) = Q(X,Y).T(X,Y) + R(X,Y)$ où $S(X)$ est le coefficient dominant de Q . Nous appellerons *degré de la pseudo-division de* P *par* Q le plus grand des degrés totaux des trois polynômes $S(X)^{p-q+1}.P(X,Y)$, $Q(X,Y).T(X,Y)$ et $R(X,Y)$. (il suffit de prendre le plus grand de deux d'entre eux)

Lemme et majorations 26, avec paramètres : (évidence forte et existence potentielle pour les faits élémentaires lisibles sur un tableau de Hörmander paramétré)
Soit **K** un corps ordonné. Soit $\mathcal{P}$ une famille de polynômes de $\mathbf{K}[X_1,X_2,...,X_n][Y]$ stable par les opérations "pseudo-reste" et "dérivation", modulo un système de conditions de signes $H_\Sigma(X_1,X_2,...,X_n)$, système qui fixe également la forme précise du tableau de Hörmander de la famille $\mathcal{P}$ (les polynômes figurant dans H_Σ sont d'une part les polynômes constants, c.-à-d. sans Y , de la famille $\mathcal{P}$, d'autre part les polynômes dont l'annulation garantit le degré d'un pseudo-reste).

1) les points du tableau de Hörmander, définis à la Thom par leur construction même, vérifient l'existence potentielle pour leur codage à la Thom, sous l'hypothèse $\mathbb{H}_\Sigma$.
2) la comparaison (pour l'ordre) de 2 points consécutifs du tableau est fortement évidente à partir de $\mathbb{H}_\Sigma$ et de leur codage à la Thom.
3) en chaque point du tableau, les signes de tous les polynômes de la famille sont fortement évidents à partir de $\mathbb{H}_\Sigma$ et du codage à la Thom du point considéré.
4) sur chaque intervalle ouvert minimal du tableau les signes de tous les polynômes de la famille sont fortement évidents à partir de $\mathbb{H}_\Sigma$, du codage à la Thom des extrémités de l'intervalle (si l'intervalle est non borné, seule l'extrémité finie intervient) et du fait que le point est situé entre les extrémités.

Soient, pour la famille $\mathcal{P}$, m le nombre de polynômes non constants (en Y), m_1 le nombre de polynômes de degré 1 (en Y), δ une majoration des degrés (totaux) des éléments de $\mathcal{P}$ et des degrés des pseudo-divisions, et s une majoration des degrés en Y , soit enfin h le nombre de points du tableau de Hörmander. Les fonctions Δ correspondant aux points 1 , 2 , 3 , 4 du lemme sont données par les formules récurrentes suivantes :

Initialisations :

$\Delta_{26,1}(d;\delta,s,m_1) = \Delta_{21}(\ \Delta_{21}(d\ ;\ \delta\ ,\ 1)\ ;\ \delta\ ,\ 1)$

$\delta_{26,2}(\delta,s,m_1) = \delta_{26,3}(\delta,s,m_1) = \delta_{26,4}(\delta,s,m_1) = 4\delta$

$\Delta_{26,2}(d;\delta,s,m_1) = \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m_1) = \Delta_{26,4}(d;\delta,s,m_1) = \Delta_{26,4,a}(d;\delta,s,m_1) = \delta_6(d;\ 4\delta)$;

Récurrences : $m \geq m_1$

$\Delta_{26,1,a}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,3}(\ \delta_6(d\ ,\ 2.\delta\ )\ ;\ \delta,s,m)$

$\Delta_{26,1,b}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{26,2}(d;\delta,s,m)\ ;\delta,s,m)\ ;\delta,s,m)$

$\Delta_{26,1,b'}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{10}(d;\delta)\ ;\ \delta,s,m)$

$\Delta_{26,1,c}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,1}(\ \Delta_{26,1,b}(\ \Delta_{22}(\ \Delta_{26,4}(d;\delta,s,m)\ ;\ \delta,s\ )\ ;\ \delta,s,m\ )\ ;\ \delta,s,m)$

$\Delta_{26,1,c'}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,1}(\Delta_{20,a}(\Delta_{26,1,b'}(\Delta_{22}(\Delta_{26,4,a}(d;\delta,s,m);\delta,s);\delta,s,m);\delta,s);\delta,s,m)$

$\Delta_{26,1}(d;\delta,s,m+1) = \sup(\ \Delta_{26,1,c}(d;\delta,s,m)\ ,\ \Delta_{26,1,c'}(d;\delta,s,m)\ )$

$\Delta_{26,2}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{10}(\ \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m)\ ;\ \delta,s,m\ )\ ;\ \delta\ )$

$\Delta_{26,3,a}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{26,3}(\ d\ ;\ \delta,s,m\ )\ ;\ \delta,s,m\ )$

$\Delta_{26,3,a'}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{26,1}(\ \Delta_{26,2}(\ \Delta_{26,2}(\Delta_{26,4}(d;\delta,s,m)\ ;\ \delta,s,m+1);\ \delta,s,m+1);\ \delta,s,m)$

$\Delta_{26,3}(d;\delta,s,m+1) = \sup(\ \Delta_{26,3,a}(d;\delta,s,m+1)\ ,\ \Delta_{26,3,a'}(d;\delta,s,m+1)\ )$

$\Delta_{26,4,a}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m+1)$

$\Delta_{26,4}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{26,3}(\ \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m+1)\ ;\ \delta,s,m+1\ )$

Quelques résultats supplémentaires:

$\delta_{26,2}(\delta,s,m) = \Delta_{26,2}(2\delta;\delta,s,m)$

$\delta_{26,3}(\delta,s,m) = \Delta_{26,3}(2\delta;\delta,s,m)$

$\delta_{26,4}(\delta,s,m) = \Delta_{26,4}(2\delta;\delta,s,m)$

Enfin, l'existence potentielle simultanée de tous les points du tableau de Hörmander, pour leur codage à la Thom, sous l'hypothèse $\mathbb{H}_\Sigma$, accepte pour fonction Δ :

$\Delta_{26}(d;\delta,s,m,h) =$ itérée h fois de la fonction $d \longmapsto \Delta_{26,1}(d;\delta,s,m)$

preuve du lemme>

Précisons tout d'abord la signification exacte des fonctions : $\Delta_{26,1}$, $\Delta_{26,2}$, $\Delta_{26,3}$, $\Delta_{26,4}$, $\Delta_{26,4,a}$.

– La fonction $\Delta_{26,1}(d;\delta,s,m)$ est une fonction Δ pour toute existence potentielle :

$$^*(\ \mathbb{H}_\Sigma \Rightarrow \exists\, \alpha,\beta\ \ [\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ )^*$$

où α et β sont 2 points consécutifs d'un tableau $\mathcal{T}_m$.

– La fonction $\Delta_{26,2}(d;\delta,s,m)$ est une fonction Δ acceptable pour l'implication forte :

$$^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha),\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ] \Rightarrow \quad \alpha < \beta\quad)^*$$

où α et β sont 2 points consécutifs d'un tableau $\mathcal{T}_m$.

– La fonction $\Delta_{26,3}(d;\delta,s,m)$ est une fonction Δ acceptable pour l'implication forte :

$$^*(\ \ [\ \mathbb{H}_\Sigma,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ]\ \Rightarrow\ P^{(i)}(\alpha)\ \tau_i\ 0\ )^*\ (i = 0, 1, \ldots, \deg(P) - 1)$$

où α est un point d'un tableau $\mathcal{T}_m$, et P un polynôme de numéro $\leq m$.

