Invent. math. 85, 53-72 (1986)

Inventiones mathematicae

Théorème de Pfister pour les variétés et anneaux de Witt réduits

Louis Mahé

IRMAR, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

0. Introduction

On connaît le célèbre théorème de Pfister pour les corps de fonctions:

Théorème 0.1 ([24] Th. 1). *Soit L un corps de degré de transcendance d sur un corps réel clos R, toute somme de carrés de L est au plus une somme de 2^d carrés.*

Plusieurs auteurs ([6, 7]) ont étudié les extensions possibles de ce théorème aux anneaux de la manière suivante: si A est un anneau et f une somme de carrés de A, on appelle *«longueur»* de f le nombre $l(f)=\operatorname{Inf}\left\{p:\exists x_1,\ldots,x_p\ f=\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right\}$ puis *«nombre de Pythagore* de A*»* le nombre $P(A)=\operatorname{Sup}\{l(f):f$ somme de carrés de $A\}$. Le théorème de Pfister dit que $P(L)\leqq 2^d$ pour L un corps de degré de transcendance d sur R, et on aimerait avoir des résultats similaires pour les anneaux de coordonnées de variétés affines de dimension d.

Malheureusement, à part quelques cas particuliers (essentiellement en dimension 1), on a surtout des résultats négatifs: par exemple

1°) $P(R[X,Y])=\infty$,

2°) on ne peut même pas borner les nombres de Pythagore des courbes affines indépendamment de celles-ci.

Par ailleurs, un corollaire immédiat du théorème 0.1 est le suivant:

Théorème 0.2 ([24] Th. 2). *Si L est un corps de fonctions non réel, de degré de transcendance d sur un corps réel clos R, alors -1 est somme d'au plus 2^d carrés.*

Ce théorème 0.2 conduit à la définition suivante:

Définition. Soit A un anneau, on appelle *«niveau»* de A et on note $\operatorname{niv}(A)$, la longueur de -1 dans A [6, 7, 14]. Peut-on alors obtenir un théorème concernant les anneaux analogue au théorème 0.2, à savoir borner le niveau de l'anneau de coordonnées d'une variété affine sans point réel en fonction de sa dimension? C'est le résultat que nous allons montrer au paragraphe 2. Sous la forme présentée ici, ce résultat doit beaucoup à J.-L. Colliot-Thélène.

Une présentation générale de ces questions de niveau est faite dans un récent article de Dai et Lam [14]. Ils soulèvent entre autres le problème que l'on résout ici.

Les motivations pour chercher un tel résultat – en dehors du désir de généraliser le théorème de Pfister aux anneaux de coordonnées de variétés affines et d'obtenir quelques précisions quantitatives sur le 17ᵉ problème de Hilbert – étaient de donner une certaine description de l'anneau de Witt réduit d'une R-variété affine. Dans un précédent article [21], l'auteur a montré le théorème suivant: soit A un anneau commutatif unitaire, $W(A)$ son anneau de Witt [16] et $\mathrm{Spec}_r A$ sont spectre réel [12]. Soit $\Lambda: W(A) \to (\mathrm{Spec}_r A, \mathbf{Z})$ l'application qui à un A-espace quadratique E et à un point α de $\mathrm{Spec}_r A$ (considéré comme homomorphisme de A vers un corps réel clos $k(\alpha)$), associe la signature du $k(\alpha)$-espace quadratique $E_\alpha = E \bigotimes_A k(\alpha)$; alors le conoyau de cet homomorphisme Λ (dit "signature globale") est un groupe de torsion 2-primaire (au sens où chaque élément du groupe est de torsion 2-primaire). Si A satisfait certaines conditions de réalité, toujours vérifiées par la suite dans le contexte de cet article, le noyau $\mathrm{Ker}\,\Lambda$ est le nilidéal de $W(A)$ ([21], 1.3), et l'image $\Lambda(W(A))$ est l'anneau de Witt réduit $W(A)_{\mathrm{red}}$.

En particulier, si $A = R[V]$ pour une R-variété affine V, $\mathrm{Cont}(\mathrm{Spec}_r A, \mathbf{Z})$ est exactement $\mathbf{Z}^s$ où s est le nombre de composantes connexes de $\mathrm{Spec}_r(A)$ (qui sont en bijection avec les composantes connexes semi-algébriques de $V(R)$, qui elles-mêmes coïncident dans le cas où $R = \mathbf{R}$ avec les composantes connexes pour la topologie euclidienne sur $V(\mathbf{R})$ ([12] Proposition 5)). Coker Λ possède alors au plus s générateurs et est donc de torsion finie. Borner cette torsion est exactement donner un entier n positif tel que tout élément de $2^n \cdot \mathbf{Z}^s$ soit la signature d'un espace quadratique.

Il se trouve que nous connaissons déjà un certain nombre de résultats à ce sujet. En particulier:

Knebusch et Dietel [15, 17] montrent que pour une courbe C, $\Lambda(W(C))$ est exactement $\mathbf{Z} \cdot 1 + 2 \cdot \mathbf{Z}^s$.

Colliot-Thélène et Sansuc [10] montrent que pour une $\mathbf{R}$-surface complète et lisse S ($\mathbf{R}$ désignant le corps des nombres réels), $\Lambda(W(S))$ contient $\mathbf{Z} \cdot 1 + 8\mathbf{Z}^s$ et que pour des $\mathbf{R}$-variétés abéliennes A de dimension d, $\Lambda(W(A))$ contient $\mathbf{Z} \cdot 1 + 2^{d+1}\mathbf{Z}^s$ (pour l'anneau de Witt d'une variété projective, consulter [16]).

Bröcker [2] montre que pour les corps de fonctions de degré de transcendance d sur un corps réel clos R, $\Lambda(W(L))$ contient $2^d \cdot \mathrm{Cont}(\mathrm{Spec}_r L \cdot \mathbf{Z})$.

Knebusch étend ces résultats aux semi-localisés d'anneaux de coordonnées de variétés affines de dimension d sur un corps réel clos [18].

Il paraissait alors naturel de penser que dans le cas de l'anneau de coordonnées d'une R-variété affine, cette torsion pouvait être bornée par un nombre ne dépendant que de la dimension de la variété. La démonstration du théorème de [21] cité ci-dessus fournissait même un plan pour aboutir au résultat. Il ne manquait que deux ingrédients de belle taille:

– savoir borner en fonction de la dimension le nombre d'inégalités nécessaires à la description d'un ouvert semi-algébrique,

– savoir borner en fonction de la dimension le nombre n de carrés tel que tout élément totalement positif f divise un élément de la forme $1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Le premier point est le résultat essentiel de deux articles de Bröcker [4, 5] et le deuxième est l'objet du paragraphe 2 de ce travail. Les théorèmes de Bröcker étant fondamentaux, il a semblé judicieux d'en relater ici la preuve (paragraphe 3), du moins pour l'un d'entre eux dont la démonstration peut se faire sans avoir besoin d'entrer au préalable dans l'appareil théorique des «espaces des ordres» de Marshall [23]. Une annonce de tous ces résultats est parue dans [22].

Le plan de l'article est le suivant:

1. Définitions
2. Théorème de Pfister généralisé
3. Les théorèmes de Bröcker
4. Description de l'anneau de Witt réduit d'une variété

1. Définitions

Tous les anneaux considérés seront commutatifs et unitaires.

Définition 1.1. Soit A un anneau. Si $f \in A$ est une somme de p carrés, on adoptera la notation de Pfister en écrivant $f = \boxed{p}$. On définit la *«longueur»* de f comme $l(f) = \mathrm{Inf}\{p : f = \boxed{p}\}$.

On appelle *«niveau»* de A le nombre (éventuellement infini) $\mathrm{niv}(A) = l(-1)$. On a alors les théorèmes suivants:

Théorème 1.2. *Pour un anneau A, les conditions suivantes sont équivalentes:* [9]

i) $\mathrm{Spec}_r A = \emptyset$.

ii) *Il n'y a pas de morphisme non nul de A dans un corps réel clos.*

iii) $\mathrm{niv}(A)$ *est fini.*

Si A est l'anneau de coordonnées $R[V]$ d'une variété affine V définie sur un corps réel clos R, on peut remplacer ii) par:

ii)′ $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{Alg}}(A, R) = 0$.

Définition 1.3. On dira que $f \in A$ est *«consistant»* s'il n'appartient à aucun idéal premier minimal de A. Il est facile de voir qu'un élément f non diviseur de zéro est consistant: si f est dans un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ on peut trouver un entier $n \geqq 1$ et un élément $s \notin \mathfrak{p}$ tels que $sf^n = 0$ ($\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est le nilradical de $A_{\mathfrak{p}}$).

Définition 1.4. Soit $f \in A$ tel que f^2 soit strictement positif sur $\mathrm{Spec}_r A$ (i.e. f ne s'annule pas sur $\mathrm{Spec}_r A$); le *Positivstellensatz* formel [9] dit qu'il existe des sommes de carrés s et t dans A telles que $f^2 s = 1 + t$. Notons pour $f^2 > 0$ sur $\mathrm{Spec}_r A$,

$$l'(f) = \mathrm{Inf}\{p \in N : \exists s \in A \ fs = 1 + \boxed{p}\}$$

(ici s n'est pas nécessairement une somme de carrés),

$$p(A) = \mathrm{Sup}\{l'(f) : f^2(\mathrm{Spec}_r A) > 0\},$$

$$p'(A) = \mathrm{Sup}\{l'(f) : f^2(\mathrm{Spec}_r A) > 0 \text{ et } f \text{ consistant dans } A\}.$$

Définition 1.5. Un idéal I d'un anneau A est dit *réel* si

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_K \quad \Sigma x_i^2 \in I \Rightarrow x_i \in I.$$

On appelle «*radical réel*» d'un anneau A l'intersection des idéaux premiers réels (ce sera A si $\mathrm{Spec}_r A = \emptyset$).

Soit V une R-variété affine; V est dite «*réelle*» si (0) est un idéal réel dans $R[V]$. Ceci revient à dire que $V(R)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Spec}\, R[V]$ et que V est réduite, ou encore que V est réduite et que tous les idéaux premiers minimaux sont réels.

