

TRATAMIENTO AUTOMÁTICO DE LA INFORMACIÓN GEOMÉTRICA

Tomás Recio

Universidad de Cantabria

Sumario

El cálculo con datos de naturaleza geométrica se ha desarrollado extraordinariamente en los últimos años, a través de diversas materias como el diseño geométrico por ordenador, la geometría computacional, el modelado de sólidos o la demostración automática. Algunas de estas técnicas están ya o estarán pronto disponibles en las calculadoras. Al contrario de lo que ocurre con el empleo de las calculadoras para la resolución de problemas algebraicos o numéricos, no hay apenas estudios sobre su impacto en la enseñanza de la geometría elemental, salvo en el caso de los programas que simulan, precisamente, las viejas herramientas de dibujo (regla y compás). Por ello parece oportuno reflexionar, en este artículo, sobre los cambios conceptuales que conllevará la ineludible incorporación al curriculum escolar del tratamiento automático de la información geométrica.

Cálculos con números o símbolos

El empleo de calculadoras u ordenadores para manipular grandes cantidades de datos numéricos es algo habitual, algo que admitimos con naturalidad en nuestra cultura desde hace bastantes años. Las ventajas del tratamiento automático de estos datos son tan evidentes que, aunque no puede hablarse de un consenso entre los educadores sobre el papel de las calculadoras en el aula o sobre el modo de aprovecharlas didácticamente, la mayoría de ellos

estaría de acuerdo en que es útil enseñar a los jóvenes a realizar operaciones de cierto tipo con sus propias calculadoras de bolsillo o con sus ordenadores personales. En todo caso, parece incuestionable que se usan las calculadoras científicas, mucho o poco, bien o mal, en el aula.

Por el contrario, la manipulación simbólica automática (esto es, el tratamiento algorítmico de grandes cantidades de datos simbólicos) es un avance técnico cuyo conocimiento se halla, en general, menos extendido. Consideremos, por ejemplo, que queremos encontrar el máximo común divisor de los numeradores de las partes imaginarias de dos fracciones, tales como

$$\left[3 \frac{t^2 - 2\sqrt{-1}t - 3}{(t - 2\sqrt{-1})(t + 4\sqrt{-1})}, \frac{t + \sqrt{-1}}{t + 4\sqrt{-1}} \right]$$

El cálculo de ese *mcd*, aunque elemental, involucra tediosas operaciones de naturaleza sintáctica: obtención de expresiones equivalentes de ambas fracciones, pero en forma canónica (racionalización), identificación de los coeficientes de $\sqrt{-1}$, ejecución del algoritmo de Euclides, ... hasta llegar al resultado final (t , en este caso, puesto que el cambio de variable $t = \sqrt{-1}t'$ convierte ese par de fracciones en otro con sólo coeficientes reales). El lector podrá fácilmente imaginar, a partir de este ejemplo, lo que ha de entenderse, en general, por manipulación simbólica *automática*: se trata de reproducir operaciones de ese mismo tipo mediante una secuencia de instrucciones sobre un ordenador o calculadora (avanzada), provistos de unos programas adecuados.

Hace una decena de años tal posibilidad podría ser calificada, al menos en nuestro país, de novedosa; por el contrario, hoy día casi todo el mundo en el ámbito de la ciencia o la educación ha oído, al menos, hablar de algunos programas comerciales que operan simbólicamente, como *Derive*, *Maple* o *Mathematica*, que pueden ejecutarse en muy diversas y muy sencillas plataformas; algunos de ellos, en particular, sobre calculadoras de bolsillo. Ahora bien, si la utilización de la calculadora numérica en el aula es -a estas alturas del siglo XX- objeto de discusión, la aparición de los programas de cálculo simbólico en la escuela o en la universidad se encuentra, todavía, en una fase muy anterior, en la que sólo unos pocos pueden y se atreven a experimentar con estos recursos y algunos -menos aún- están iniciando una reflexión sobre sus posibles implicaciones didácticas (por ejemplo, a través de alguna revista especializada como el *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*). En todo caso es fácil constatar una curiosidad cre-

ciente de la comunidad educativa por este software y por sus aplicaciones a la enseñanza, aunque muchos las consideren realizables sólo a largo plazo.