– La fonction $\Delta_{26,4}(d;\delta,s,m)$ est une fonction Δ acceptable pour l'implication forte :

$$^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha),\ \mathbb{H}_\beta(\beta),\ \alpha < Z < \beta\ ] \Rightarrow [\ \ P^{(i)}(Z)\ \ \tau_i\ \ 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, \deg(P) - 1)\ \ ])^*$$

où α et β sont 2 points consécutifs d'un tableau $\mathcal{T}_m$, et P un polynôme de numéro $\leq$ m.
La fonction $\Delta_{26,4,a}(d;\delta,s,m)$ est la fonction Δ analogue lorsqu'il s'agit d'un Z au delà d'une extrémité du tableau.

Remarque : dans les trois derniers cas, on peut récupérer une majoration des degrés des implications fortes considérées en appliquant la réciproque dans la proposition 14 :
$\delta_{26,i}(\delta,s,m) = \Delta_{26,i}(2\delta;\delta,s,m)$: $i = 2, 3, 4$.

Pour l'initialisation, on considère uniquement les polynômes de degré 1, et on n'a pas besoin de récurrence.

Une existence potentielle $\quad ^*(\ \mathbb{H}_\Sigma \Rightarrow \exists\, \alpha\ \ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ]\ )^*$

se réduit à : $\quad ^*(\ \mathbb{H}_\Sigma \Rightarrow \exists\, \alpha\ \ P(\alpha) = 0\ ]\ )^*$ (avec P de degré 1)

qui admet pour fonction Δ : $\Delta_{21}(d;\delta,1)$. Et donc par transitivité :

$$^*(\ \mathbb{H}_\Sigma \Rightarrow \exists\, \alpha,\beta\ \ [\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ )^*$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{21}(\Delta_{21}(d;\delta,1);\delta,1)$.

Les majorations de degrés $\delta_{26,2}(\delta,s,m_1) = \delta_{26,3}(\delta,s,m_1) = \delta_{26,4}(\delta,s,m_1) = 4\delta$ sont faciles. A partir de là on obtient les fonctions Δ par la proposition 14. (on note que dans le cas 26.4, une seule des deux inégalités est utilisée).

La récurrence :

On introduit ensuite les polynômes de degré ≥ 1 de $\mathcal{P}$ un à un, par degrés croissants. Une étape de la récurrence consiste donc à introduire les racines (non déjà présentes) d'un polynôme P . On fait donc une preuve par récurrence sur m . Nous supposons donc que P a le numéro $m+1$ parmi les polynômes non constants rangés en ordre de degrés croissants. Nous posons $p = \deg(P)$. On a alors $m \geq m_1$ et $2 \leq p \leq s$.

Nous commençons par calculer une majoration de degré pour l'implication forte donnant le signe de P *en un point de* $\mathcal{T}_m$. C'est un point λ codé à la Thom par $\mathbb{H}_\lambda(\lambda)$ à partir d'un polynôme $Q_\lambda(\mathbf{X},Y)$ de coefficient dominant $S(\mathbf{X})$. On a donc la condition de signe $S(\mathbf{X})\ \sigma\ 0$ dans $\mathbb{H}_\Sigma(\mathbf{X})$, et la condition $Q_\lambda(\mathbf{X},\lambda) = 0$ dans $\mathbb{H}_\lambda(\lambda)$. Soit R le pseudo-reste de la pseudo-division de P par Q_λ .

Par hypothèse de récurrence (3), on a une implication forte

$$^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\lambda(\lambda)\ ]\ \ \Rightarrow\ \ R(\mathbf{X},\lambda)\ \tau\ 0\ )^* \quad \text{avec la fonction } \Delta\ :\ \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m)$$

On a une égalité :

$$S(\mathbf{X})^i.P(\mathbf{X},Y) = Q_\lambda(\mathbf{X},Y).T(\mathbf{X},Y) + R(\mathbf{X},Y) \quad \text{avec les degrés} \leq \delta$$

Ceci donne lieu, après multiplication par $R(\mathbf{X},Y)$ ou après élévation au carré, à une implication forte sous forme normale, assurant le signe de $P(X,\lambda)$, et de degré majoré par $2.\delta$:

$$^*(\ [\ R(X,\lambda)\ \tau\ 0\ ,\ Q_\lambda(X,\lambda) = 0\ ,\ \ S(X)\ \sigma\ 0\ ]\ \ \Rightarrow\ \ P(X,\lambda)\ \tau'\ 0\ )^*$$

D'où par transitivité :

$$^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\lambda(\lambda)\ ]\ \ \Rightarrow\ \ P(X,\lambda)\ \tau'\ 0\ )^*$$

acceptant pour fonction Δ : $\Delta_{26,1,a}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,3}(\ \delta_6(d\ ,\ 2.\delta\ )\ ;\ \delta,s,m)$.

Nous passons au point 1 du lemme .

Soit ζ une racine de P située sur l'intervalle ouvert minimal $]\alpha,\beta[$ de $\mathcal{T}_m$. On a donc :

$^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ]\ \Rightarrow\ P(\alpha) > 0\ )^*$ et $^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ \Rightarrow\ P(\beta) < 0\ )^*$ ou vice-versa,
avec la fonction Δ : $\Delta_{26,1,a}(d;\delta,s,m)$

Et l'hypothèse de récurrence (2) donne :

$^*(\ \ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ \ \Rightarrow\ \ \alpha < \beta\ \ )^*$ avec la fonction Δ : $\Delta_{26,2}(d;\delta,s,m)$

On a donc :

$$^*(\ \ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ \ \ \Rightarrow\ \ \ [P(\alpha) > 0\ ,\ P(\beta) < 0\ ,\ \ \alpha < \beta\ ]\ \ )^* \qquad \text{(i)}$$

avec la fonction Δ : $\Delta_{26,1,b}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{26,2}(d;\delta,s,m)\ ;\delta,s,m)\ ;\delta,s,m)$

Le théorème 22 donne :

$$^*(\ [P(\alpha) > 0\ ,\ P(\beta) < 0\ ,\ \ \alpha < \beta\ ]\ \Rightarrow\ \exists\ Z\ [\ \alpha < Z < \beta\ ,\ P(Z) = 0\ ]\ \ )^*$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{22}(d;\delta,s)$. Et par transitivité on obtient :

$$^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ \Rightarrow\ \exists\ Z\ [\ \alpha < Z < \beta\ ,\ P(Z) = 0\ ]\ \ )^* \qquad \text{(ii)}$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{26,1,b}(\ \Delta_{22}(d;\delta,s)\ ;\ \delta,s,m\ )$

Par ailleurs, par hypothèse de récurrence 4, il y a des $\tau_i \in \{\ <\ ,\ >\ \}$ $(i = 1,\ ...,\ p)$ tels que :

$$^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma,\ \ \mathbb{H}_\alpha(\alpha),\ \ \mathbb{H}_\beta(\beta),\ \alpha < Z < \beta\ ]\ \Rightarrow\ [\ \ P^{(i)}(Z)\ \ \tau_i\ \ 0\ \ \ \ (i = 1,\ ...,\ p-1)\ \ ])^* \qquad \text{(iii)}$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{26,4}(d;\delta,s,m)$.

Notons aussi que $P^{(p)}(Z)\ \ \tau_p\ \ 0$ est dans $\mathbb{H}_\Sigma$.

Enfin, on a, par hypothèse de récurrence (1) :

$$^*(\ \ \mathbb{H}_\Sigma \Rightarrow \exists\ \alpha,\beta\ \ \ [\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ \ )^* \qquad \text{(iv)}$$

acceptant pour fonction Δ : $\Delta_{26,1}(d;\delta,s,m)$.