Définition 1.6. Un semi-algébrique de $V(R)$ (resp. un constructible de $\mathrm{Spec}_r R[V]$) est une partie de $V(R)$ (resp. de $\mathrm{Spec}_r R[V]$) définie par un nombre fini d'inégalités polynômiales. On appellera «*ouvert de base*» un semi-algébrique (resp. constructible) ouvert de la forme

$$S(f_1, \ldots, f_n) = \{x \in V(R) : f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0\}$$

$$(\text{resp. } \tilde{S}(f_1, \ldots, f_n) = \{x \in \mathrm{Spec}_r R[V] : f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0\}).$$

Tout semi-algébrique ouvert pour la topologie euclidienne est union d'un nombre fini d'ouverts de base (Théorème de finitude [12] Proposition 3 ii), Proposition 6 i)). Pour une R-variété affine V, il y a bijection entre les semi-algébriques ouverts de $V(R)$ et les constructibles ouverts de $\mathrm{Spec}_r R[V]$ [12, 13]. On pourra donc parler indifféremment d'ouverts constructibles ou d'ouverts semi-algébriques. Le mot «*ouvert*» désignera l'une ou l'autre de ces notions.

Définition 1.7. Soit V une R-variété affine et S un ouvert de base de $V(R)$, on note:

$$s(S) = \mathrm{Inf}\{p \in N : S = S(f_1, \ldots, f_p)\},$$

$$s(V) = \mathrm{Sup}\{s(S) : S \text{ ouvert de base de } V(R)\},$$

$$s(n) = \mathrm{Sup}\{s(V) : \dim V = n\},$$

et pour S un ouvert quelconque de $V(R)$:

$$t(S) = \mathrm{Inf}\{p \in N : S = S_1 \cup \ldots \cup S_p,\ S_i \text{ ouverts de base}\},$$

$$t(V) = \mathrm{Sup}\{t(s) : S \text{ ouvert de } V(R)\},$$

$$t(n) = \mathrm{Sup}\{t(V) : \dim V = n\}.$$

De même, pour un anneau A, on notera $s(A)$ et $t(A)$ pour $s(\mathrm{Spec}_r A)$ et $t(\mathrm{Spec}_r A)$. Si $A = R[V]$ la bijection de 1.6 montre que $s(A) = s(V)$ et $t(A) = t(V)$.

Remarque 1.8. La définition 1.7 précédente ne dépend pas vraiment de la variété V mais de l'ensemble algébrique réel $V(R)$ dont l'anneau des coordonnées est l'anneau quotient de $R[V]$ par son radical réel: pour toute famille de polynômes $f_1, \ldots, f_k$ de $R[V]$ les ouverts semi-algébriques $S(f_1, \ldots, f_k)$ et $S(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k)$ sont les mêmes (si on note $\bar{f}$ l'image dans le quotient du polynôme f de $R[V]$). Le calcul de $s(V)$ et de $t(V)$ se fera donc plus avantageusement sur la variété réelle associée à V, dont la dimension de Krull est inférieure ou égale à celle de V (c'est la «dimension réelle» de V [13] Proposition 8.2).

1.9. Inégalité de Łojasiewicz

On trouve dans la littérature diverses formes de l'inégalité de Łojasiewicz suivant que l'on a affaire à $\mathbf{R}$ ou simplement un corps réel clos quelconque, et que l'on travaille sur un fermé borné, un fermé, un ouvert, avec des fonctions semi-algébriques ou des polynômes.

Cette inégalité étant l'outil essentiel des constructions du paragraphe 3 (et dans une certaine mesure du paragraphe 4), il n'est pas inutile de préciser l'énoncé qu'on utilise dans ce travail sous le nom d'«inégalité de Łojasiewicz». Les références devront être trouvées dans le chapitre 2 du livre [1]. Le lecteur pourra aussi se faire une idée en lisant [11] où la question est traitée sur $\mathbf{R}$.

R désigne un corps réel clos.

Théorème 1.9. *Soit S un fermé semi-algébrique de R^n, f et g deux fonctions semi-algébriques continues de S dans R telles que*

$$\{x \in S : f(x) = 0\} \subset \{x \in S : g(x) = 0\}.$$

Il existe une constante $c \in R^+$ et des entiers $p \geqq 1$, $N \geqq 1$ impair, tels que $|g^N(x)| \leqq c(1 + \|x\|^2)^p |f(x)|$ pour $x \in S$ $\left(\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$. De plus, l'inégalité est stricte dès que $g(x) \neq 0$.

Ce théorème s'obtient en combinant les deux résultats suivants:

Proposition 1.9.1 ([1] Proposition 2.6.2). *Soit h: $S \to R$ une fonction semi-algébrique continue, avec S fermé semi-algébrique de R^n. Alors il existe $c \in R$ et $p \in \mathbf{N}$ tels que*

$$|h(x)| \leqq c(1 + \|x\|^2)^p \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Théorème 1.9.2 ([1] Th. 2.6.7). *Soit A un semi-algébrique localement fermé, f et g deux fonctions semi-algébriques continues de A dans R telles que*

$$\{x \in A : f(x) = 0\} \subset \{x \in A : g(x) = 0\}.$$

Alors il existe un entier $N > 0$ (qu'on peut choisir impair) et une fonction semi-algébrique continue h sur A telle que $g^N = hf$ sur A.

La précision sur l'inégalité stricte de 1.9 est évidente: si par malheur on avait $|g(x)|^N = c(1 + \|x\|^2) |f(x)|$ pour un certain x tel que $g(x) \neq 0$, il suffirait de changer c en $2c$.

2. Théorème de Pfister pour les variétés ou positivstellensatz quantitatif

On rappelle que tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Le résultat que l'on démontre est le suivant:

Théorème 2.1. *Soit R un corps réel clos et A une R-algèbre de type fini sans point réel, de dimension de Krull d. Alors* $\mathrm{niv}(A) \leqq d - 1 + 2^{d+1}$.

L'idée de la preuve étant de se ramener au cas des corps et de faire une récurrence sur la dimension, nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires d'algèbre commutative.

Lemme 2.2. *Soit A un anneau contenant $1/2$, alors $\mathrm{niv}(A) = \mathrm{niv}(A_{red})$.*

Démonstration. Il est clair que si l'on a un morphisme d'anneaux unitaires $A \to B$, on a $\mathrm{niv}(B) \leqq \mathrm{niv}(A)$ (l'identité qu'on a sur A se transporte à B). Soit maintenant I le nilradical de A et $n = \mathrm{niv}(A/I)$. On a $-1 = \boxed{n}$ dans A/I, et en relevant dans A, $-(1+i) = \boxed{n}$ pour un certain i dans I. Par ailleurs, on sait que le développement en série de $(1+x)^{-1/2}$ s'écrit complètement dans $\mathbf{Z}[1/2][[X]]$. On en déduit que pour tout anneau A contenant $1/2$ et tout nilpotent i de A, $t = (1+i)^{-1/2} \in A$. On a donc $-1 = -(1+i)t^2 = \boxed{n}$ dans A et donc $\mathrm{niv}(A) \leqq n$.

Lemme 2.3. *Soit A un anneau réduit n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux, alors il existe $f \in A$ non diviseur de zéro et des anneaux intègres A_i en nombre fini tels que $A_f = \Pi A_i$.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ les idéaux premiers minimaux de A. Il est facile de voir (Bourbaki, Alg. Comm., Chap. II, § 2 n⁰ 6, Proposition 12) que puisque A est réduit, on a $\{\text{diviseurs de zéro}\} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i = \{\text{non consistants}\}$.

D'autre part, pour tout $i \leqq k$, on peut trouver $f_i \notin \mathfrak{p}_i$ et $f_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ $\left(\text{sinon on aurait } \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i, \text{ et l'un des } \mathfrak{p}_j \text{ serait contenu dans } \mathfrak{p}_i\right)$. Soit alors $f = \sum_i f_i$; f ne peut appartenir à $\bigcup_i \mathfrak{p}_i$ et n'est donc pas diviseur de zéro.

Notons alors $e_i = f_i/f$ dans A_f; $e_1, \ldots, e_k$ est une famille d'idempotents orthogonaux puisque $\sum_{i=1}^{k} e_i = 1$ et $e_i e_j = 0$ pour $i \neq j$ $\left(A \text{ est réduit et } f_i f_j \in \bigcap_k \mathfrak{p}_k\right)$. On a donc une décomposition de A_f en ΠA_i avec $A_i = e_i A_f$. Comme f n'est dans aucun premier minimal, les premiers minimaux de A_f sont exactement les $\mathfrak{p}_j A_f$ et ceux de A_i sont les $\mathfrak{p}_j A_i$ ne contenant pas e_i: l'unique idéal premier minimal de A_i est donc $\mathfrak{p}_i A_i = \{0\}$ et $A_i \simeq A_f/(1-e_i) = A_f/\mathfrak{p}_i A_f$ est intègre.

Le lemme suivant va permettre la récurrence sur la dimension.

Lemme 2.4. *Soit A noethérien de dimension de Krull d et $f \in A$ consistant; alors* $\dim(A/f) \leqq d-1$.

Démonstration. Supposons $\dim(A/f) = d$; A étant noethérien, on peut décomposer le fermé de Zariski $V(f)$ en $\bigcup_i V_i$ pour V_i les composantes irréductibles de $V(f)$. L'une des composantes V_i a alors la dimension d et si $V_i = V(\mathfrak{p}_i)$ pour $\mathfrak{p}_i$ premier, $\mathfrak{p}_i$ est minimal. Comme $V(\mathfrak{p}_i) \subset V(f)$, on a $f \in \mathfrak{p}_i$ et f n'est donc pas consistant.

On peut maintenant passer à la

Démonstration du théorème 2.1. A contenant $1/2$, à l'aide du lemme 2.2 on pourra la supposer réduite.

Si $\dim A = 0$, c'est un produit d'un certain nombre d'exemplaires du corps $R(i)$ ($i^2 = -1$) et $\mathrm{niv}(A) = 1$.

Soit A une R-algèbre de type fini sans point réel, de dimension de Krull d. D'après le lemme 2.3, on peut trouver $f \in A$ non diviseur de zéro et une

décomposition de A_f en ΠA_i, A_i intègres, $\dim A_i \leqq d$ et sans point réel. A_i étant le quotient d'un anneau de fractions de A, son corps de fractions K_i est de degré de transcendance sur R inférieur ou égal à d (cf. par exemple Matsumura, Comm. Algebra, Th. 23), et le théorème de Pfister donne une expression $-1 = \boxed{2^d}$ dans K_i. En chassant les dénominateurs on obtient $-g_i^2 = \boxed{2^d}$ dans A_i et aussi $-g^2 = \boxed{2^d}$ dans A_f, avec $g = (g_1, \ldots, g_k)$ non diviseur de zéro dans A_f (les g_i ne l'étant pas). Quitte à multiplier par f^{2s} pour un certain $s \in N$, on obtient $-\lambda^2 = \boxed{2^d}$ dans A avec $\lambda = f^s g$ dans A_f. Comme g n'est pas diviseur de zéro dans A_f, λ ne l'est pas dans A et est donc consistant: via le lemme 2.4, A/λ est de dimension de Krull inférieure stricte à d, de type fini, sans point réel, et l'hypothèse de récurrence s'applique: on a dans A/λ une égalité: $-1 = \boxed{d-2+2^d}$.