Operaciones con figuras

Además de calcular con números y con símbolos algebraicos necesitamos, a veces, operar con datos de naturaleza geométrica. Por ejemplo, esos datos podrían venir dados a través de una colección de condiciones sobre un punto o un segmento, a fin de realizar una construcción o de hallar un lugar geométrico concreto: queremos, tal vez, obtener un punto tal que los pies de las perpendiculares, trazadas desde dicho punto a los lados de cierto triángulo, estén alineados. O, por ejemplo, los datos podrían ser las coordenadas de los extremos de una colección de segmentos de la que desearíamos hallar ciertas propiedades, tales como determinar aquellos pares de segmentos que se intersecan. O bien, los datos podrían venir dados por la descripción de un objeto geométrico de múltiples facetas, del que querríamos obtener las sombras y reflejos que arroja al ser iluminado por un foco. O, tal vez, desearíamos simular las superposiciones y líneas ocultas de una escena, contemplada desde cierto punto de vista, de la cual conocemos que está formada por varios objetos de geometría compleja, etc.

En todos estos supuestos tenemos una multiplicidad de datos geométricos que podrían requerir, por su volumen, un tratamiento automático, capaz de ser implementado en un ordenador. Por ello, en los últimos años, se han desarrollado diversos conceptos, métodos y programas en torno al tratamiento automático de la información geométrica, para resolver problemas como los anteriormente mencionados. Nos referimos al CAD (el diseño asistido por ordenador), al modelado geométrico, a la geometría computacional, discreta o combinatoria, a la demostración automática, etc. La importancia de estas materias no se reduce a su innegable éxito en las aplicaciones técnicas: en estas disciplinas se encuentra, hoy, la cara más activa de la investigación en geometría elemental.

En las secciones siguientes vamos a referirnos a dos aspectos particulares de estos nuevos desarrollos: la geometría computacional y la demostración automática de teoremas geométricos, tratando de analizar, muy someramente, su posible impacto en la enseñanza de las matemáticas.

Las herramientas euclídeas

El reiterado debate sobre el uso de las calculadoras, la presencia testimonial de los programas de cálculo simbólico, la escasa relevancia en la enseñanza del cálculo geométrico, son –entre otras cosas– una muestra de las dificultades que surgen a la hora de conjugar, en el sistema educativo, el curriculum –diseñado para el aprendizaje de las matemáticas– y los avances científicos y tecnológicos. La clase de matemáticas no se considera, de modo general, el lugar adecuado (o, al menos, no se considera con una prioridad suficiente) en el que enseñar la manipulación de las herramientas de cálculo científico que los alumnos tendrán que emplear en una futura praxis profesional o en la vida diaria.

Observamos, empero, que la geometría elemental ha sido, y sigue siendo, la puerta por la que entran en la escuela el compás, la regla, el cartabón, la escuadra Desde mucho antes de la aparición de las calculadoras, y aún de las tablas de logaritmos y de la regla de cálculo (y tal vez coetáneamente con el ábaco), estos utensilios (que llamaremos euclídeos, faltos de otra denominación mejor para englobarlos a todos) han sido objeto de uso y aprendizaje por los escolares en la clase de matemáticas.

Esta permanencia nos parece una singularidad llamativa. Porque se pide a los alumnos, frecuentemente, que realicen un esfuerzo especial por desarrollar un cálculo mental con números o símbolos, retrasando voluntariamente el uso de calculadoras; pero se considera idóneo que desarrollen la intuición espacial al tiempo que emplean *los* instrumentos de dibujo. Estos están tan arraigados en la tradición escolar que incluso aquellos profesores que consideran imprescindible que el alumno aprenda –ante todo– a resolver sus problemas matemáticos “con lápiz y papel”, aceptan sin inmutarse que el alumno explore la geometría con regla y compás. En definitiva, estas herramientas han adquirido, para esos rigurosos profesores que velan por el desarrollo de las capacidades humanas frente a la invasión de las máquinas, el ventajoso “status” de apéndices de nuestras manos. Incluso la variante informática de estas herramientas (como *Cabri-Geometre*) resultan ser los programas de cálculo geométrico más conocidos en el ámbito escolar, debido, tal vez, a que “simulan” las manipulaciones de la regla y el compás en la pantalla del ordenador. Es como si favoreciéramos el uso de unas calculadoras electrónicas porque implementaran, precisamente, los pasos que se ejecutan con un ábaco o una regla de cálculo; mientras que discutimos, abiertamente, la oportunidad escolar de las calculadoras científicas o gráficas.

Se podría aducir que hay, al menos, un argumento para explicar esta aparente paradoja:

- la enseñanza de la geometría se fundamenta, en gran medida, en la exploración de propiedades elementales de puntos y rectas en triángulos y círculos.
- por tanto, la regla y el compás bastan para realizar la mayor parte de las construcciones empleadas en la enseñanza
- de este modo, los programas de simulación informática de estos útiles se adaptan bien al diseño tradicional del currículum en geometría (al tiempo que permiten potenciarlo).