Enfin par transitivité (iv), (ii) et (iii) donnent :

$$^*(\ \ \mathbb{H}_\Sigma\ \ \Rightarrow\ \exists\ Z,\alpha,\beta\ \ [\ \ \mathbb{H}_\zeta(Z)\ ,\ \ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ )^* \qquad \text{(v)}$$

acceptant pour fonction Δ :

$$\Delta_{26,1,c}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,1}(\ \Delta_{26,1,b}(\ \Delta_{22}(\ \Delta_{26,4}(d;\delta,s,m)\ ;\ \delta,s\ )\ ;\ \delta,s,m\ )\ ;\ \delta,s,m\ ).$$

Voyons ce que nous modifions à l'argument précédent lorsqu'on rajoute une racine de P sur un intervalle extrémal, par exemple $]\alpha,\infty[$, en supposant par exemple que $P(\alpha) > 0$ et que le coefficient dominant de P , soit $C(X)$, est affirmé < 0 dans $\mathbb{H}_\Sigma$. La notation $\mathbb{H}_\beta(\beta)$ signifie maintenant $[\ P(X,\beta) < 0;\ P^{(i)}(X,\beta) < 0\ ,\ i = 1,\ ...,\ s\ ]$. L'existence potentielle d'un tel β est assurée par le corollaire 20bis (majoration 20,c).

La ligne (iv) accepte donc maintenant pour fonction Δ : $\Delta_{26,1}(\ \Delta_{20,a}(d;\delta,s)\ ;\ \delta,s,m\ )$.

La ligne (i) peut maintenant être obtenue à partir de :

$$^*(\ \ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ \ ]\ \ \ \Rightarrow\ \ \ P(\alpha) > 0\ \ )^*$$

et de $\qquad ^*(\ \ [\ P(\alpha) > 0\ ,\ \ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ \ \ \Rightarrow\ \ \ \beta > \alpha\ \ )^*$ (théorème 10 (2,d)

La ligne (i) accepte donc maintenant pour fonction Δ :

$$\Delta_{26,1,b'}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{10}(d;\delta)\ ;\ \delta,s,m)$$

Ce qui donne pour la ligne (ii) la fonction Δ : $\quad \Delta_{26,1,b'}(\Delta_{22}(d;\delta,s);\delta,s,m)$

Enfin, la fonction Δ pour la ligne (iii) est maintenant : $\Delta_{26,4,a}(d;\delta,s,m)$.

Finalement la ligne (v) accepte maintenant pour fonction Δ :

$$\Delta_{26,1,c'}(d;\delta,s,m) = \Delta_{26,1}(\Delta_{20,a}(\Delta_{26,1,b'}(\Delta_{22}(\Delta_{26,4,a}(d;\delta,s,m)\ ;\ \delta,s\ );\delta,s,m);\delta,s);\delta,s,m\ )$$

Nous concluons $\Delta_{26,1}(d;\delta,s,m+1) = \sup\ (\ \Delta_{26,1,c}(d;\delta,s,m)\ ,\ \Delta_{26,1,c'}(d;\delta,s,m)\ ).$

Voyons le point 2 du lemme :

Il nous suffit de calculer une majoration pour un nouveau couple tel que (α,ζ).
Appelons τ'_i le signe $\leqslant$ ou $\geqslant$ associé à τ_i. Supposons par exemple que τ_1 est $<$.
On a les implications fortes :

$$^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ] \Rightarrow P(\alpha) > 0\ )^* \quad \text{et}$$

$$^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ] \Rightarrow [P^{(i)}(\alpha)\ \tau'_i\ 0\ ,\ (i = 1, \ldots, p-1)\ ]\ )^*$$

avec les fonctions Δ : $\Delta_{26,1,a}(d;\delta,s,m)$ et $\Delta_{26,3}(d;\delta,s,m)$.
Par ailleurs $P^{(s)}(\alpha)\ \tau_s\ 0$ est dans $\mathbb{H}_\Sigma$.
Donc via le théorème 10 (2,b) : $\quad ^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha),\ \mathbb{H}_\zeta(\zeta)\ ] \Rightarrow \alpha < \zeta\ )^*$
avec pour fonction Δ : $\Delta_{26,2}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{10}(\ \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m)\ ;\ \delta,s,m\ )\ ;\ \delta\ )$

Voyons le point 3 du lemme :

Nous avons déjà la fonction Δ : $\Delta_{26,1,a}(d;\delta,s,m)$ pour une évidence forte assurant le signe de P en un point quelconque α de $\mathcal{T}_m$. En combinant avec l'évidence forte déjà obtenue pour le signe des dérivées de P on obtient :

$$^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ] \Rightarrow [P^{(i)}(\alpha)\ \tau_i\ 0\ ,\ (i = 0, 1, \ldots, p-1)\ ]\ )^*$$

avec pour fonction Δ : $\Delta_{26,3,a}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{26,1,a}(\ \Delta_{26,3}(\ d\ ;\ \delta,s,m\ )\ ;\ \delta,s,m\ )$

Il nous faut en outre la majoration de degré pour l'implication forte :

$$^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma,\ \mathbb{H}_\zeta(\zeta)\ ] \Rightarrow [Q^{(i)}(\zeta)\ \sigma_i\ 0\ ,\ (i = 0, 1, \ldots, \deg(Q) - 1)\ ]\ )^*$$

avec Q dans $\mathcal{P}_m$ et ζ une racine de P rajoutée dans la tableau.
On a : $\quad ^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta),\ \mathbb{H}_\zeta(\zeta)\ ] \Rightarrow \alpha < \zeta < \beta\ )^*$
avec pour fonction Δ : $\Delta_{26,2}(\ \Delta_{26,2}(\ d\ ;\ \delta,s,m+1\ )\ ;\ \delta,s,m+1\ )$
et : $\ ^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta),\ \alpha < \zeta < \beta\ ] \Rightarrow [Q^{(i)}(\zeta)\ \sigma_i\ 0\ ,\ (i = 0, 1, \ldots, \deg(Q) - 1)\ ]\ )^*$
avec pour fonction Δ : $\Delta_{26,4}(\ d\ ;\ \delta,s,m\ )$
donc : $\ ^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha),\ \mathbb{H}_\beta(\beta),\ \mathbb{H}_\zeta(\zeta)] \Rightarrow [Q^{(i)}(\zeta)\ \sigma_i\ 0\ ,\ (i = 0, 1, \ldots, \deg(Q) - 1)\ ]\ )^*$
avec pour fonction Δ : $\Delta_{26,2}(\ \Delta_{26,2}(\ \Delta_{26,4}(\ d\ ;\ \delta,s,m\ )\ ;\ \delta,s,m+1\ )\ ;\ \delta,s,m+1\ )$.
Comme : $\quad ^*(\ \mathbb{H}_\Sigma \Rightarrow \exists\, \alpha,\beta\ [\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}_\beta(\beta)\ ]\ )^*$
qui accepte pour fonction Δ : $\Delta_{26,1}(d;\delta,s,m)$
on obtient : $\ ^*(\ [\mathbb{H}_\Sigma\ ,\ \mathbb{H}_\zeta(\zeta)] \Rightarrow [Q^{(i)}(\zeta)\ \sigma_i\ 0\ ,\ (i = 0, 1, \ldots, \deg(Q) - 1)\ ])^*$
avec pour fonction Δ :
$\Delta_{26,3,a'}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{26,1}(\ \Delta_{26,2}(\ \Delta_{26,2}(\Delta_{26,4}(\ d\ ;\ \delta,s,m\ )\ ;\ \delta,s,m+1\ )\ ;\ \delta,s,m+1\ )\ ;\ \delta,s,m\ )$.
Il reste à poser :

$$\Delta_{26,3}(d;\delta,s,m+1) = \sup(\ \Delta_{26,3,a}(d;\delta,s,m+1)\ ,\ \Delta_{26,3,a'}(d;\delta,s,m+1)\ )$$

Voyons le point 4 du lemme :

Il se déduit du point 3 en utilisant le théorème 10 (5), et cela donne la fonction Δ :

$$\Delta_{26,4}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{26,3}(\ \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m+1)\ ;\ \delta,s,m+1\ )$$

Pour un point au delà d'une extrémité du tableau on utilise 10 (2,c), et cela donne la fonction Δ : $\quad \Delta_{26,4,a}(d;\delta,s,m+1) = \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m+1)$.