Relevons-la dans A: on a $h\lambda = 1 + \boxed{d-2+2^d}$ pour un $h \in A$, et en élevant au carré, $h^2\lambda^2 = 1 + \boxed{d-1+2^d}$ car si $a = 1 + \sum_1^p x_i^2$, on a

$$a^2 = 1 + (\Sigma x_i^2)^2 + \sum_1^p (x_i\sqrt{2})^2 = 1 + \boxed{p+1}\ .$$

Multiplions alors l'équation $\lambda^2 + \boxed{2^d} = 0$ par h^2; on obtient $h^2\lambda^2 + \boxed{2^d} = 1 + \boxed{d-1+2^{d+1}} = 0$ dans A, ce qui est le résultat cherché.

Corollaire 2.5. *Soit R un corps réel clos et A une R-algèbre de type fini de dimension de Krull d. Alors*

$$p(A) \leqq d - 1 + 2^{d+1},$$

$$p'(A) \leqq d - 2 + 2^d.$$

Démonstration. Soit $f \in A$ tel que $f(\mathrm{Spec}_r A) > 0$. Alors A/f est sans point réel et de niveau n: on peut écrire $-1 = \boxed{n}$ dans A/f et donc $hf = 1 + \boxed{n}$ dans A. En général, $\dim A/f \leqq d$ et $n \leqq d - 1 + 2^{d+1}$; si f est consistant, $\dim A/f \leqq d-1$ d'après le lemme 2.4 et $n \leqq d - 2 + 2^d$.

Remarque 2.6. Si V est une variété affine définie sur R réel clos, compte tenu du théorème de Tarski-Seidenberg, on peut remplacer pour $f \in R[V]$, la condition «formelle» $f(\mathrm{Spec}_r R[V]) > 0$ par la condition plus «géométrique» $f(V(R)) > 0$ (i.e. $\forall x \in V(R)\ f(x) > 0$).

Remarque 2.7. Si V est une variété affine réelle (au sens où (0) est un idéal réel de $R[V]$), un élément $f \in R[V]$ jamais nul sur $V(R)$ ne peut diviser zéro; un tel élément divisant un terme de la forme $1 + \boxed{p}$, il suffit de voir qu'un élément de ce type ne peut diviser zéro: si $s(1 + \boxed{p}) = 0$, on a aussi $s^2 + \boxed{p} = 0$ et $s = 0$ puisque (0) est réel.

Par contre, si V n'est pas réelle tout peut arriver: 0 est strictement positif sur $\mathrm{Spec}_r \mathbf{C}$! On dispose quand même du lemme suivant qui sera précieux au paragraphe 4:

Lemme 2.8. *Soit A un anneau noethérien et $f \in A$ ne s'annulant pas sur* $\mathrm{Spec}_r A$*; on peut alors trouver $g \in A$ consistant tel que g coïncide avec f sur* $\mathrm{Spec}_r A$.

Démonstration. Si $\mathrm{Spec}_r A = \emptyset$, il suffit de prendre $g = 1$. On peut donc supposer $\mathrm{Spec}_r A \neq \emptyset$. Soit $f \in A = R[V]$ ne s'annulant pas sur $\mathrm{Spec}_r A$. Si f n'est pas consistant, f est dans certains $\mathfrak{p}_i$ premiers minimaux. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ ceux qui contiennent f et $\mathfrak{p}_{k+1}, \dots, \mathfrak{p}_r$ les autres premiers minimaux. Puisque f ne s'annule pas sur $\operatorname{Spec}_r A$, f n'appartient à aucun idéal premier réel (et il y en a puisque $\operatorname{Spec}_r A \neq \emptyset$), et par conséquent aucun de ceux-ci ne peut contenir $\mathfrak{p}_i$ pour $i \leqq k$: en d'autres mots les idéaux premiers réels sont tous parmi les spécialisations des $\mathfrak{p}_i$ pour $i > k$, ou encore $\bigcap_{i>k} \mathfrak{p}_i$ est égal au radical réel de A.

Soit comme en 2.3 $h_i \notin \mathfrak{p}_i$ pour $i \leqq k$ et $h_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ et $h = \sum_{i \leqq k} h_i$. On a alors que pour tout $i \leqq k$, $h \notin \mathfrak{p}_i$ et $h \in \bigcap_{j>k} \mathfrak{p}_j$.

Soit $g = f + h$; puisque h est dans le radical réel de A, il est nul en tout point de $\operatorname{Spec}_r A$. D'autre part g est nécessairement consistant: supposons en effet que g soit dans un $\mathfrak{p}_i$ premier minimal; si $i \leqq k$ on sait que $f \in \mathfrak{p}_i$ et $h \notin \mathfrak{p}_i$: impossible; si $i > k$ on sait que $f \notin \mathfrak{p}_i$ et $h \in \mathfrak{p}_i$: impossible.

Le même type d'argument permet de montrer le

Lemme 2.9. *Soit A un anneau noethérien contenant* $\mathbf{Q}$. *Pour tout x de A on peut trouver y dans A tel que $1 + x^2 = 1 + y^2$ sur* $\operatorname{Spec}_r A$ *et tel que $1 + y^2$ soit consistant.*

Démonstration. Reprenons les notations de la preuve précédente en faisant $f = 1 + x^2$ et considérons pour $n \in \mathbf{N}$ l'élément $1 + (x + nh)^2 = 1 + x^2 + nh(2x + nh)$. Puisque h est dans le radical réel de A, cet élément coïncide avec $1 + x^2$ sur $\operatorname{Spec}_r A$. On sait de plus que pour aucun n, $1 + (x + nh)^2$ ne peut être dans $\mathfrak{p}_i$ pour $i > k$ car $h \in \mathfrak{p}_i$ et $1 + x^2 \notin \mathfrak{p}_i$. Nous allons montrer que pour un certain $n \geqq 1$, $1 + (x + nh)^2$ n'appartient à aucun $\mathfrak{p}_i$ pour $i \leqq k$. Supposons le contraire: pour tout $n \geqq 1$, $\bigcup_{i \leqq k} \mathfrak{p}_i$ contient $1 + x^2 + nh(2x + nh)$. L'un des $\mathfrak{p}_i$ pour $i \leqq k$ contient donc au moins deux éléments distincts de ce genre et donc aussi deux éléments $2x + n_1 h$, $2x + n_2 h$, puisque $h \notin \mathfrak{p}_i$ et n_i inversible dans A. Mais alors il contient la différence $(n_1 - n_2)h$ et donc aussi h puisque $n_1 - n_2$ est inversible dans A.

La proposition suivante va permettre d'améliorer les bornes du paragraphe 4.

Proposition 2.10. *Soit A une R-algèbre de type fini de dimension de Krull d telle que* $\operatorname{niv}(A/\mathfrak{p}) \leqq p$ *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* $\operatorname{Spec} A$. *Alors* $\operatorname{niv}(A) \leqq 1 + d(p+1)$.

Démonstration. Récurrence sur d. Compte tenu du lemme 2.2 on peut supposer A réduit.

* Si $d = 0$, A étant sans point réel, on sait que $\operatorname{niv}(A) = 1$.
* Soit $\dim A = d$; par le lemme 2.3 on peut trouver g non diviseur de zéro tel que $A_g = \prod_i A_i$, A_i intègres. Les A_i étant des quotients de A_g par des $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A_g \subset \operatorname{Spec} A$, on a un homomorphisme $A/\mathfrak{p}_i \to A_g/\mathfrak{p}_i A_g \simeq A_i$ et donc $\operatorname{niv}(A_i) \leqq p$, puis $\operatorname{niv}(A_g) \leqq p$.

Dans A on a une identité $g^{2n} + \boxed{p} = 0$. Comme $\operatorname{Spec}(A/g^n) \subset \operatorname{Spec} A$ et que $\dim(A/g^n) \leqq d - 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A/g^n pour obtenir $\operatorname{niv}(A/g^n) \leqq 1 + (d-1)(p+1)$ et donc $sg^n = 1 + \boxed{1 + (d-1)(p+1)}$ dans A, puis $s^2 g^{2n} = 1 + \boxed{2 + (d-1)(p+1)}$. En multipliant $g^{2n} + \boxed{p}$ par s^2, on obtient $0 = 1 + \boxed{1 + d(p+1)}$ dans A.

Corollaire 2.11. *Soit A une R-algèbre de type fini de dimension de Krull d et $f \in A$ tel qu'il existe dans A une identité* $fs = \prod_i \left(1 + \sum_{j=1}^{p} x_{ij}^2\right)$.

Si f est consistant, $l'(f) \leqq 1 + (d-1)(p+1)$.
Dans le cas général $l'(f) \leqq 1 + d(p+1)$.

Il suffit d'appliquer la proposition 2.10 à A/f qui est de dimension $d-1$ ou d suivant que f est consistant ou non.

3. Les résultats de Bröcker

Nous allons d'abord énoncer les résultats fondamentaux obtenus par L. Bröcker dans deux récents articles [4, 5] (Voir définition 1.7).

Théorème 3.1 ([4] Folg. 6.4). $s(n) \leqq n(n-2)(n-4)\dots$

(Le membre de droite sera noté $n!!$).

Théorème 3.2 ([5] Th. 4.5). *$t(n)$ est fini.*

En particulier, pour les dimensions 1, 2, 3 on a

$$s(1) = t(1) = 1,$$

$$s(2) = 2;\ t(2) = 3,$$

$$s(3) = 3.$$

On ne donnera ici que la démonstration du théorème 3.1. On traite tout d'abord le cas des corps à l'aide du théorème suivant dû aussi à Bröcker:

Théorème 3.3 [2]. *Soit K un corps de degré de transcendance d sur un corps réel clos R. Alors $s(k) \leqq d$.*

La démonstration proposée ici diffère un peu de celle de Bröcker en ce sens qu'elle fait uniquement appel aux résultats de Pfister [24, 25] et au théorème de Tsen-Lang [20].

