Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Une démonstration élémentaire du théorème de Bröcker-Scheiderer

Louis Mahé

Résumé — Bröcker et Scheiderer ont indépendamment démontré que toute condition de signe de la forme $f_1(x)>0, \ldots, f_n(x)>0$ sur une variété affine réelle de dimension $d<n$ peut être réduite à au plus d inégalités $g_1(x)>0, \ldots, g_d(x)>0$. On donne ici une autre démonstration de ce théorème, n'utilisant que la théorie des formes de Pfister et plus constructive si on se contente d'une réduction générique.

An elementary proof of Bröcker-Scheiderer's theorem

Abstract — *Bröcker and Scheiderer independently proved that every sign condition of the form* $f_1(x)>0, \ldots, f_n(x)>0$ *on an affine real variety of dimension* d, *can be reduced to* d *inequalities* $g_1(x)>0, \ldots, g_d(x)>0$. *Here is given a new proof of this Theorem, using only Pfister forms theory and more effective in the case of a generic reduction.*

1. Introduction. — Soit V une variété affine définie sur un corps réel clos R et soit V(R) l'ensemble de ses points R-rationnels. On appellera *semi-algébrique de base* de V(R) tout sous-ensemble S de V(R) de la forme

$$S=S(f_1, \ldots, f_n)=\{x\in V(R): f_1(x)>0, \ldots, f_n(x)>0\}$$

où les f_i sont des fonctions polynomiales définies sur V. Bröcker ([3], [4]) et Scheiderer [10] ont démontré que si $d=\dim(V)$, S peut s'écrire $S=S(g_1, \ldots, g_d)$ avec des g_i polynomiaux sur V.

Ce théorème très important n'a pour le moment aucune preuve « effective » et sa démonstration fait usage de la théorie des espaces des ordres de Marshall [8] et de celle des « éventails » (fans) de Becker-Bröcker [2].

Dans cette Note, nous indiquons (section 3) comment, dans le cas de R^d, et à un sous-ensemble de codimension strictement positive près, nous pouvons faire cette réduction de manière constructive, c'est-à-dire obtenir les $g_1, \ldots, g_d$ en résolvant un système d'équations complexes donné par les f_i. Ce résultat servira de motivation et de modèle à une démonstration complètement élémentaire du théorème de Bröcker-Scheiderer (section 4), obtenue en jouant simplement avec les formes de Pfister et en étendant des théorèmes qui leur sont associés.

2. Notations et résultats préliminaires. — Dans tout l'article, V désignera une variété affine de dimension d définie sur un corps réel clos R, non nécessairement irréductible, mais qu'on pourra toujours supposer réduite. On notera $K=R(V)$ l'anneau total des fonctions rationnelles sur V, produit fini des corps $R(V_i)$ où les V_i sont les composantes irréductibles de V. Les corps $R(V_i)$ sont de degré de transcendance au plus d sur R.

Une *r-forme de Pfister* φ sur K est une forme quadratique non-dégénérée sur K, de la forme $\varphi=\langle 1, f_1\rangle\otimes\ldots\otimes\langle 1, f_r\rangle$, notée $\langle\langle f_1, \ldots, f_r\rangle\rangle$, où les f_i sont des inversibles de K. On notera φ' la *sous-forme pure* de φ, c'est-à-dire la forme telle que $\varphi=\langle 1\rangle+\varphi'$.

Une forme quadratique φ à coefficients dans K est dite *anisotrope* si pour tout x, $\varphi(x)=0\Rightarrow x=0$.

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

0249-6291/89/03090613 \$ 2.00 © Académie des Sciences

Un élément $\alpha \in K$ est *représenté* par φ sur K s'il existe un vecteur u à composantes dans K tel que $\alpha = \varphi(u)$.

On note $\varphi \simeq \psi$ lorsque les deux formes quadratiques φ et ψ sont isométriques sur K.

Si $\langle\langle f_1, \ldots, f_r \rangle\rangle \simeq \langle\langle g_1, \ldots, g_r \rangle\rangle$, alors $S(f_1, \ldots, f_r)$ et $S(g_1, \ldots, g_r)$ ne diffèrent que d'un ensemble de codimension strictement positive ([6], paragraphe 3.6).

Le lemme suivant est une version explicite de la proposition 1.5 de [5], chapitre 10.