Enfin la majoration concernant l'existence potentielle simultanée des points du tableau de Hörmander s'obtient par la transitivité des existences potentielles. ❑

Proposition et majorations 27 : (Tableau de Hörmander paramétré)

Soit $\mathbf{K}$ un corps ordonné, sous-corps d'un corps réel clos $\mathbf{R}$.

Soit $\mathbb{L} = [Q_1\ ,\ Q_2\ ,\ \ldots,\ Q_k]$ une liste de polynômes de $\mathbf{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n][Y]$.

On peut construire une famille finie $\mathcal{F}$ de polynômes de $\mathbf{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ telle que, pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $\mathbf{R}$, en posant $P_i(Y) = Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; Y)$, le tableau

complet des signes pour $L = [P_1, P_2, \ldots, P_k]$ est calculable à partir des signes des $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour $S \in \mathcal{F}$.
Supposons que la liste L possède k éléments de degré en $\mathbf{X}$ majoré par δ et de degré en Y majoré par s. Considérons la famille $\mathcal{G}$, formée de tous les coefficients de tous les polynômes de tous les tableaux de Hörmander possibles, construits sur L, en remplaçant l'opération "reste" par l'opération "pseudo-reste". Une famille $\mathcal{F}$ convenable peut être extraite de $\mathcal{G}$. Alors :
le degré de chaque polynôme de $\mathcal{G}$ et de chaque pseudo-division est majoré par :

$\delta_{27}(\delta,s) = \delta.(s+1)!$, sauf si $n = 0$ (donc $\delta = 0$) et alors $\delta_{27}(0,s) = s$.

le nombre d'éléments de la famille $\mathcal{G}$ est majoré par : $\Lambda_{27}(s,k) = (k+1)^{2^s}$

preuve>
Voyons d'abord le nombre d'éléments de $\mathcal{G}$. Pour cela considérons l'ensemble des *polynômes formels*, dont les éléments sont des couples (P,p) où $P \in \mathbf{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n][Y]$ et p est supérieur ou égal au degré en Y de P. On dit que p est le degré formel du polynôme formel (P,p)[1]. On a aussi la notion, claire sans plus de précision, de coefficient formellement dominant d'un polynôme formel.
Sur cet ensemble des polynômes formels sont définis les trois opérations suivantes :

- dérivation (no problem)
- troncature (on remplace p par $p-1$ et on supprime dans P le coefficient de degré p)
- pseudo-reste formel : le pseudo-reste formel de (P,p) et de (Q,q) est sans intérêt (ou encore trivial) si $P = Q$ ou si $p < q$ (on le prend alors nul), et dans le cas contraire, il est égal au déterminant polynomial de la matrice ayant pour lignes les polynômes $Q, Q.Y, \ldots, Q.Y^{p-q}$, P écrits sur la base $Y^p, \ldots, Y, 1$ (son degré formel étant pris égal à $q-1$).

Il est alors clair que la famille $\mathcal{G}$ est la famille des coefficients formellement dominants de la famille obtenue à partir de la liste L en la saturant pour les trois opérations ci-dessus.
Dans la définition de cette "famille saturée" nous pouvons introduire une notion de profondeur. Un polynôme de L a la profondeur 0. Un polynôme de profondeur h donne par dérivation ou troncature un polynôme de profondeur $h+1$. Et un pseudo-reste formel non trivial de deux polynômes de profondeurs $\leq h$, l'une des deux au moins étant h, est de profondeur $h+1$.
On voit qu'un polynôme de profondeur h est de degré formel $\leq s-h$. D'autre part un polynôme de profondeur $\leq h+1$ est ou bien un élément de L ou bien obtenu à partir d'un ou deux polynômes de profondeur $\leq h$ par dérivation, troncature ou pseudo-reste formel non trivial. Si on note $\varphi(s,k,h)$ le nombre de polynômes de profondeur $\leq h$, on a donc la majoration :

$$\varphi(s,k,h+1) \leq k + 2.\varphi(s,k,h) + (\varphi(s,k,h)^2 - \varphi(s,k,h)) = k + \varphi(s,k,h) + \varphi(s,k,h)^2$$

Il ne reste plus qu'à vérifier par un petit calcul de récurrence sur h la majoration :

$$\varphi(s,k,h) \leq (k+1)^{2^h} - 1$$

Voyons maintenant la question du degré. L'opération dérivation ne change pas les degrés des coefficients. Les coefficients du pseudo-reste de P et Q de degrés en Y s' et $s'' \leq s'$ sont des déterminants extraits d'une matrice à $s'-s''+2$ lignes, et dont les entrées sont des coefficients de P et Q. Dans le calcul de pseudo-restes successifs, les degrés en Y des diviseurs successifs sont strictement décroissants, et le degré en $\mathbf{X}$ est au plus multiplié par $s'-s''+2$ à chaque étape. D'où (petit calcul) la majoration $\delta_{27}(\delta,s) = \delta.(s+1)!$.❑

---

1 Il serait plus correct, mais plus lourd, d'appeler 'polynôme avec degré formel' ce que nous appelons polynôme

Remarque : Une majoration pour $\Lambda_{23}(s,k)$ peut être obtenue en répétant grosso modo le raisonnement ci-dessus, sans le mot 'formel' et en supprimant l'opération troncature, ce qui donnerait à la place φ une fonction ψ vérifiant $\psi(s,k,h+1) \le k + \psi(s,k,h)^2$

Théorème et majorations 28 : (Tableau de Hörmander paramétré, implications fortes et existences potentielles) Soit $\mathbf{K}$ un corps ordonné, sous-corps d'un corps réel clos $\mathbf{R}$. Soit $L = [Q_1 , Q_2 , ..., Q_k]$ une liste de polynômes de $\mathbf{K}[X_1,X_2,...,X_n][Y]$.
On construit la famille finie $\mathcal{F}$ de polynômes de $\mathbf{K}[X_1,X_2,...,X_n]$ comme à la proposition 27 .
Soit $\mathbb{H}(X_1,X_2,...,X_n,Y)$ un système de csg portant sur des polynômes de la liste L .
Soit un élément $\Sigma = (\sigma_S)_{S \in \mathcal{F}}$ de $\{-1 , 0 , +1\}^{\mathcal{F}}$. On note $\mathbb{H}_\Sigma(X_1,X_2,...,X_n)$ le système de conditions de signes $[\ S(X_1,X_2,...,X_n) \equiv \sigma_S ; S \in \mathcal{F}]$. On suppose qu'il existe $x_1,x_2,...,x_n \in \mathbf{R}$ vérifiant $\mathbb{H}_\Sigma(x_1,x_2,...,x_n)$. Alors :
ou bien $\forall\ x_1,x_2,...,u_n \in \mathbf{R}\ (\ \mathbb{H}_\Sigma(x_1,x_2,...,x_n) \Rightarrow \exists\ y \in \mathbf{R}\ \ \mathbb{H}(x_1,x_2,...,x_n,y))$ et
alors : ${}^*(\ \mathbb{H}_\Sigma(X_1,X_2,...,X_n) \Rightarrow\ \exists\ Y\ \ \mathbb{H}(X_1,X_2,...,X_n,Y)\ )^*$ (lu dans $\mathbf{K}$)
ou bien $\forall\ x_1,x_2,...,x_n,y \in \mathbf{R}\ (\ \mathbb{H}_\Sigma(x_1,x_2,...,x_n)$ et $\mathbb{H}(x_1,x_2,...,x_n,y)\ ) \Rightarrow\ 1 = 0$
et alors : ${}^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma(X_1,X_2,...,X_n)\ ,\ \mathbb{H}(X_1,X_2,...,X_n,Y)\ ]\ \Rightarrow\ 1 = 0\ )^*$ (dans $\mathbf{K}$)
Dans ce dernier cas, avec (δ,s,k) comme à la proposition précédente, le degré de l'implication forte construite est majoré par :