1ère étape

Si φ est une forme bilinéaire non dégénérée sur un anneau A, on notera $\hat{\varphi}: \operatorname{Spec}_r A \to \mathbf{Z}$ la fonction continue qui à $\alpha \in \operatorname{Spec}_r A$ associe $\hat{\varphi}(\alpha) \in W(k(\alpha)) = \mathbf{Z}$ (α correspond à un morphisme $A \to k(\alpha)$ où $k(\alpha)$ est un corps réel clos [21]).

On passe de la notion d'ouvert de base de $\operatorname{Spec}_r K$ à celle de forme de Pfister [19] de la façon suivante: à tout ouvert de base donné sous la forme $\tilde{S}(f_1, \dots, f_n)$ on associe la n-forme de Pfister $\psi = \langle\langle f_1, \dots, f_n \rangle\rangle := \langle 1, f_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, f_n \rangle$, et on a $\tilde{S}(f_1, \dots, f_n) = \{x \in \operatorname{Spec}_r K : \hat{\psi}(x) = 2^n\}$. Si $n > d$ on va montrer qu'on peut trouver une $(n-1)$-forme de Pfister $\varphi = \langle\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle\rangle$ telle que $\psi \simeq 2\varphi (:= \varphi \perp \varphi)$.

En répétant l'opération on trouve une d-forme $q = \langle\langle h_1, \ldots, h_d \rangle\rangle$ telle que $\psi \simeq 2^{n-d} q$. On a alors

$$\tilde{S}(f_1, \ldots, f_n) = \{x \in \mathrm{Spec}_r K : \hat{\psi}(x) = 2^n\} = \{x \in \mathrm{Spec}_r K : \hat{q}(x) = 2^d\} = \tilde{S}(h_1, \ldots, h_d)$$

et le tour est joué.

Il reste donc à montrer cette propriété de «divisibilité par 2» (que Bröcker montre à la torsion près, ce qui est suffisant). Si la forme ψ est isotrope, elle est hyperbolique et donc évidemment «divisible» par 2; à partir de maintenant on pourra donc la supposer anisotrope.

2ème étape

D'après le théorème de Lang ([20], Th. 6), $K(i)$ a la propriété C_d, et en particulier toute n-forme de Pfister avec $n > d$ a un zéro non trivial. Cette forme ψ représente donc tout élément sur tout surcorps de $K(i)$, et on a en particulier $x + iy = \psi(z_1, \ldots, z_{2^n})$ avec les z_j dans $K(i)(x, y)$. D'après le principe de la norme de Scharlau (cf. par exemple [19] p. 206), on obtient que $x^2 + y^2$ est représenté par ψ sur $K(x, y)$. Le «Teilformsatz» de Pfister ([25] Satz 3, p. 368, ou [19], th. 2.8, p. 262) assure alors que $\langle 1, 1 \rangle$ est une sous-forme de la forme anisotrope ψ. La sous-forme pure ψ' de ψ ([19], p. 278) représente donc 1 sur K, et d'après le lemme de Scharlau ([26], lemma 2.4.4, p. 59 ou [19], prop. 1.5, p. 278), ψ est de la forme $\psi \simeq \langle\langle 1, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle\rangle \simeq 2\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle\rangle$, et le résultat est démontré.

Soit A un anneau semi-local. Appelons «indice de stabilité réduit» de A, $\mathrm{is}(A)$, le plus petit entier n (ou bien ∞) tel que pour toute d-forme de Pfister ψ avec $d > n$ il existe une n-forme de Pfister φ vérifiant $\hat{\psi} = 2^{d-n}\hat{\varphi}$.

Notons que cet indice, qui concerne les signatures d'espaces quadratiques définis sur A, est différent de l'indice $s(A) = s(\mathrm{Spec}_r A)$ défini en 1.7. Bröcker ([2], Satz 3.17) donne dans le cas des corps, toute une liste de définitions équivalentes de cet indice, et Marshall ([23], th. 6.2) montre que ces définitions restent encore équivalentes dans le cas des «espaces des ordres», et par conséquent aussi dans le cas des anneaux semi-locaux.

Le théorème précédent montre que, pour un corps K de degré de transcendance d sur un corps réel clos, on a $s(K) = \mathrm{is}(K) \leqq d$. Nous utiliserons sans démonstration le théorème suivant dû à Knebusch:

Théorème 3.4 ([18], Th. 9.5, p. 188). *Soit A un anneau semi-local connexe, alors* $\mathrm{is}(A) \leqq \mathrm{Sup}\{\mathrm{is}(k(\mathfrak{p})) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A\}$.

On en déduit immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 3.5. *Si A est un semi-localisé d'un anneau de coordonnées $R[V]$ pour une R-variété V de dimension d,* $\mathrm{is}(A) \leqq d$.

Démonstration. Dans les conditions de l'énoncé, les corps $k(\mathfrak{p})$ pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ sont des corps de degré de transcendance inférieur ou égal à d sur R, et si A est connexe le théorème précédent s'applique et l'on a $\mathrm{is}(A) \leqq \mathrm{is}(k(\mathfrak{p})) = d$ pour un certain $\mathfrak{p}$ minimal. On se ramène au cas connexe de manière évidente puisqu'une n-forme de Pfister sur ΠA_i est une collection de n-formes de Pfister sur chacun des A_i.

Démonstration de 3.1. Il convient tout d'abord de fixer un certain nombre de notations et de rappeler quelques résultats relatifs au spectre réel. On pourra trouver tous ces résultats dans [12] et [13].

3.6. *Notations, rappel de résultats*

3.6.1. D'après la remarque 1.8, on sait qu'on peut toujours se ramener à une variété réelle. V sera donc une variété réelle, pour laquelle la dimension de Krull d et la dimension réelle au sens de [13] coïncident. La dimension sera donc simplement la dimension de Krull. On rappelle (déf. 1.5) que V est réduite et que les corps $R(V_i)$, pour V_i les composantes irréductibles de V, sont formellement réels. Si W est une sous-variété de V, on note $\mathrm{codim}\, W = d - \dim W$. On note $R(V)$ le produit des $R(V_i)$ pour V_i composante irréductible de V de codimension 0, $\mathrm{Sing}(V)$ le lieu singulier de V, $\mathrm{Sing}^d(V) = \mathrm{Sing}(V) \cup \bigcup_i V_i$ pour V_i les composantes irréductibles de V de codimension positive et $\mathrm{Reg}^d(V) = V \backslash \mathrm{Sing}^d(V)$.

3.6.2. Si S est un semi-algébrique de $V(R)$, on notera $\tilde{S}$ le constructible correspondant dans $\mathrm{Spec}_r R[V]$ [12], $\overline{S}^Z$ la clôture de Zariski dans V.

3.6.3. Si S est un ouvert de base de $V(R)$ donné sous la forme $S = S(f_1, \ldots, f_n)$, on notera

$$\hat{S} = \{x \in V(R) : f_1(x) \geqq 0, \ldots, f_n(x) \geqq 0\} \quad \text{et} \quad dS = \left\{x \in V(R) : \prod_i f_i(x) = 0\right\}.$$

Ces notations sont abusives puisque $\hat{S}$ et dS dépendent de la représentation de S par les f_i, mais ne pourront prêter à confusion dans les cas où elles seront employées. On a toujours $\hat{S} \backslash S \subset dS$.

3.6.4. Si T est une sous-variété fermée de V, on appellera «équation positive» de $T(R)$, une fonction $g \in R[V]$ non négative sur $V(R)$ satisfaisant

$$\forall x \in V(R)\; g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in T(R).$$

3.6.5. Un point α de $\mathrm{Spec}_r A$ peut être vu comme le cône des éléments de A dont l'image dans un certain corps réel clos $k(\alpha)$ devient positive ou nulle. Si α et β sont deux tels cônes tels que $\alpha \subset \beta$, on dit que α est une générisation de β (et β une spécialisation de α). On a alors que $\mathrm{Supp}\, \alpha (:= \alpha \cap -\alpha)$ est une générisation au sens habituel de $\mathrm{Supp}\, \beta$ [12, 13].

3.6.6. Soit $A = R[V]$ avec V affine réelle de dimension d et soit $\tilde{S}$ un constructible de $\mathrm{Spec}_r A$ de dimension d. On sait alors qu'il existe un point x dans S tel que $\dim_R(S, x) = d$ ([13], déf. 8.10, prop. 8.11), c'est-à-dire qu'il existe une chaîne maximale de spécialisations dans $\mathrm{Spec}_r A$ de longueur d, $\alpha_0 \subsetneqq \alpha_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \alpha_d = x$ se terminant en x, avec les α_i dans $\tilde{S}$. On a alors une chaîne de spécialisations dans $\mathrm{Spec}\, A$: $\mathrm{Supp}\, \alpha_0 \subsetneqq \mathrm{Supp}\, \alpha_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathrm{Supp}\, \alpha_d$ et $\mathrm{Supp}\, \alpha_0$ est donc de hauteur 0: il correspond à une composante irréductible V_i de dimension d de V et α_0 est donc dans $\mathrm{Spec}_r R(V_i) \subset \mathrm{Spec}_r R(V)$. En résumé, si un semi-algébrique $S \subset V(R)$ est de codimension 0 dans V (i.e. si $\overline{S}^Z(R)$ est de codimension 0), alors $\tilde{S} \cap \mathrm{Spec}_r R(V) \neq \emptyset$.

3.6.7. Soit S un ouvert semi-algébrique de $V(R)$ contenant un point régulier x de $\mathrm{Reg}^d(V)(R)$. Alors, par [13] cor. 6.4, prop. 7.5, le point α de $\tilde{S}$ correspondant à x dans S possède une générisation β dans $\mathrm{Spec}_r R(V)$. Comme $\tilde{S}$ est ouvert et donc stable par générisation, β est aussi dans $\tilde{S}$. En résumé, si S est un ouvert semi-algébrique de $V(R)$, alors

$$S \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{S} \cap \mathrm{Spec}_r R(V) \neq \emptyset .$$

3.6.8. Soit V une R-variété affine réelle et $A = R[V]$. Soit S un semi-algébrique de $V(R)$ tel que $\tilde{S}$ contienne un point $\beta \in \mathrm{Spec}_r R(V)$. Alors S contient un point régulier de $\mathrm{Reg}^d(V)(R)$: aucun point de $\mathrm{Spec}_r R(V)$ ne peut vérifier une équation (autre que celle d'un V_i) et ne peut donc être dans $\overline{\mathrm{Sing}^d(V)(R)}$. On a donc $\mathrm{Spec}_r R(V) \subset \overline{\mathrm{Reg}^d(V)(R)}$ et $\tilde{S} \cap \mathrm{Spec}_r R(V) \neq \emptyset$ implique $\tilde{S} \cap \overline{\mathrm{Reg}^d(V)(R)} \neq \emptyset$ et donc $S \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R) \neq \emptyset$.