LEMME 2.1. — *Soient pour* $1 \leqq i \leqq r$, $\varphi_i = \langle\langle f_1, \ldots, f_i \rangle\rangle$, α'_i *et* α_i *des inversibles de* K *représentés respectivement par* φ'_i *et* φ_i, *satisfaisant pour* $i \geqq 2$, $\alpha'_i = \alpha'_{i-1} + f_i \alpha_{i-1}$. *Alors* $\varphi_r \simeq \psi$ *où* $\psi = \langle\langle \alpha'_1 \alpha_1 f_2, \alpha'_2 \alpha_2 f_3, \ldots, \alpha'_{r-1} \alpha_{r-1} f_r, \alpha'_r \rangle\rangle$.

On dira que α est *faiblement représenté* par la forme q sur K s'il existe un entier n et n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ tels que $\alpha = q(u_1) + \ldots + q(u_n)$. On notera dans ce cas $\alpha = n \times q(u)$. Si q est la forme $\sum_i a_i x_i^2$, ceci est équivalent à $\alpha = \sum_i a_i \beta_i$ où les β_i sont des sommes de carrés.

Si une forme q sur K est définie en un point $x \in V(R)$, on dispose de la signature de q en x, notée $\hat{q}(x)$.

3. RÉDUCTION GÉNÉRIQUE. — Soient V une variété affine irréductible de dimension d, $n = d+1$ et $f_1, \ldots, f_n$ des éléments non nuls de l'anneau des fonctions polynomiales R [V]. On va construire $g_1, \ldots, g_d$ dans R [V] tels que $S(f_1, \ldots, f_n)$ et $S(g_1, \ldots, g_d)$ coïncident à un ensemble de codimension positive près. Compte tenu du lemme 2.1, il suffit de montrer le résultat suivant (*voir* aussi [6], théorème 3.3).

PROPOSITION 3.1. — *Soient* K *un corps de degré de transcendance d sur* R *et* $f_1, \ldots, f_{d+1}$ *des éléments non nuls de* K. *Si on note* φ *la forme* $\langle\langle f_1, \ldots, f_{d+1} \rangle\rangle$, *et si* φ *est anisotrope sur* K, φ' *représente* 1 *sur* K.

Démonstration. — Le théorème de Tsen-Lang [11] montre qu'on peut trouver sur K (i) une solution unimodulaire u à composantes polynomiales à l'équation $\varphi(u) = 0$. Notant R u et I u les parties réelle et imaginaire de u, on obtient sur K $\varphi(R u) = \varphi(I u)$ ($\neq 0$ car φ est anisotrope sur K) et $\langle R u, I u \rangle_\varphi = 0$ où $\langle\ ,\ \rangle_\varphi$ désigne la forme bilinéaire associée à φ. Utilisant la multiplicativité des formes de Pfister sur les corps ([9], section 2, Satz 1), on trouve z à coefficients dans K tel que $\varphi(z) = \varphi(R u)\, \varphi(I u) = \varphi(R u)^2$ et tel que la première composante z_1 de z soit précisément $\langle R u, I u \rangle_\varphi = 0$. $\varphi(z)$ est donc de la forme $\varphi'(z')$ et en posant $t = z'/\varphi(R u)$, on obtient $1 = \varphi'(t)$ sur K.

Le lemme 2.1 donne alors explicitement $g_1, \ldots, g_d$ dans K tels que $\varphi \simeq 2 \times \langle\langle g_1, \ldots, g_d \rangle\rangle$. On en déduit donc que $S(f_1, \ldots, f_n)$ et $S(g_1, \ldots, g_d)$ ne diffèrent que d'un ensemble de codimension strictement positive.

Remarque 3.2. — Si on prend $V = R^d$, trouver u se ramène à résoudre un système homogène sur $C = R(\sqrt{-1})$ dont les coefficients sont donnés par ceux des f_i. De plus, la démonstration du théorème de Tsen-Lang permettant de borner le degré des polynômes composantes du vecteur u en fonction des degrés des coefficients de φ et de la dimension de V, les degrés des g_i seront bornés par une fonction de d, n et des degrés des f_j.

4. RÉDUCTION STRICTE. — Le résultat clef du paragraphe précédent est la proposition 3.1. La notion de base à introduire dans ce paragraphe est celle d'*anneaux de fonctions régulières*, qui va jouer un rôle semblable à celui joué par les *espaces des ordres* et les anneaux semi-locaux dans les démonstrations de Bröcker et Scheiderer.

DÉFINITION 4.1. — *Un anneau de fonctions régulières* A est un anneau dans lequel tout idéal maximal est réel, ou de manière équivalente, les éléments de la forme $1+\Sigma x_i^2$ sont inversibles. Cette classe d'anneaux contient en particulier les corps formellement réels.