$$\delta_{28}(\delta,s,k) = \Delta_{26}(\ \delta_{28,a}(\delta,s,k)\ ;\ d_1,s,k_0,k_2\ ) \text{ où :}$$
$$d_1 = \delta_{27}(\delta,s)\ ,\quad k_0 = \Lambda_{23}(s,1)\ ,\quad k_1 = \Lambda_{23}(s,2)\ ,\quad k_2 = \Lambda_{23}(s,k)\ , \text{ et}$$
$$\delta_{28,a}(\delta,s,k) = \delta_{7,b}(\ \delta_{26,4}(d_1,s,k_1)\ ,\ \delta_{26,3}(d_1,s,k_1)\ ,\ k_2\ )$$

preuve>
Nous cherchons une majoration de degré pour l'implication forte :

$${}^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma(X_1,X_2,...,X_n)\ ,\ \mathbb{H}(X_1,X_2,...,X_n,Y)\ ]\ \Rightarrow\ 1 = 0\ )^*$$

Le degré et le nombre de csg dans $\mathbb{H}_\Sigma$ sont majorés par $\delta_{27}(\delta,s)$ et $\Lambda_{27}(s,k)$.
En fait, les conditions de signes vraiment utilisées pour fixer un tableau de Hörmander particulier n'excèdent pas $\Lambda_{23}(s,k)$ (il suffit en effet d'assurer les degrés des pseudo-restes et les signes des constantes)[1].
Nous posons donc $d_1 = \delta_{27}(\delta,s)$ et $k_2 = \Lambda_{23}(s,k)$.
Le nombre de points dans le tableau de Hörmander est aussi majoré par k_2 .
Si α est un point du tableau de Hörmander, on a l'implication forte :

$${}^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma(X_1,X_2,...,X_n)\ ,\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha)\ ,\ \mathbb{H}(X_1,X_2,...,X_n,\alpha)\ ]\ \Rightarrow\ 1 = 0\ )^*$$

de degré $\delta_{26,3}(d_1,s,k_1)$ avec $k_1 = \Lambda_{23}(s,2)$: il suffit en effet de considérer le sous-tableau de Hörmander obtenu à partir du polynôme P dont α est racine et du polynôme Q dans $\mathbb{H}(X_1,X_2,...,X_n,Y)$ qui fournit la contradiction.
Si $]\alpha,\beta[$ est un intervalle minimal du tableau de Hörmander, on a l'implication forte :

$${}^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma(X_1,X_2,...,X_n),\ \mathbb{H}_\alpha(\alpha),\ \mathbb{H}_\beta(\beta),\ \alpha < Y < \beta,\ \mathbb{H}(X_1,X_2,...,X_n,Y)\ ]\ \Rightarrow\ 1 = 0\ )^*$$

de degré $\delta_{26,4}(d_1,s,k_1)$. (même raisonnement, en se rappelant que ce qui se passe sur l'intervalle est contrôlé par ce qui se passe au borne, sans coût supplémentaire)
Donc, par une disjonction de cas en cascade :

$${}^*(\ [\ \mathbb{H}_\Sigma\ ;\ (\ \mathbb{H}_{\alpha_i}(\alpha_i)\ ,\ i = 1, ..., h\ );\ \ \mathbb{H}\ ]\ \Rightarrow\ 1 = 0\ )^*$$

---

[1] En fait, vues nos majorations, ce n'est pas une ...

avec pour majoration de degré :

$$\delta_{28,a}(\delta,s,k) = \delta_{7,b}(\ \delta_{26,4}(d_1,s,k_1)\ ,\ \delta_{26,3}(d_1,s,k_1)\ ,\ k_2\ )$$

On a enfin l'existence potentielle :

$$^*(\ H_\Sigma \Rightarrow \exists\, (\alpha_i)_i\ \ [\ H_{\alpha_i}(\alpha_i)\ ,\ i = 1, ...,\ h\ ]\ )^* \qquad (\text{avec } h \le k_2\ )$$

qui accepte pour fonction Δ : $\Delta_{26}(\ d\ ;\ d_1,s,k_0,k_2\ )$: en effet chaque existence potentielle séparée (i fixé) peut être établie sur le sous-tableau de Hörmander obtenu à partir du polynôme P dont α_i est racine.

Donc la majoration souhaitée est :

$$\delta_{28}(\delta,s,k) = \Delta_{26}(\ \delta_{28,a}(\delta,s,k)\ ;\ d_1,s,k_0,k_2\ ) \quad \blacksquare$$

Théorème et majorations 29 : (nullstellensatz, positivestellensatz et nichtnegativestellensatz réels effectifs) Soit **K** un corps ordonné, sous-corps d'un corps réel clos **R** . Soit $H(X_1,X_2,...,X_n)$ un système de csg portant sur une famille finie de polynômes de $\mathbf{K}[X_1,X_2,...,X_n]$. Ce système est impossible dans **R** si et seulement si il est fortement incompatible dans **K** . En termes plus formalisés :

Si $^*(\ H(X_1,X_2,...,X_n) \Rightarrow 1 = 0\ )^*$ (dans **K**) , **alors** les csg H sont impossibles à réaliser dans n'importe quelle extension ordonnée de **K** .

Si $\forall\, x_1,x_2,...,x_n \in \mathbf{R}$ $\ H(x_1,x_2,...,x_n)$ est absurde,

alors : $^*(\ H(X_1,X_2,...,X_n) \Rightarrow 1 = 0\ )^*$ (dans **K**).

En outre, si k est le nombre de csg dans $H(X_1,X_2,...,X_n)$ et d le degré maximum, alors on peut calculer une implication forte $^*(\ H(X_1,X_2,...,X_n) \Rightarrow 1 = 0\ )^*$ (dans **K**) de degré majoré par $\delta_{29}(d,k,n)$ où δ_{29} est défini par les relations récurrentes :

$$\delta_{29}(d,k,1) = \delta_{28}(0,d,k)$$

$$\delta_{29}(d,k,n+1) = \delta_{7,c}(\ \sup\{\ \delta_{29}(\ \delta_{27}(d,d)\ ,\ \Lambda_{23}(d,k)\ ,\ n\ )\ ,\ \delta_{28}(d,d,k)\ \}\ ,\ \Lambda_{27}(d,k)\ )$$

preuve> La construction de l'implication forte se fait cas par cas, selon les signes des polynômes de la famille $\mathcal{F}$, (disjonction de cas en parallèle). Par ailleurs, lorsque les signes de tous les polynômes de $\mathcal{F}$ sont mis dans l'hypothèse de l'implication forte, ou bien ces csg sont fortement incompatibles et on est ramené au cas d'une variable en moins (avec d et k remplacés par $\delta_{27}(d,d)$, $\Lambda_{23}(d,k)$), ou bien elles ne le sont pas et on fait appel à la majoration donnée à la proposition 28. ❑

!! What?? Don't we have to consider Σ for all $\{-1,0,+1\}^s$?

We have problems here ??

Récapitulation, majorations plus grossières et plus lisibles

Nous donnons maintenant le récapitulatif des majorations obtenues, en établissant des formes plus visibles.