3.6.9. Soit V une R-variété affine irréductible, D une sous-variété irréductible de codimension 1, $\mathfrak{p}$ l'idéal des fonctions s'annulant sur D. On dit que D définit un diviseur premier réel dans V si l'anneau local $R[V]_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète et si $\mathfrak{p}R[V]_{\mathfrak{p}}$ est un idéal réel. Si V n'est pas irréductible, une sous-variété irréductible D est dans une certaine composante irréductible V_i et on a une définition analogue pour «diviseur premier réel dans la composante V_i».

Soient V une R-variété affine réelle et D une sous-variété irréductible telle que $D(R) \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)$ soit de codimension 1. D est alors une sous-variété irréductible de codimension 1 d'une composante V_i de V de dimension d. Comme $D(R) \cap \mathrm{Reg}^d(V_i(R)) \neq \emptyset$, on peut trouver un point $x_0 \in D(R) \cap \mathrm{Reg}^d(V_i)(R)$ et un voisinage ouvert de Zariski U de x_0 dans V_i, qui est une sous-variété affine régulière et dans lequel on peut appliquer les résultats de [8] (th. 3.4, cor. 3.7) pour affirmer que D y définit un diviseur premier réel.

3.7. *Plan de la démonstration de 3.1*

Avant d'énoncer les différents résultats préparatoires et de faire la démonstration proprement dite, il n'est peut être pas inutile de se faire une idée globale de la méthode utilisée.

On procède par récurrence sur la dimension d de la variété réelle V. Soit S un ouvert de base de $V(R)$.

1. On montre que $S = S(f_1, \ldots, f_d) \cup (S_1 \cap T(R))$ où S_1 est un ouvert de base et T une sous-variété fermée de V de codimension strictement positive. Si on se contente de codim $T \geqq 1$, le résultat est facile à obtenir ([4], § 6, introduction) en utilisant principalement le théorème 3.3 qui assure que $\tilde{S} \cap \mathrm{Spec}_r R(V)$ est représenté par d inégalités. Pour obtenir codim $T \geqq 2$ il faut utiliser

a) Sur la partie régulière de V, la théorie des diviseurs premiers réels que l'on peut trouver dans [8] qui donne une généralisation du Nullstellensatz réel (3.6.9),

b) le théorème 3.4 de Knebusch sur les anneaux semi-locaux qui permet de contrôler ce qui se passe sur la partie singulière. En fait la démonstration faite ici est légèrement plus simple que celle de Bröcker:

– Bröcker semi-localise en des points «extrémaux» de façon à contrôler ce qui se passe sur *toute* la partie singulière.

– Ici, on semi-localise seulement aux composantes irréductibles de dimension inférieure à d du lieu singulier, car il suffit en fait de contrôler la partie singulière pure de codimension 1.

Tout ceci est fait au cours des propositions 3.8 et 3.9.

2. On applique l'hypothèse de récurrence à $S_1 \cap T(R)$ pour la représenter par $(d-2)!!$ inégalités. On montre (Lemme 3.10) qu'on peut choisir $S_1 \subset S$, ce qui permet de représenter assez facilement S par $d \cdot (d-2)!! = d!!$ inégalités.

Cette partie est complètement différente de la preuve de Bröcker. Avec la première partie du 1°) et le 2°), on obtient aisément la majoration $s(n) \leqq n!$, sans parler d'anneaux semi-locaux.

Commençons maintenant les démonstrations.

Proposition 3.8. *Soit V une variété affine réelle de dimension d et soient $\tilde{S} = \tilde{S}(f_1, \ldots, f_l) \supset \tilde{S}_1 = \tilde{S}(g_1, \ldots, g_n)$ deux ouverts de base de* $\mathrm{Spec}_r R[V]$ *tels que la trace de $\tilde{T} = \tilde{S} \setminus \tilde{S}_1$ sur* $\mathrm{Spec}_r R(V)$ *soit vide. Alors on peut modifier les g_i en g'_i pour que $S'_1 \subset S$, que $(S \setminus S'_1) \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)$ soit de codimension supérieure ou égale à 2 dans V et que S_1 et S'_1 coïncident sur* $\mathrm{Sing}^d(V)(R)$ $(S'_1 = S(g'_1, \ldots, g'_n))$.

Démonstration. D'après 3.6.6, on sait que $\mathrm{codim}_V T \geqq 1$. Soit $\hat{S}$ et dS les semi-algébriques définis suivant 3.6.3 à l'aide des f_i. On a $S \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R) \subset \hat{S}_1$: si un g_i était strictement négatif en un point régulier de S, d'après 3.6.7, $\tilde{S}(-g_i) \cap \tilde{S} \cap \mathrm{Spec}_r R(V)$ serait non vide, ce qui contredirait l'hypothèse. Notons $A = R[V]$.

Supposons que $\overline{T \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)}^Z$ contienne une composante irréductible D de codimension 1 dans V. D'après 3.6.9, D est un diviseur premier réel dans une composante irréductible V_i de V, et l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p}$ le point générique de D est de valuation discrète d'idéal maximal réel. Si aucun g_i n'appartient à $\mathfrak{p}$, les g_i étant positifs ou nuls sur $S \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R) \subset \hat{S}_1$, sont génériquement positifs sur $D(R) \cap S$, ce qui contredit l'hypothèse $D \subset \overline{T \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)}^Z$.

Soit donc g_i nul sur D; comme il ne change pas de signe sur $S \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)$, g_i est d'ordre pair en D ([8], prop. 3.2). Soit u un générateur de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, on a dans $A_{\mathfrak{p}}$, $g_i = t_i u^{2n}$ avec t_i inversible dans $A_{\mathfrak{p}}$ et on a donc dans A, $s_i^2 g_i = c_i u^{2n}$ avec s_i et c_i n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$. Ne pouvant être de signes contraires sur $\mathrm{Spec}_r R(V)$, g_i et c_i ne peuvent non plus l'être sur $\mathrm{Reg}^d(V)(R)$ (3.6.7).

Soit h une équation positive de $\mathrm{Sing}^d(V)(R)$ et $g'_i = g_i + c_i h$. Les fonctions g_i et g'_i coïncident sur $\mathrm{Sing}^d(V)(R)$ par définition. Comme sur $\mathrm{Reg}^d(V)(R)$ on a $g_i > 0 \Rightarrow c_i \geqq 0$ et donc $g_i > 0 \Rightarrow g'_i > 0$, on a globalement $S_1 \subset S'_1 = S(g'_1, \ldots, g'_n)$. Multiplions alors les g'_i par une équation positive de dS et appelons encore les nouvelles fonctions g'_i: on a toujours $S_1 \subset S'_1$ puisque $S_1 \subset S$.

Montrons maintenant que $S'_1 \subset S$; puisque S_1 et S'_1 coïncident sur $\mathrm{Sing}^d(V)(R)$ et que $S_1 \subset S$, il reste à étudier le cas où $x \in \mathrm{Reg}^d(V)(R)$.

Supposons donc $x \in S'_1$, $x \notin S$, $x \in \mathrm{Reg}^d(V)(R)$.

1er cas: $x \in \hat{S} \setminus S \subset dS$: impossible puisque $dS \cap S'_1 = \emptyset$.

2ème cas: $x \in \complement \hat{S} \cap S'_1 \cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)$. D'après 3.6.7, ceci entraîne que $(\widetilde{\complement \hat{S} \cap S'_1}) \cap \mathrm{Spec}_r R(V) \neq \emptyset$; mais les g_i et les g'_i ayant même signe sur $\mathrm{Spec}_r R(V)$, on a

$$\tilde{S}'_1 \cap \mathrm{Spec}_r R(V) = \tilde{S}_1 \cap \mathrm{Spec}_r R(V) = \tilde{S} \cap \mathrm{Spec}_r R(V)$$

et on a alors $\widetilde{\complement \hat{S} \cap S'_1} \cap \mathrm{Spec}_r R(V) = \emptyset$: contradiction. On a donc $S_1 \subset S'_1 \subset S$.

$\overline{(S\setminus S_1)\cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)}^Z$ ne contient donc plus D et ne contient pas non plus de nouvelles composantes de codimension 1 puisqu'il est contenu dans $\overline{(S\setminus S_1)\cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)}^Z$. En répétant l'opération tant qu'il reste une composante de codimension 1 dans $\overline{(S\setminus S_1')\cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)}^Z$ on élimine ainsi toutes les parties de codimension 1 dans $T\cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)$.

Cette proposition, combinée au théorème 3.3 et au corollaire 3.5 permet de montrer le résultat suivant:

Proposition 3.9. *Soit V une variété affine réelle de dimension d définie sur R. Soit S un ouvert de base de $V(R)$. On peut trouver $S_1=S(g_1,\dots,g_d)\subset S$ tel que $S\setminus S_1$ soit de codimension supérieure ou égale à 2.*

Démonstration. Soit $S=S(f_1,\dots,f_s)$ dans $V(R)$ et soient $C_1,\dots,C_k$ les composantes irréductibles de $\mathrm{Sing}^d(V)$ telles que $C_i(R)\not\subset dS$. Soit A_Σ le semi-localisé de A aux points génériques x_i des C_i. Si de telles composantes C_i n'existent pas, on pose $A_\Sigma=R(V)$. Les f_j étant inversibles dans A_Σ, la trace de $\tilde{S}$ sur $\mathrm{Spec}_r A_\Sigma$ est

$$\tilde{S}\cap \mathrm{Spec}_r A_\Sigma=\{x\in \mathrm{Spec}_r A_\Sigma : \hat{\varphi}(x)=2^s\},$$

où φ est la s-forme de Pfister $\langle\langle f_1,\dots,f_s\rangle\rangle$. D'après le théorème 3.4 et son corollaire 3.5, on peut trouver une d-forme $\psi=\langle\langle g_1,\dots,g_d\rangle\rangle$ telle que

$$\tilde{S}\cap \mathrm{Spec}_r A_\Sigma=\{x\in \mathrm{Spec}_r A_\Sigma : \hat{\psi}(x)=2^d\}.$$

En multipliant par les carrés des dénominateurs des g_i, on peut supposer ces g_i dans A et définir $\tilde{S}_2=\tilde{S}(g_1,\dots,g_d)$ dans $\mathrm{Spec}_r A$.