Si R [Z] est l'anneau des coordonnées d'une variété affine Z définie sur R et si T est une partie de Z(R), on pose $\Sigma_T=\{f\in R[Z] \mid \forall x\in T\ f(x)>0\}$ et on note $\mathscr{R}(Z, T)$ l'anneau $R[Z]_{\Sigma_T}$: l'anneau des fonctions régulières sur T (nul si $T=\varnothing$).

Le théorème central est le suivant :

THÉORÈME 4.2. — *Soient* Z *une variété affine de dimension* d *sur* R, T *une partie non vide de* Z(R), $f_1, \ldots, f_{d+1}\in\mathscr{R}(Z, T)$, *avec* $f_i>0$ *sur* T *pour tout* i, *et* $\varphi=\langle\langle f_1, \ldots, f_{d+1}\rangle\rangle$. *Alors* 1 *est faiblement représenté par* φ' *sur* $\mathscr{R}(Z, T)$.

Démonstration. — On fait une récurrence sur d.

Si $d=0$, $\mathscr{R}(Z, T)$ est un produit de copies de R : si f_1 est positif dans cet anneau, c'est un carré inversible et on a $1=f_1 x^2$ pour un $x\in\mathscr{R}(Z, T)$.

Soient $d>0$ et $\varphi_i=\langle\langle f_1, \ldots, f_i\rangle\rangle$, pour $i\leqq d+1$. L'anneau total des fractions de $\mathscr{R}(Z, T)$ est un produit fini de corps formellement réels de degré de transcendance $\leqq d$ pour lesquels la proposition 3.1 s'applique : on a $1=\varphi'_{d+1}(u)$ dans cet anneau. Chassant les dénominateurs, on trouve $g\in\mathscr{R}(Z, T)$ non diviseur de zéro tel que $g^2=\varphi'_{d+1}(v)$ dans $\mathscr{R}(Z, T)$. Si g ne s'annule pas sur T, il est inversible dans $\mathscr{R}(Z, T)$ et on a fini. Sinon on a $\mathscr{R}(Z, T)/g=\mathscr{R}(Z_g, T_g)$ [où le symbole $(\ )_g$ signifie que l'on a l'équation additionnelle $g=0$], et Z_g est de dimension strictement inférieure à d.

Les f_i étant positifs sur T_g, l'hypothèse de récurrence dit alors que $1=n\times\varphi'_d(\bar{w})$ dans $\mathscr{R}(Z, T)/g$ pour un certain entier n et un certain vecteur $\bar{w}$, c'est-à-dire que $\lambda g=1-n\times\varphi'_d(w)$ dans $\mathscr{R}(Z, T)$ pour un certain λ. On en déduit que :

$$\lambda^2 g^2=(1-n\times\varphi'_d(w))^2=(1+n\times\varphi'_d(w))^2-4(n\times\varphi'_d(w))=\varphi'_{d+1}(\lambda v)$$

dans $\mathscr{R}(Z, T)$. Comme $1+n\times\varphi'_d(w)$ est positif sur T et donc inversible dans $\mathscr{R}(Z, T)$, on obtient $1=n\times\varphi'_d(w_1)+\varphi'_{d+1}(v_1)=(n+1)\times\varphi'_{d+1}(x)$.

Remarque 4.3. — Le théorème précédent est aussi valable pour des anneaux de fonctions régulières quelconques de degré de transcendance $\leqq d$.

L'autre point important est que les anneaux de fonctions régulières satisfont un théorème de *tranversalité faible.* Soit $q=q_1+q_2$ une décomposition orthogonale de la forme quadratique q sur un anneau A. On dira que $\alpha\in A$ est représenté (resp. faiblement) par q sur A de manière transverse à la décomposition de q, si $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ avec α_i inversible représenté (resp. faiblement) par q_i.

PROPOSITION 4.4. — *Soient* α *inversible dans* $\mathscr{R}(Z, T)$ *et* $q=\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ *avec* $a_i\in\mathscr{R}(Z, T)$ *positifs sur* T. *Si* α *est faiblement représenté par* q *sur* $\mathscr{R}(Z, T)$, *il l'est de manière transverse à toute décomposition de* q.

Démonstration. — On montre qu'on peut écrire $1=a^2+(a_i/a_j)b^2$ avec a, b inversibles dans $\mathscr{R}(Z, T)$. On modifie alors l'écriture des termes $a_i\alpha^2+a_j\beta^2$ en les multipliant par cette identité. Pour un i fixé, la somme des termes ainsi obtenus en faisant varier j ne peut avoir de zéro sur T. On a donc faiblement représenté $m\alpha$ de manière transverse à la décomposition $\sum_i \langle a_i\rangle$, pour un certain entier m. Les a_i étant positifs sur T, on en déduit une représentation faible de $m\alpha$ transverse à toute décomposition obtenue par regroupement des $\langle a_i\rangle$; il suffit alors de diviser par $\sqrt{m}$.