Quelques notations et remarques concernant la majoration d'une fonction itérée :

Si φ est une fonction qu'on peut itérer, nous noterons $\varphi^{[k]}$ la fonction obtenue en itérant k fois φ. Nous introduisons une notation particulière pour l'itérée de l'exponentielle:

$$\boxed{E(x,k) = \varphi^{[k]}(x) \text{ où } \varphi(x) = 2^x}$$

De même si τ est une bijection, nous noterons $\tau^{[-1]}$ la bijection réciproque. Nous notons $\lg(a)$ le logarithme en base 2 , c.-à-d. $\varphi^{[-1]}(x)$ où $\varphi(x) = 2^x$.
Si une fonction ψ croissante est du même ordre de grandeur[1] qu'une fonction φ croissante, mais avec une expression plus compliquée, pour obtenir une majoration plus lisible de $\psi^{[k]}$ il suffit d'arriver à majorer ψ par une fonction de la forme : $\eta = \tau^{[-1]} \circ \varphi \circ \tau$ puisqu'alors $\psi^{[k]}$ est majorée par :

$$\eta^{[k]} = \tau^{[-1]} \circ \varphi^{[k]} \circ \tau$$

Exemples:

Exemple 1 : $\varphi(x) = x^2$, $\tau(x) = a.x$:

$$\psi(x) \le a.x^2 \Rightarrow \psi^{[k]}(x) \le (a.x)^{2^k}/a .$$

Exemple 2 : $\varphi(x) = x^2$, $\tau(x) = a.x + b$:

$$\psi(x) \le a.x^2 + 2b.x + (b^2 - b)/a \quad \Rightarrow \quad \psi^{[k]}(x) \le (a.x + b)^{2^k}/a - b/a$$

Exemple 3 : $\varphi(x) = 2^x$, $\tau(x) = a.x + b$:

$$\psi(x) \le 2^{a.x + b - \lg(a)} - b/a \quad \Rightarrow \quad \psi^{[k]}(x) \le E(a.x+b,k)/a - b/a.$$

Exemple 4 : $\varphi(x) = 2^x$, $\tau(x) = a.x^\alpha + b$, $a \ge 1, b \ge 0 , \alpha > 1$

$$\psi(x) \le (2^{a.x^\alpha + b - \lg(a)} - b/a)^{1/\alpha} \Rightarrow \psi^{[k]}(x) \le (E(a.x^\alpha+b,k)/a - b/a)^{1/\alpha} \le E(a.x^\alpha+b,k)$$

Dans la suite, nous parlerons de fonctions φ , τ et η en nous référant toujours implicitement au schéma développé ci-dessus.

Les majorations δ_6

$$\delta_{6,a}(d_1,d_2) = d_1 + d_2$$
$$\delta_{6,b}(d_1,d_2) = d_1.d_2$$
$$\delta_{6,c}(d_1,d_2) = d_1.d_2$$
$$\delta_{6,d}(d_1,d_2) = d_1.d_2 + d_2$$

$$\boxed{\delta_6(d_1,d_2) = d_1.d_2 + \sup(d_1,d_2) \le (d_1+1).(d_2+1) - 1}$$

---

[1] notion informelle intuitive, non précisée.

Les majorations δ_7

$$\delta_{7,a}(d_1,d_2,d_3) = (d_1+ d_2).d_3$$
$$\delta_7(d_1,d_2,d_3) = d_1.d_2+ d_1.d_3+ d_2.d_3$$
$$\delta_{7,b}(d_1,d_3,1) = \delta_{7,a}(d_1,d_1,d_3)$$
$$\delta_{7,b}(d_1,d_3,h+1) = \delta_{7,a}(\delta_{7,b}(d_1,d_3,h),d_1,d_3)$$

La fonction $\delta_{7,b}$ est obtenue en itérant la fonction $\psi: (d_1,d_2,d_3) \longmapsto (\delta_{7,a}(d_1,d_2,d_3),d_2,d_3)$ puis en faisant $d_2 := d_1$.
Si $d_3 \geq 2$, on majore ψ par la fonction $\eta = \tau^{[-1]} \circ \varphi \circ \tau$ avec φ et τ définies par : $\varphi(d_1,d_2,d_3) = (d_1.d_3,d_2,d_3)$, $\eta(d_1,d_2,d_3) = (d_1+ 2.d_2,d_2,d_3)$, d'où :

$\boxed{\delta_{7,b}(d_1,d_3,h) \leq 3.d_1.d_3{}^h \quad (\text{sauf si } d_3 = 1, \text{ et alors } \leq (h+1).d_1)}$.

$$\delta_{7,c}(d_1,k) = \psi^{[k]}(d_1) \quad \text{avec} \quad \psi(d_1) = \delta_{7,a}(d_1,d_1,d_1) \leq 2.d_1{}^2$$

$\boxed{\delta_{7,c}(d_1,h) \leq (2.d_1)^{2^h}}$. (cf. exemple 1 avec $\tau(d_1) = 2.d_1$)

Les majorations δ_8

$$\delta_8(d_1,d_2,1) = \delta_6(d_1,d_2)$$
$$\delta_8(d_1,d_2,k+1) = \delta_6(d_1,\delta_8(d_1,d_2,k))$$

La majoration δ_8 est obtenue en itérant la fonction : $(d_1,d_2) \longmapsto (d_1,\delta_6(d_1,d_2))$.
En considérant $\tau(d_1,d_2) = (1+d_1,1+ d_2)$ et $\varphi(d_1,d_2) = (d_1,d_1.d_2)$, on obtient :
$\eta(d_1,d_2) = (d_1, (d_1+ d_2)^2 - d_1) \geq (d_1, \delta_6(d_1,d_2))$ (si d_1 et $d_2 \geq 2$) et donc :

$\boxed{\delta_8(d_1,d_2,k) \leq (1+d_1)^k.(1+d_2) - 1}$

Les majorations Δ_{10}

(fonction Δ pour les évidences fortes résultant des formules de Taylor mixtes)

$$\Delta_{10}(d;\delta) = \delta_6(d,2\delta)$$

$\boxed{\Delta_{10}(d;\delta) \leq (d+1).(2\delta+1) - 1}$

Les majorations Δ_{14} *(fonction Δ d'une implication forte)*

$$\Delta_{14}(d;d_1,k) = \delta_8(d_1,d,k)$$
$$\Delta_{14,a}(d;[d_1,d_2, \ldots,d_k]) = \delta_6(d_1,\ldots(\delta_6(d_k,d))\ldots) \leq (1+d_1).(1+d_2)\ldots(1+d_k).(1+d) - 1$$

$\boxed{\Delta_{14}(d;d_1,k) \leq (1+d_1)^k.(1+d) - 1}$

$\boxed{\Delta_{14}(d;[d_1,d_2, \ldots,d_k]) \leq (1+d_1).(1+d_2)\ldots(1+d_k).(1+d) - 1}$

<u>Les majorations</u> Δ_{20}

(fonction Δ pour l'existence potentielle de l'inverse d'un non nul, et pour l'existence d'un point où un polynôme a le signe de son coefficient dominant)

$\Delta_{20}(d;\delta) = d + d.\delta + \delta$

$\Delta_{20,a}(d;0,s) = \Delta_{20,a}(d;\delta,0) = d$ et pour s et $\delta > 0$

$\Delta_{20,a}(d;\delta,s) = \Delta_{20}(\, d.(\delta+1).(1+2s\delta)\, ;\, \delta\,)$

$$\boxed{\Delta_{20}(d;\delta) = (1+d).(1+\delta) - 1}$$

$$\boxed{\Delta_{20,a}(d;\delta,s) \le (d+1).(\delta+1)^2.(2s\delta+1) - 1}$$

<u>Les majorations</u> Δ_{21} *(fonction Δ pour l'existence potentielle d'une racine d'un polynôme qui change de signe)*

sans paramètres

$\Delta_{21,0}(d;0) = 1$

$\Delta_{21,0}(d;1) = d$

$\Delta_{21,0}(d;s+2) = \Delta_{14,a}(\, 2d\, ;\, [\Delta_{21,0}(d;s),d,d]\,)$

C.-à-d. : $\Delta_{21,0}(d;s+2) \le (2d+1).(d+1)^2.(\Delta_{21,0}(d;s)+1) - 1$. On établit par récurrence :

$$\boxed{\Delta_{21,0}(d;s) \le (d+1)^s.(2d+1)^{s \text{ div } 2} - 1 \quad \text{pour } s \ge 1}$$

avec paramètres ($d \ge \delta$, sinon $\Delta_{21}(d;\delta,s) = d$)