Notons $\tilde{U}$ l'ouvert $\tilde{S}_2\cap\complement\tilde{\bar{S}}$. Puisque l'on a $\tilde{U}\cap \mathrm{Spec}_r A_\Sigma=\emptyset$ et que $\mathrm{Spec}_r R(V)\subset \mathrm{Spec}_r A_\Sigma$, on a aussi $\tilde{U}\cap \mathrm{Spec}_r R(V)=\emptyset$ et $U\cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)=\emptyset$ par 3.6.8; on a donc $U\subset \mathrm{Sing}^d(V)(R)$. Comme $\tilde{U}\cap \mathrm{Spec}_r R(C_i)=\emptyset$ ($\mathrm{Spec}_r R(C_i)\subset \mathrm{Spec}_r A_\Sigma$) on en déduit à nouveau que $U\cap \mathrm{Reg}(C_i)(R)=\emptyset$ et que $U\cap C_i(R)\subset \mathrm{Sing}(C_i)(R)$ et aussi que $\bar{U}^Z(R)\cap\left(\bigcup_i C_i(R)\right)\subset\bigcup_i \mathrm{Sing}(C_i)(R)$. Donc, si h est une équation positive de $\bar{U}^Z(R)$, h ne s'annule en aucun des points génériques x_i et est donc inversible dans A_Σ.

En multipliant les g_i par h et par une équation positive k de dS, on a alors $S_1=S(hkg_1,\dots,hkg_d)\subset S$ puisque $hkg_i(x)>0 \Rightarrow x\in S_2$ et $x\notin \complement\bar{S}$ et $x\notin dS$. On a donc $\tilde{S}_1\cap \mathrm{Spec}_r A_\Sigma=\tilde{S}_2\cap \mathrm{Spec}_r A_\Sigma=\tilde{S}\cap \mathrm{Spec}_r A_\Sigma$, et $\tilde{S}$ et $\tilde{S}_1$ sont dans les conditions d'application de la proposition 3.8, et on peut trouver $S_1'=S(g_1',\dots,g_d')\subset S$ tel que $\overline{(S\setminus S_1')\cap \mathrm{Reg}^d(V)(R)}$ soit de codimension au moins 2 et que $S_1'\cap \mathrm{Sing}^d(V)(R)=S_1\cap \mathrm{Sing}^d(V)(R)$. Par ailleurs, comme $\mathrm{Spec}_r R(C_i)\subset \mathrm{Spec}_r A_\Sigma$, $\tilde{S}$ et $\tilde{S}_1'$ coïncident sur $\mathrm{Spec}_r R(C_i)$: on en déduit que $\overline{(S\setminus S_1')}\cap C_i(R)$ est de codimension au moins 1 dans C_i (3.6.6) et donc au moins 2 dans V.

En multipliant les g_i' par une équation positive des composantes irréductibles de $\mathrm{Sing}^d(V)(R)$ contenues dans dS, on s'assure de la coïncidence avec $\emptyset$ de S et S_1 sur ces composantes.

Le lemme suivant va permettre de recoller les morceaux de dimensions différentes.

Lemme 3.10. *Soient S et S_1 deux ouverts de base de $V(R)$ et T une sous-variété fermée de V telle que $S=S_1\cup(T(R)\cap S(c_1,\dots,c_r))$ avec les c_i dans $R[V]$. On peut trouver des c_i' $(i=1,\dots,r)$ tels que:*

1) $S=S_1\cup(T(R)\cap S(c_1',\dots,c_r'))$
2) $S(c_1',\dots,c_r')\subset S$
3) *les c_i' ont tous les mêmes zéros réels et s'annulent sur dS.*

Démonstration. Soit g (resp. h) une équation positive de dS (resp. T); en remplaçant c_i par $gc_i\prod_j c_j^2$, on satisfait à la condition 3). Si $T=V$, il n'y a rien à faire. On peut donc supposer $T\subsetneq V$.

Sur $\hat{S}(c_1,\dots,c_r)\cap\complement S$ on a $gh=0 \Rightarrow c_i=0$ puisque:

1) si $g(x)=0$, $c_i(x)=0$ par choix de c_i
2) si $h(x)=0$ et si $c_i>0$, tous les c_i sont positifs et $x\in S$: contradiction.

Sur le fermé semi-algébrique $\hat{S}(c_1,\dots,c_r)\cap\complement S$ on a donc une inégalité de Łojasiewicz de la forme $|sgh|\geq|c_i|^l$, avec $sgh\geq 0$ sur $V(R)$ et $l\geq 1$ impair. Posons alors $c_i'=-shg+c_i^l$;

sur $\complement S$ l'un des c_i' est négatif ou nul et on a donc $S(c_1',\dots,c_r')\subset S$; sur $T(R)\cap S(c_1,\dots,c_r)$ tous les c_i' sont positifs (puisque $h=0$). On a donc finalement $T(R)\cap S(c_1,\dots,c_r)\subset S(c_1',\dots,c_r')\subset S$ et le lemme 3.10 est prouvé. Terminons maintenant la démonstration du théorème 3.1.

Fin de la démonstration de 3.1

Celle-ci va se faire par récurrence sur la dimension de la variété. Soit donc V une variété affine réelle de dimension d et S un ouvert de base de $V(R)$. Si $d=0$, on a évidemment $s(V)=1$.

Soit $d\geq 1$. D'après la proposition 3.9 on trouve $S_1=S(g_1,\dots,g_d)\subset S$ tel que $T=\overline{(S\setminus S_1)}^Z$ soit de codimension au moins 2. On a donc $S=S_1\cup(S\cap T(R))$ et l'hypothèse de récurrence appliquée à T nous permet de trouver $S_2=S(c_1,\dots,c_r)$ avec $r=(d-2)!!$, tel que $S\cap T(R)=S_2\cap T(R)$. A l'aide du lemme 3.10, on peut choisir les c_i ayant tous les mêmes zéros réels, nuls sur dS et tels que $S_2\subset S$. Soit h une équation positive de $T(R)$ et soit $F_j=\{x\in\hat{S}: c_j(x)\leq 0\}$. On a pour tout i,

$$\{x\in F_j : hg_i(x)=0\}\subset\{x\in F_j : c_j=0\}$$

car si $x\in S$ et $hg_i(x)=0$, alors $x\in S\cap T(R)=S_2\cap T(R)$, ce qui est impossible; donc $x\in dS$ et $c_j(x)=0$. On a donc sur F_j une inégalité de Łojasiewicz de la forme $|shg_i|\geq|c_j|^l$ avec l impair et $s>0$ sur $V(R)$ (inégalité stricte si $hg_i\neq 0$). Soit alors $g_{ij}=shg_i+c_j^l$, on a $S\subset S(g_{11},\dots,g_{dr})$ puisque pour x dans S on a

1) si $x\in S_1\setminus T(R)$ alors les g_i sont positifs et h est positif: les g_{ij} sont donc positifs.

2) si $x\in T(R)$, les c_j sont positifs et h est nul: les g_{ij} sont positifs.

Il est par ailleurs clair que $S(g_{11},\dots,g_{dr})\subset S$ puisque si $x\notin S$, un des g_i est négatif ou nul et un des c_j est négatif ou nul (S_1 et S_2 sont contenus dans S); un des g_{ij} est donc aussi négatif ou nul, d'où le résultat.

4. Anneaux de Witt réduits

Le but du paragraphe est le résultat suivant:

Théorème 4.1. *Il existe une fonction $w:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ayant la propriété suivante: pour tout corps réel clos R et toute R-variété affine V de dimension de Krull d, l'application $\Lambda: W(R[V])\to \mathrm{Cont}(V(R),\mathbf{Z})$ a un conoyau dont la torsion est bornée par $2^{w(d)}$.*

La démonstration de ce théorème consiste à reprendre celle de ([21], th. 3.2) qui montre que ce conoyau est de torsion, en utilisant les résultats des paragraphes 2 et 3 pour borner ce que l'on peut borner. Avant de passer à la démonstration proprement dite, on va donner quelques résultats préliminaires. On a la proposition suivante qui est une légère variante de la proposition 4.9 de [21], p. 203.

Proposition 4.2. *Soient A un anneau commutatif unitaire contenant $1/2$ et $\Sigma=\{1+\ p\ : p\in\mathbf{N}\}$. Soit $f\in\Sigma$ tel que $l'(f)=s$; alors pour tout A_f-espace quadratique libre q il existe un A-espace quadratique libre Q tel que Q et $2^s\cdot q$ soient isométriques sur A_Σ.*

Démonstration. Récurrence sur s.
* Pour $s=0$, f est inversible et il n'y a rien à dire.
* Soient $l'(f)=s+1$ et q une matrice symétrique régulière sur A_f, d'inverse q^{-1}; en multipliant par les carrés des dénominateurs des coefficients on obtient des matrices symétriques q_1 et q_2 définies sur A, régulières sur A_f, isométriques à q et q^{-1} sur A_f, telles que $q_1q_2=f^kI$ pour un certain entier $k\geqq 1$. Sachant que $l'(f^k)=l'(f)$ pour $k\geqq 1$ (lemme 2.2), on a une certaine relation $d\cdot q_1q_2=\left(1+\sum_{i=1}^{s+1}x_i^2\right)I$ dans un anneau de matrices carrées à coefficients dans A (d et les x_i sont des éléments de A).

Si on note φ la matrice

$$\begin{pmatrix} q_1 & x_{s+1}I \\ x_{s+1}I & dq_2 \end{pmatrix}$$

on a $\det\varphi=\det(d\cdot q_1q_2-x_{s+1}^2I)=\det\left(\left(1+\sum_{i=1}^{s}x_i^2\right)I\right)$. φ est donc une matrice à coefficients dans A, régulière sur $A_{f'}$ avec $f'=1+\sum_{i=1}^{s}x_i^2$: par hypothèse de récurrence on peut trouver un A-espace quadratique libre Q isométrique à $2^s\cdot\varphi$ sur A_Σ. En faisant opérer la A_f-isométrie

$$\sigma=\begin{pmatrix} I & -x_{s+1}I \\ 0 & q_1 \end{pmatrix}$$

sur φ, on obtient $\sigma^*\varphi\sigma=q_1\perp\left\langle 1+\sum_1^s x_i^2\right\rangle\cdot q_1$. En utilisant les matrices carrées Λ_s de dimension $2^s\times 2^s$ telles que $\Lambda_s^*\Lambda_s=\left(1+\sum_1^s x_i^2\right)I$ [21], on obtient sur A_Σ

$\Lambda_s^*(2^s\langle 1\rangle)\Lambda_s=2^s\left\langle 1+\sum_{i=1}^{s}x_i^2\right\rangle$, c'est-à-dire $2^s\langle 1\rangle\simeq 2^s\left\langle 1+\sum_{i=1}^{s}x_i^2\right\rangle$ sur A_Σ et donc aussi $2^s\left\langle 1+\sum_1^s x_i^2\right\rangle\cdot q_1\simeq 2^s\cdot q_1$ sur A_Σ, et finalement $2^{s+1}\cdot q_1\simeq 2^s\cdot\varphi\simeq Q$ sur A_Σ.