Le lemme suivant est une traduction, dans le contexte de la représentation faible, du lemme 2.1, et sa preuve en est obtenue en imitant celle de ce dernier.

LEMME 4.5. — *Soient pour* $1 \leqq i \leqq r$, $f_i \in \mathrm{R}[\mathrm{V}]$, $\varphi_i = \langle\langle f_1, \ldots, f_i \rangle\rangle$, α'_i *et* α_i *dans* R [V] *représentés faiblement respectivement par* φ'_i *et* φ_i *sur* R [V], *satisfaisant pour* $i \geqq 2$, $\alpha'_i = \alpha'_{i-1} + f_i \alpha_{i-1}$. *Alors* $\hat{\varphi}_r = \hat{\psi}$ *où*

$$\psi = \langle\langle \alpha'_1 \alpha_1 f_2, \alpha'_2 \alpha_2 f_3, \ldots, \alpha'_{r-1} \alpha_{r-1} f_r, \alpha'_r \rangle\rangle$$

là où les signatures des deux formes sont définies.

THÉORÈME 4.6. — *Soient* V *une variété affine de dimension d sur* R *et* $f_1, \ldots, f_n$ *dans* R [V]. *Alors il existe* $g_1, \ldots, g_d$ *dans* R [V] *telles que* $\mathrm{S}(f_1, \ldots, f_n) = \mathrm{S}(g_1, \ldots, g_d)$.

Démonstration. — Notons $\varphi = \langle\langle f_1, \ldots, f_n \rangle\rangle$ et φ' sa sous-forme pure. Quitte à itérer le processus on peut supposer $n = d+1$. Soit $\mathrm{S} = \mathrm{S}(f_1, \ldots, f_n)$; si $\mathrm{S} = \varnothing$ il n'y a rien à faire; sinon le théorème 4.2 et la proposition 4.4 permettent de représenter faiblement par φ', de manière transverse à toute décomposition de φ', l'élément 1 sur $\mathscr{R}(\mathrm{V}, \mathrm{S})$. Chassant les dénominateurs, le lemme 4.5 donne alors une d-forme ψ_1 telle que $\psi = \langle\langle g^2 \rangle\rangle \psi_1$ et $\psi_1 = \langle\langle g'_1, \ldots, g'_d \rangle\rangle$ avec g et les g'_i dans R [V] sans zéro sur S, et telle que $\hat{\varphi} = \hat{\psi} = 2\hat{\psi}_1$ là où ces signatures sont définies. En posant $g_i = g'_i g^2$ pour tout i, on a toujours $\mathrm{S} \subseteqq \mathrm{S}(g_1, \ldots, g_d)$ car les g_i sont positifs sur S. De plus, soit $x \in \mathrm{S}(g_1, \ldots, g_d)$; aucun des $g_i(x)$ n'étant nul, il en est de même pour les f_j, car $\prod_j f_j$ divise par construction $\prod_i g_i$; les signatures en x de φ et de $2\psi_1$ étant égales, les $f_j(x)$ sont positifs et $\mathrm{S} = \mathrm{S}(g_1, \ldots, g_d)$.

Note remise le 19 juin 1989, acceptée le 12 juillet 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. BOCHNAK, M. COSTE et M.-F. ROY, *Géométrie Algébrique Réelle*, Ergeb. der Math. 3, 12, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[2] E. BECKER et L. BRÖCKER, On the description of the reduced Wittring, *J. of Algebra*, 52, 1978, p. 328-346.

[3] L. BRÖCKER, Spaces of orderings and semi-algebraic sets, *Can. Math. Soc. Conf. Proc.*, 4, 1984, p. 231-248.

[4] L. BRÖCKER, *On basic semi-algebraic sets* (à paraître).

[5] T. Y. LAM, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Benjamin, Reading, 1973.

[6] L. MAHÉ, Théorème de Pfister pour les variétés et anneaux de Witt réduits, *Invent. Math.*, 85, 1986, p. 53-72.

[7] L. MAHÉ, *Level and Pythagoras number of some geometric rings* (à paraître).

[8] M. MARSHALL, Spaces of Orderings IV, *Canad. J. Math.*, 32, 603-627, 1980, p. 603-627.

[9] A. PFISTER, Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, *Invent. Math.*, 4, 1967, p. 229-237.

[10] C. SCHEIDERER, *Stability index of real varieties* (à paraître).

[11] S. LANG, On quasi-algebraic closure, *Ann. Math.*, 55, 1952, p. 373-390.

I.R.M.A.R., Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.