$\Delta_{21}(d;\delta,0) = 2d$

$\Delta_{21}(d;\delta,1) = \delta_{6,c}(\, 2d\, ,\, \Delta_{20}(d.(\delta+1);\, \delta - 1)\,)$

$\delta_1(d,\delta,s+2) = (d - s - 1).(\delta - s - 2) + d$ que nous notons δ_1 ci-dessous

$\Delta_{21,u}(d;\delta,s+2) = \Delta_{14,a}(\, 4\delta_1\, ;\, [\Delta_{21}(\delta_1;\delta_1,s),\delta_1,\delta_1]\,)$

$\Delta_{21,a}(d;\delta,s+2) = \Delta_{21}(d;\delta,s+1) + 2\delta$

$\Delta_{21,b}(d;\delta,s+2) = \Delta_{20}(\, \Delta_{21,u}(d;\delta,s+2) + 2(\delta - s - 2))\, ;\, \delta\,)$

$\Delta_{21}(d;\delta,s+2) = \delta_{6,c}(\, \Delta_{21,a}(d;\delta,s+2)\, ,\, \Delta_{21,b}(d;\delta,s+2)\,)$

On a : $\Delta_{21}(d;\delta,1) = 2\, d(d+1)\delta(\delta+1) - 2d\delta^2 - 1 \le 2\,(d+1)^2.(\delta+1)^2 - 2\delta$.
On majore δ_1 par $d\delta - 1$. En appliquant les formules de récurrence on trouve :

$$\Delta_{21}(d;\delta,2) \le 16\,(d+1)^6.(\delta+1)^7 - 2\delta$$

et on tente une majoration de la forme :

$$\Delta_{21}(d;\delta,s) \le 2^{\alpha(s)}\,(d+1)^{\beta(s)}\,(\delta+1)^{\gamma(s)} - 2\delta$$

On trouve alors que α, β, γ conviennent s'ils vérifient les formules récurrentes :

$\alpha(s+2) \le 2 + \alpha(s+1) + \alpha(s)$

$\beta(s+2) \le 3 + \beta(s+1) + \beta(s) + \gamma(s)$

$\gamma(s+2) \le 4 + \gamma(s+1) + \beta(s) + \gamma(s)$

Ceci est vérifié, avec l'initialisation pour $s = 1$ et 2, si on prend :

$\alpha(s) = 2^s$, $\beta(s) = 2^{s+1} - (s+3) \text{ div } 2$, $\gamma(s) = 2^{s+1} + (s-4) \text{ div } 2$

d'où par exemple :

$$\boxed{\Delta_{21}(d;\delta,s) \le (2.(d+1).(\delta+1))^{2^{s+1}}.(\delta+1)^{s \text{ div } 2}}$$

Les majorations Δ_{22} *(fonction Δ pour l'existence potentielle d'une racine d'un polynôme sur un intervalle où il change de signe)*

$$\Delta_{22,a}(d;\delta,0) = 2.\delta \ , \quad \Delta_{22,a}(d;\delta,1) = \Delta_{21}(\ (d+4).\delta\ ;\ \delta\ ,\ 1\ )$$
$$\Delta_{22,a}(d;\delta,s+1) = \Delta_{21}(\ \delta_{6,a}(\ d.\delta\ ,\ (\ \Delta_{22,a}(d;\delta-1,s)+4\ )\ .\ \delta\ )\ ;\ \delta\ ,\ s+1\ )$$
$$\Delta_{22}(d;\delta,s) = \Delta_{22,a}(\ 2.d+2\ ;\ \delta\ ,\ s\ ).$$

On a donc : $\Delta_{22,a}(d;\delta,s+1) = \Delta_{21}(\ (\ \Delta_{22,a}(d;\delta-1,s) + 5\ )\ .\ \delta\ )\ ;\ \delta\ ,\ s+1\ )$ avec à l'initialisation : $\Delta_{22,a}(d;\delta,1) \leq 2.(d+5)^2.\delta^2.(\delta+1)^2 - 2\delta \leq 2.(d+5)^2.(\delta+1)^4 - 5$ et on tente une majoration de la forme:

$$\Delta_{22,a}(d;\delta,s) \leq 2^{\alpha'(s)}\ (d+5)^{\beta'(s)}\ (\delta+1)^{\gamma'(s)} - 5$$

On trouve alors que α', β', γ', conviennent s'ils vérifient les formules récurrentes :

$$\alpha'(s+1) \leq\ \alpha(s+1) + \alpha'(s).\beta(s+1)$$
$$\beta'(s+1) \leq\ \beta(s+1).\beta'(s)$$
$$\gamma(s+1) \leq\ \gamma(s+1) + \gamma'(s).\beta(s+1)$$

On majore $\gamma(s)$ par $(\delta+1)^{2^{s+2}}$. On vérife que l'initialisation et les formules récurrentes sont vérifiées si on prend : $\beta'(s) = 2^{(s+1)(s+2)/2}$, $\alpha'(s) = 2^{-1+(s+2)^2/2}$, $\gamma'(s) = 2^{(s+2)^2/2}$.

En conclusion :

$$\boxed{\Delta_{22,a}(d;\delta,s) \leq 2^{\alpha'(s)}\ (d+5)^{\beta'(s)}\ (\delta+1)^{\gamma'(s)} - 5 \qquad \text{avec} \quad \alpha'(s) = 2^{-1+(s+2)^2/2} \quad \beta'(s) = 2^{(s+1)(s+2)/2},\ \gamma'(s) = 2^{(s+2)^2/2}}$$

et

$$\boxed{\Delta_{22}(d;\delta,s) \leq 2^{\gamma'(s)}\ (d+3{,}5)^{\beta'(s)}\ (\delta+1)^{\gamma'(s)} - 5 \leq (\ (2d+7)\ (\delta+1)\ )^{\gamma'(s)}}$$

Problème : peut-on améliorer de manière sensible les majorations 21 et 22 pour l'existence potentielle de racines réelles ?

Ceci n'est pas certain.

Pour obtenir une telle amélioration, il semble qu'il faudrait "dérécursiver" la preuve d'existence de la clôture réelle d'un corps ordonné (telle que donnée dans **[LR]**). Ceci est peut-être possible sur la base d'une analyse approfondie des suites de Sturm-Habicht, ou de généralisations des formules de Taylor mixtes.

Il semble par contre que les majorations qui vont suivre, particulièrement mauvaises, soient directement imputables à l'algorithme de Hörmander, qui donne lieu à une explosion des degrés en E(d,n). On peut donc sérieusement espérer les améliorer sur la base d'une stratégie qui serait inspirée des algorithmes qui testent "rapidement" si un semi-algébrique réel est vide.