Corollaire 4.3. *Soient V une R-variété affine de dimension d et $f\in A=R[V]$ consistant ne s'annulant pas sur $V(R)$. Alors pour tout A_f-espace quadratique libre q, il existe un A-espace quadratique libre Q tel que $\hat{Q}=2^{p'(d)}\cdot\hat{q}$ avec $p'(d)=d-2+2^d$ (en identifiant* $\mathrm{Spec}_r A$ *et* $\mathrm{Spec}_r A_f$*).*

Il suffit de se rappeler que tout f consistant jamais nul sur $V(R)$ est tel que $l'(f)\leqq p'(A)\leqq p'(d)=d-2+2^d$ (corollaire 2.5).

Le deuxième résultat utilisé est le suivant:

Lemme 4.4 ([21] lemme 4.11, remarque 4.12, p. 205). *Soient $f_1,\dots,f_k$ dans A strictement positifs sur* $\mathrm{Spec}_r A$ *et $f=\prod_{i=1}^k f_i$. Soit $B=A_f[X_1,\dots,X_k]/(X_i^4-f_i)$. Si q est un B-espace quadratique libre de signature constante sur les fibres de* $\mathrm{Spec}_r u:\mathrm{Spec}_r B\to\mathrm{Spec}_r A_f$, *on peut construire un A_f-espace quadratique libre q_1 tel que $\hat{q}_1\circ\mathrm{Spec}_r u=2^k\hat{q}$.*

Proposition 4.5 (Théorème de séparation quantitatif). *Soit V une R-variété affine de dimension réelle d (cf. 1.8) et soient F_1, F_2 deux ouverts-fermés complémentaires de $V(R)$ (pour la topologie euclidienne). Soit $A=R[V]$; on peut trouver des $f_1,\dots,f_k$ dans A et un élément φ consistant dans $B=A_f[X_1,\dots,X_k]/(X_i^4-f_i)$, tels que*

1°) $f_i(\mathrm{Spec}_r A)>0$ *pour tout i*
2°) $k=s(d)\cdot t(d)$
3°) $\varphi(\hat{F}_1)>0$ *et* $\varphi(\hat{F}_2)<0$

($\hat{F}_1$ et $\hat{F}_2$ sont les constructibles de $\mathrm{Spec}_r B$ *correspondant à F_1 et F_2 et $f=\prod_1^k f_i^2$).*

Démonstration. On s'inspire assez fortement de la démonstration usuelle qu'on peut lire par exemple dans [1] (2.7.2).

Puisque F_1 est ouvert dans $V(R)$ de dimension réelle d, les théorèmes 3.1 et 3.2 nous permettent d'écrire $F_1=\bigcup_{i=1}^{t(d)}\left(\bigcup_{j=1}^{s(d)}\{x\in V(R):\ P_{ij}(x)>0\}\right)$, avec $P_{ij}\in R[V]$.

Notons $s=s(d)$, $t=t(d)$, $S_i=\bigcap_{j=1}^{s}\{x\in V(R):\ P_{ij}(x)>0\}$. Posons $h_{ij}=|P_{ij}|+P_{ij}$, $h_i=\prod_{j=1}^{s}h_{ij}$ et $h=\sum_{i=1}^{t}h_i$. Les h_i et h sont des fonctions semi-algébriques continues non négatives vérifiant:

$$S_i=\{x\in V(R):h_i(x)>0\},$$
$$F_1=\{x\in V(R):h(x)>0\},$$
$$F_2=\{x\in V(R):h(x)=0\}.$$

L'inégalité de Łojasiewicz, appliquée à h sur le fermé F_1, permet de la minorer sur F_1 par une fonction $\varepsilon(x)=1/c(1+\|x\|^2)^p$ avec $c>1$, $p\in N$ et $\|x\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$ (cf. 1.9) (n est tel que $V(R)\subset R^n$).

Soit g une fonction semi-algébrique strictement positive, inférieure à 1. On note $\psi = \sum_{i=1}^{t} \prod_{j=1}^{s} (\sqrt{P_{ij}^2+g^2} + P_{ij})$ (la racine carrée désigne ici la racine positive). On a bien sûr $\psi > h$ et donc $\psi(x) > \varepsilon(x) > 0$ sur F_1. D'autre part on a aussi $\sqrt{P_{ij}^2+g^2} + P_{ij} \leqq |P_{ij}| + P_{ij} + g$ et donc $\psi \leqq \sum_{i=1}^{t} \prod_{j=1}^{s} (h_{ij}+g)$.

Pour i fixé, étudions la fonction $\prod_{j=1}^{s} (h_{ij}+g)$. On peut l'écrire $\prod_{j=1}^{s} (h_{ij}+g) = \left(\prod_{j=1}^{s} h_{ij}\right) + gl_{i1} + g^2 l_{i2} + \ldots + g^s$. Les l_{ij} étant des fonctions semi-algébriques continues sur R^n peuvent être majorées par une fonction $c_1(1+\|x\|^2)^k$, $c_1 > 1$ et $k \geqq 1$ pouvant être choisis communs à toutes les fonctions $l_{ij}(1 \leqq i \leqq t$, $1 \leqq j \leqq s)$ (cf. 1.9).

Comme sur F_2 on a $h_i = \prod_{j=1}^{s} h_{ij} = 0$ et que g a été choisie inférieure à 1, on a $g^i \leqq g$ pour tout $i \geqq 1$ et $0 \leqq \prod_{j=1}^{s} (h_{ij}+g) \leqq sgc_1(1+\|x\|^2)^k$ sur F_2. On peut donc majorer ψ sur F_2 par $tsgc_1(1+\|x\|^2)^k$. Prenons $g(x) = \varepsilon(x)/4tsc_1(1+\|x\|^2)^k$; g est inférieur à 1 puisque ε l'est. On a alors $\psi(x) > \varepsilon(x)$ sur F_1 et $\psi(x) \leqq \frac{\varepsilon(x)}{4}$ sur F_2 et donc

1°) sur F_1, $(2\psi(x)/\varepsilon(x)) - 1 > 1$,
2°) sur F_2, $(2\psi(x)/\varepsilon(x)) - 1 \leqq -1/2$.

Posons $\varphi = (2\psi/\varepsilon - 1)/g^s = (2\psi/g^s)/\varepsilon - (4tscc_1(1+\|x\|^2)^{p+k})^s$. La fonction φ est strictement positive sur F_1, strictement négative sur F_2 et s'écrit explicitement

$$\varphi = 2/\varepsilon \sum_{i=1}^{t} \left[\prod_{j=1}^{s} (\sqrt{1+P_{ij}^2/g^2} + P_{ij}/g) \right] - (4tscc_1(1+\|x\|^2)^{k+p})^s,$$

$$\varphi = 2c(1+\|x\|^2)^p \sum_{i=1}^{t} \left[\prod_{j=1}^{s} (\sqrt{1+(4tscc_1(1+\|x\|^2)^{k+p}P_{ij})^2} + 4tscc_1(1+\|x\|^2)^{k+p}P_{ij}) \right] - (4tscc_1(1+\|x\|^2)^{k+p})^s.$$

Il suffit maintenant de poser $f_{ij} = 1 + (4tscc_1(1+\|x\|^2)^{k+p}P_{ij})^2$ et de construire l'anneau $B = A_f[Y_{ij}]/(Y_{ij}^4 - f_{ij})$. L'élément

$$\varphi = 2c(1+\|x\|^2)^p \sum_{i=1}^{t} \left[\prod_{j=1}^{s} (y_{ij}^2 + 4tscc_1(1+\|x\|^2)^{k+p}P_{ij} \right] - (4tscc_1(1+\|x\|^2)^{k+p})^s$$

de B va remplir les conditions voulues. D'après le lemme 2.9, on peut toujours supposer que φ est consistant dans B.

Passons maintenant à la démonstration de 4.1.

Démonstration de 4.1. Soit V une R-variété affine de dimension de Krull d et de dimension réelle $d' \leqq d$. Soit $A = R[V]$. Toute fonction continue entière sur $\widetilde{V(R)} = \mathrm{Spec}_r R[V]$ est combinaison linéaire entière de fonctions caractéristiques

$\chi_{\tilde C_i}$ où les $\tilde C_i$ sont les composantes connexes de $\widetilde{V(R)}$. Il suffit donc de savoir traiter le cas de telles fonctions.

Soient donc $\tilde C$ une composante connexe et $\tilde D$ son complémentaire. La proposition 4.5 donne un élément φ dans une extension $B = A_f[X_i]/(X_i^4 - f_i)$ tel que φ soit positif sur $\hat C$ et négatif sur $\hat D$ ($\hat C$ et $\hat D$ sont les constructibles de $\mathrm{Spec}_r B$ correspondant respectivement à C et D). Sur B_φ, $\langle \varphi \rangle$ est une forme quadratique libre de rang 1 de signature $+1$ sur $\hat C$, -1 sur $\hat D$ et $\hat\tau = 1 + \langle \hat\varphi \rangle = 2\chi_{\hat C}$. Puisque φ est consistant et ne s'annule pas sur $\mathrm{Spec}_r B$, et que B est une R-algèbre de type fini de dimension de Krull d, on a $l'(\varphi) \leqq p'(d)$, et d'après le corollaire 4.3, il existe un B-espace quadratique libre Q tel que $\hat Q = 2^{p'(d)+1}\chi_{\hat C}$, avec $p'(d) = d - 2 + 2^d$. En particulier $\hat Q$ est donc constante sur les fibres de $\mathrm{Spec}_r u : \mathrm{Spec}_r B \to \mathrm{Spec}_r A_f$ puisqu'elle ne dépend que de x dans $\widetilde{V(R)}$. D'après 4.4 on trouve un A_f-espace quadratique libre Q_1 tel que $\hat Q_1 \circ \mathrm{Spec}_r u = 2^{s(d')t(d')}\hat Q = 2^{s(d')t(d')+p'(d)+1}\chi_{\hat C}$.

Mais $f = f_1 f_2 \cdots f_{s(d')t(d')}$ est un produit de termes de la forme $1 + x^2$ dans A (cf. 4.5 la définition des f_{ij}), que d'après le lemme 2.9 on peut supposer consistants. Le corollaire 2.11 dit alors que $l'(f) \leqq 2d - 1$, et une nouvelle application de 4.2 donne un A-espace quadratique libre Q_2 tel que $\hat Q_2 = 2^{2d-1}\hat Q_1$ (en identifiant $\mathrm{Spec}_r A$ et $\mathrm{Spec}_r A_f$).

Finalement, en posant $w(d,d') = s(d')t(d') + p'(d) + 2d = s(d')t(d') + 3d - 2 + 2^d$, on a $\mathbf{Z} \cdot 1 + 2^{w(d,d')}\mathrm{Cont}(V(R), \mathbf{Z}) \subset A(W(R[V]))$.

Comme $d' \leqq d$, on peut toujours borner $w(d,d')$ par $w(d) = w(d,d)$.

Remarque 4.6. Si $d = 1$, on trouve $w(d) = 4$, ce qui est nettement moins bon que le résultat de [15, 17] qui donne $\mathbf{Z} \cdot 1 + 2 \cdot \mathrm{Cont}(V(R), \mathbf{Z}) \subset A(W(R[V]))$.

Si $d = 2$ on trouve $w(d) = 14$.

Remarque 4.7. Soit V une variété affine de dimension d sur le corps des nombres réels $\mathbf{R}$ telle que $V(\mathbf{R})$ soit compact, et soit C une composante connexe. A l'aide du théorème de Stone-Weierstrass, on peut trouver un polynôme $f \in \mathbf{R}[V]$, positif sur C et négatif ailleurs. La 2-forme de Pfister $\langle 1, f \rangle$ sur A_f a donc pour signature $2\chi_C$. Comme f ne s'annule pas sur $\mathrm{Spec}_r A$, on a $l'(f) \leqq d - 2 + 2^d$ (cf. 2.5 et 2.8). Par simple application du corollaire 4.3, on peut définir une fonction $w_c : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ par $w_c(d) = d - 1 + 2^d$ telle que $2^{w_c(d)} \cdot \mathbf{Z}^s \subset A(W(\mathbf{R}[V]))$ (s est le nombre de composantes connexes) pour toute $\mathbf{R}$-variété affine de dimension d telle que $V(\mathbf{R})$ soit compact.

Pour les surfaces compactes ceci donne $32 \cdot \mathbf{Z}^s \subset A(W(\mathbf{R}[V]))$ (la borne correspondante donnée par Colliot-Thélène et Sansuc [10] pour les $\mathbf{R}$-surfaces complètes et lisses, et qui s'étend aussi aux $\mathbf{R}$-surfaces affines lisses avec $V(\mathbf{R})$ compact, est 8, et leurs méthodes suggèrent fortement que dans le cas d'une $\mathbf{R}$-variété affine lisse V de dimension d, avec $V(\mathbf{R})$ compact, on devrait pouvoir obtenir $w_c(d) = d + 1$).

Remarque 4.8. Les «fan theorems» de L. Bröcker ([13], second fan th., third fan th., p. 259) permettent d'affirmer qu'il n'est pas possible de trouver une borne de la torsion du conoyau de la signature globale strictement inférieure à 2^d, valable pour toutes les variétés de dimension d, mais les exemples où l'on peut assurer que cette torsion est au moins 2^d sont non compacts.

Remerciements. L'auteur tient à exprimer sa gratitude à J.-L. Colliot-Thélène pour les innombrables remarques, suggestions et corrections qu'il a pu faire au cours des différentes phases de ce travail.

Bibliographie

1. Bochnak, J., Coste, M., Coste-Roy, M.-F.: Géométrie algébrique réelle. (à paraître)
2. Bröcker, L.: Zur Theorie der quadratischen Formen über formal reellen Körpern. Math. Ann. **210**, 233–256 (1974)
3. Bröcker, L.: Real spectra and distribution of signatures. In: Geométrie algébrique réelle et formes quadratiques. Lect Notes Math. **959**, 249–272 (1982)
4. Bröcker, L.: Minimale Erzeugung von Positivbereichen. Geom. Dedicata, 16 (3), 335–350 (1984)
5. Bröcker, L.: Spaces of orderings and semialgebraic sets. Can. Math. Soc., Conf. Proc. **4**, 231–248 (1984)
6. Choi, M.D., Dai, Z.D., Lam, T.Y., Reznick, B.: The Pythagoras number of some affine algebras and local algebras. J. Reine Angew. Math. **336**, 45–82 (1982)
7. Choi, M.D., Lam, T.Y., Reznick, B., Rosenberg, A.: Sums of squares in some integral domains. J. Alg. **65**, 234–256 (1980)
8. Choi, M.D., Knebusch, M., Lam, T.Y., Reznick, B.: Transversal zeros and positive semidefinite forms. In: Géométrie Algébrique Réelle et Formes quadratiques. Lect. Notes Math. **959**, 273–298 (1982)
9. Colliot-Thélène, J.-L.: Variantes du Nullstellensatz réel et anneaux formellement réels. In: Géométrie Algébrique Réelle et Formes Quadratiques. Lect. Notes Math. **959**, 98–108 (1982)
10. Colliot-Thélène, J.-L., Sansuc, J.-J.: Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles. Math. Ann. **244**, 105–134 (1979)
11. Coste, M.: Ensembles semi-algébriques. In: Géométrie Algébrique Réelle et Formes Quadratiques. Lect. Notes Math. **959**, 109–138 (1982)
12. Coste, M., Coste-Roy, M.-F.: Le spectre réel et la topologie des variétés algébriques sur un corps réel clos, in «Séminaire sur la géométrie algébrique réelle». Publ. Math. Univ. Paris VII. pp. 103–117 (1981)
13. Coste, M., Coste-Roy, M.-F.: La topologie du spectre réel. In: Ordered Fields and Real Algebraic Geometry. Contemp. Math. **8**, 27–60 (1981)
14. Dai, Z.D., Lam, T.Y.: Levels in algebra and topology. Comment. Math. Helv. **59**, 376–424 (1984)
15. Dietel, G.: Wittringe singulärer reeller Kurven I et II. Comm. in Alg. **11** (21), 2393–2494 (1983)
16. Knebusch, M.: Symmetric bilinear forms over algebraic varieties. In: Conference on Quadratic Forms. Queen's papers Pure Appl. Math. **46**, 103–283 (1977)
17. Knebusch, M.: On algebraic curves over real closed fields I. Math. Z. **150**, 49–70 (1976)
18. Knebusch, M.: On the local theory of signatures and reduced quadratic forms. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb., pp. 149–195 (1981)
19. Lam, T.Y.: The algebraic theory of quadratic forms. Reading: Benjamin 1973
20. Lang, S.: On quasi-algebraic closure. Ann. Math. **55**, 373–390 (1952)
21. Mahé, L.: Signatures et composantes connexes. Math. Ann. **260**, 191–210 (1982)
22. Mahé, L.: Sommes de carrés et anneaux de Witt réduits. C.R. Acad. Sc. Paris 300 (I) n°1, 5–7 (1985)
23. Marshall, M.: The Witt ring of a space of orderings. Trans. Am. Math. Soc. **258**, 505–521 (1980)
24. Pfister, A.: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. Invent. Math. **4**, 229–237 (1967)
25. Pfister, A.: Multiplikative quadratische Formen. Arch. Math. **16**, 363–370 (1965)
26. Scharlau, W.: Quadratic forms. Queen's papers Pure Appl. Math. **22**, Kingston, Ontario 1969

Oblatum 30-VI-1985

Invent. math. 85, 73–117 (1986)

Inventiones mathematicae
© Springer-Verlag 1986

On the congruence subgroup problem, II

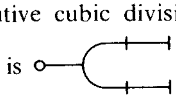
M.S. Raghunathan

Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Bombay 400005, India

This is a sequel to my earlier paper of the same title (Raghunathan, 1976). Most of the results here are announced there in somewhat vague terms.

Let k be a global field and V its set of valuations. For $v \in V$, let k_v denote the completion of k at v and for non-archimedean v, $\mathfrak{O}_v$ the ring of integers in k_v. We fix once for all a non-empty finite subset S of V containing the set ∞ of all archimedean valuations. We denote by A the ring of S-integers in k. Let G be a connected simply connected absolutely almost simple k-algebraic group and $G(k)$ the group of k-rational point of G. A subgroup $\Gamma \subset G(k)$ is an S-arithmetic subgroup if for some (and therefore any) faithful k-representation ρ: $G \to \mathrm{GL}(n_\rho)$, $\Gamma \cap \rho^{-1}\mathrm{GL}(n_\rho, A)$ has finite index in both Γ and $\rho^{-1}(\mathrm{GL}(n_\rho, A))$. An S-arithmetic group is an S-congruence group if for some (therefore any) faithful k-representation ρ of G, Γ contains a subgroup of the form $G(\rho, \mathfrak{a}) = \{x \in G(k) \mid \rho(x) \in \mathrm{GL}(n_\rho, A),\ \rho(x) \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}\}$ where $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\rho)$ is a non-zero ideal in A.

Now the family of S-arithmetic (resp. S-congruence) groups form a fundamental system of neighbourhoods of the identity for the structure of a topological group, whose completion we denote $\hat{G}(a)$ (resp. $\hat{G}(c)$). Then $\hat{G}(a)$ and $\hat{G}(c)$ are locally compact groups and there is a natural map π: $\hat{G}(a) \to \hat{G}(c)$ induced by the identity map of $G(k)$. It is not difficult to see that π is surjective. The group $\hat{G}(a)$ is naturally isomorphic to the S-adéle group of G (this is a consequence of the fact the $G(k)$ is dense in the S-adéle group of G: Platonov (1970) for number fields and Prasad (1977) for all fields. The congruence subgroup problem (for (G, S)) is the determination $C(S, G) = \operatorname{kernel} \pi$. That is the main aim of this paper.

To formulate our results in precise form, we need to introduce the (normal) subgroup $G(k)^+$ of $G(k)$ generated by unipotent elements contained in unipotent radicals of k-parabolic subgroups. For a wide class of groups, it is known that $G(k) = G(k)^+$. (At the date of this writing in fact, it is known that $G(k)/G(k)^+$ is always *finite abelian* and in fact trivial except possibly in the case when G is a k-form of E_6 of k-rank 1 with anisotropic kernel a special unitary group in 2 variables over a involutive cubic division algebra of the second kind; the Tits index of such a group is . We then have