La majoration Λ_{23} *(majoration du nombre de points d'un tableau de Hörmander)*

$$\Lambda_{23}(s,k) = (k+1)^{2^s}$$

Les majorations Δ_{26} et δ_{26} *(évidence forte et existence potentielle pour les faits élémentaires lisibles sur un tableau de Hörmander paramétré)*

Initialisations : $\Delta_{26,1}(d;\delta,s,m_1) = \Delta_{21}(\Delta_{21}(d;\delta,1);\delta,1)$

$\delta_{26,2}(\delta,s,m_1) = \delta_{26,3}(\delta,s,m_1) = \delta_{26,4}(\delta,s,m_1) = 4\delta$

$\Delta_{26,2}(d;\delta,s,m_1) = \Delta_{26,3}(d;\delta,s,m_1) = \Delta_{26,4}(d;\delta,s,m_1) = \Delta_{26,4,a}(d;\delta,s,m_1) = \delta_6(d;4\delta)$

Récurrences : $m \geq m_1$ (en ne mentionnant pas les δ,s dans les $\Delta_{26,\ldots}(d;\delta,s,m)$

$\Delta_{26,1,a}(d;m) = \Delta_{26,3}(\delta_6(d,2\delta);m)$

$\Delta_{26,1,b}(d;m) = \Delta_{26,1,a}(\Delta_{26,1,a}(\Delta_{26,2}(d;m);m);m)$

$\Delta_{26,1,b'}(d;m) = \Delta_{26,1,a}(\Delta_{10}(d;\delta);m)$

$\Delta_{26,1,c}(d;m) = \Delta_{26,1}(\Delta_{26,1,b}(\Delta_{22}(\Delta_{26,4}(d;m);\delta,s);m);m)$

$\Delta_{26,1,c'}(d;m) = \Delta_{26,1}(\Delta_{20,a}(\Delta_{26,1,b'}(\Delta_{22}(\Delta_{26,4,a}(d;m);\delta,s);m);\delta,s);m)$

– $\Delta_{26,1}(d;m+1) = \sup(\Delta_{26,1,c}(d;m), \Delta_{26,1,c'}(d;m))$

– $\Delta_{26,2}(d;m+1) = \Delta_{10}(\Delta_{26,1,a}(\Delta_{26,3}(d;m);m);\delta)$

$\Delta_{26,3,a}(d;m+1) = \Delta_{26,1,a}(\Delta_{26,3}(d;m);m)$

$\Delta_{26,3,a'}(d;m+1) = \Delta_{26,1}(\Delta_{26,2}(\Delta_{26,2}(\Delta_{26,4}(d;m);m+1);m+1);m)$

-- $\Delta_{26,3}(d;m+1) = \sup(\Delta_{26,3,a}(d;m+1), \Delta_{26,3,a'}(d;m+1))$

-- $\Delta_{26,4,a}(d;m+1) = \Delta_{26,3}(d;m+1)$

-- $\Delta_{26,4}(d;m+1) = \Delta_{26,3}(\Delta_{26,3}(d;m+1);m+1)$

-- $\Delta_{26}(d;m,h) =$ itérée h fois de la fonction $d \longmapsto \Delta_{26,1}(d;m)$

$\delta_{26,2}(\delta,s,m) = \Delta_{26,2}(2\delta;\delta,s,m)$

$\delta_{26,3}(\delta,s,m) = \Delta_{26,3}(2\delta;\delta,s,m)$

$\delta_{26,4}(\delta,s,m) = \Delta_{26,4}(2\delta;\delta,s,m)$

Notons $\theta(d;\delta,s,m) = \sup(\Delta_{26,i}(d;\delta,s,m);\ i = 1, 2, 3)$. Considérons δ et s comme des paramètres fixés. On peut alors noter :

$$\theta_m(d) = \theta(d;\delta,s,m),\ \mu(d) = \delta_6(d,2\delta),\ \Delta_{22}(d) = \Delta_{22}(d;\delta,s),\ \Delta_{10}(d) = \Delta_{10}(d;\delta)$$

Les formules récurrentes donnent alors les conditions suffisantes :

$$\Delta_{26,1}(d;m+1) \leq \theta_m \circ \theta_m \circ \mu \circ \theta_m \circ \mu \circ \theta_m \circ \Delta_{22} \circ \theta_m \circ \theta_m (d)$$

$$\Delta_{26,2}(d;m+1) \leq \Delta_{10} \circ \theta_m \circ \mu \circ \theta_m$$

$$\Delta_{26,3}(d;m+1) \leq \theta_m \circ \Delta_{10} \circ \theta_m \circ \mu \circ \theta_m \circ \Delta_{10} \circ \theta_m \circ \mu \circ \theta_m \circ \theta_m (d)$$

il suffit donc d'avoir :

$$\theta_{m+1}(d) \leq \theta_m \circ \theta_m \circ \mu \circ \theta_m \circ \mu \circ \theta_m \circ \Delta_{22} \circ \theta_m \circ \theta_m (d) \qquad (1)$$

Si on prend :

$$\theta_1(d) = \mu \circ \mu \circ \Delta_{22}(d),\quad \theta_{m+1} = \theta_m^{[7]},\quad \text{c.-à-d.}\quad \theta_{m+1} = \theta_1^{[7^m]}$$

alors l'inégalité (1) sera vérifiée.

On a $\theta_1(d) \leq (2\delta+2)^{2+\gamma'(s)}(d+4)^{\beta'(s)} - 4$.

On en déduit : $\quad \theta_1^{[h]} \leq (2\delta+2)^{(2+\gamma').\beta'^{h+2}}(d+4)^{\beta'^{h+1}} - 4$

on en déduit : $\quad \theta_m(d) \leq (2\delta+2)^{\gamma_1(s,m)}(d+4)^{\beta_1(s,m)} - 4$

où $\quad \gamma_1(s,m) = 2^{7^m(s+2)^2/2},\ \beta_1(s,m) = 2^{7^m(s+1)(s+2)/2}$

On en déduit : $\boxed{\delta_{26,i}(\delta,s,m) \leq \delta^{\alpha_1(s,m)}\ (i=2,3,4)\ \text{où}\ \alpha_1(s,m) = 2^{7^m(s+2)^2}\ (\delta \geq 2)}$

et $\boxed{\Delta_{26}(d;\delta,s,m,h) \leq (\delta.d)^{\alpha_2(s,m,h)}\ \text{où}\ \alpha_2(s,m,h) = 2^{h.7^m(s+2)^2}\ (d,\delta \geq 2)}$

<u>Les majorations</u> δ_{27} et Λ_{27} *(tableau de Hörmander paramétré)*

$\delta_{27}(d,s) = d.(s+1)!$, sauf $\delta_{27}(0,s) = s$

$\Lambda_{27}(s,k) = (k+1)^{2^s}$

<u>Les majorations</u> δ_{28}

(Tableau de Hörmander paramétré, implications fortes et existences potentielles)

$\delta_{28}(d,s,k) = \Delta_{26}(\ \delta_{28,a}(d,s,k)\ ;\ d_1,s,k_0,k_2\ )$ où :

$d_1 = \delta_{27}(d,s)$, $k_0 = \Lambda_{23}(s,1)$, $k_1 = \Lambda_{23}(s,2)$, $k_2 = \Lambda_{23}(s,k)$, et

$\delta_{28,a}(d,s,k) = \delta_{7,b}(\ \delta_{26,4}(d_1,s,k_1)\ ,\ \delta_{26,3}(d_1,s,k_1)\ ,\ k_2\ )$

Cela conduit à une majoration du type :

$$\boxed{\delta_{28}(d,s,k) \leq E(\ s+lg(s)+lglg(k+d)+cte\ ,\ 5\ )}$$

<u>Les majorations</u> δ_{29} *(nullstellensatz et variantes, majoration des degrés)*

$\delta_{29}(d,k,1) = \delta_{28}(0,d,k)$

$\delta_{29}(d,k,n+1) = \delta_{7,c}(\ \sup\{\ \delta_{29}(\ \delta_{27}(d,d)\ ,\ \Lambda_{23}(d,k)\ ,\ n\ )\ ,\ \delta_{28}(d,d,k)\ \}\ ,\ \Lambda_{27}(d,k)\ )$

Cela conduit à une majoration du type :

$$\boxed{\delta_{29}(d,k,n) \leq E(\ d.lg(d)+lglg(k)+cte\ ,\ 4+n\ )}$$