Además, una experiencia de siglos de utilización garantiza que tal forma de acercarse al conocimiento geométrico conjuga adecuadamente el desarrollo, en los alumnos, de la intuición espacial y del razonamiento lógico. Pero ...

Geometría Computacional

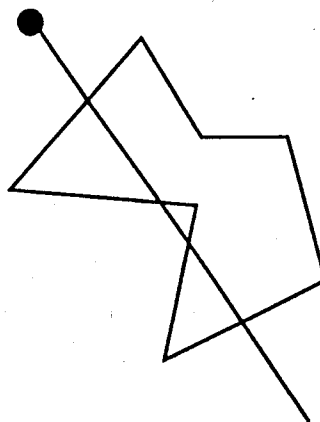
Se podría dar la vuelta a este argumento y plantear en qué medida la enseñanza de la geometría está condicionada por la eficacia de los instrumentos de dibujo técnico tradicionales. Hay bastante geometría detrás del problema clásico de trazar las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a la misma. Naturalmente, la geometría desaparecería si el alumno pudiera trazar, a ojo, dicha tangente: no, diríamos, se trata de realizar esa construcción con regla y compás. Obviamente. Entonces, ¿empleamos la regla y el compás porque son útiles para resolver nuestros problemas o elegimos esos problemas *precisamente* porque son interesantes para el ejercicio de la regla y el compás?

En otro sitio (véase el capítulo IV de [Re] o el artículo de Toussaint [T]) hemos detallado un punto de vista sobre este tema, mostrando cómo muchos problemas clásicos de la geometría elemental podrían responder, directamente, a diversas investigaciones, iniciadas hace muchos siglos, *sobre* (y no con) las herramientas euclídeas. Tales investigaciones estarían relacionadas – en palabras de hoy – con la búsqueda de modelos de computación que simulen el comportamiento de dichas herramientas, con las indagaciones acerca de su potencia de cálculo, con el análisis de la complejidad de los algoritmos que se

desarrollan con las mismas, etc. Desde esta perspectiva, el origen remoto, la razón de ser de tantos problemas populares en este área, parece venir fuertemente condicionado por las herramientas empleadas tradicionalmente en el dibujo geométrico.

Parece, entonces, que es la inercia conservadora implícita en los sistemas de enseñanza la que ha logrado que permanezcan en la escuela cierto tipo de ejercicios, aun cuando estos han dejado de ser la búsqueda de respuestas a los problemas que planteaban unos utensilios concretos, los únicos disponibles para la manipulación geométrica durante centurias. Hoy día la geometría computacional se plantea las mismas indagaciones que hemos esbozado arriba, pero sobre la herramienta actual de dibujo, el ordenador. Y, sin embargo, este hecho no tiene, hasta la fecha, una relevancia especial en la enseñanza (elemental o superior: los alumnos de las facultades o escuelas siguen entrando en las aulas con la regla y el compás, aun cuando en algún seminario de la misma asignatura se les enseñe los rudimentos del dibujo asistido por ordenador). ¿No es posible orientar la enseñanza de la geometría elemental de modo que responda, en alguna medida, a nuestra capacidad técnica actual para manipular la información geométrica?

No se trataría simplemente de sustituir, en las aulas, unas figuras, o unos enunciados de problemas, por otros. Existen diferencias sustanciales, no sólo en los contenidos, sino también en las actitudes y en los procedimientos que requieren las nuevas herramientas. Veamos un ejemplo. Determinar si un punto está dentro o fuera de un polígono es un problema de enunciado sencillo, pero no muy popular en la enseñanza tradicional. Porque desde la perspectiva del manipulador del compás y la regla, se "ve" inmediatamente si un punto es interior o exterior a un polígono. Sin embargo, desde el punto de vista del manipulador del ordenador, el problema está lejos de ser trivial: el polígono se guarda en la memoria del ordenador, por ejemplo, como una colección ordenada de vértices y, no puede "verse", por tanto, si el punto (a, b) es interior o exterior al polígono $[(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)]$. Es preciso, entonces, que el alumno invente un procedimiento geométrico que responda a las limitaciones de las herramientas empleadas (al igual que el problema del trazado de las tangentes a un círculo ha de responder a los condicionantes de la regla y el compás).



La investigación de este problema elemental conducirá, sin duda, a descubrir una relación entre la ubicación del punto dentro o fuera del polígono y la paridad del número de cortes de una semirrecta, trazada por el punto, con los lados del polígono dado. En esta parte, el enfoque tradicional y el computacional coincidirán, esencialmente. Pero, aunque desde el punto de vista tradicional el problema puede considerarse terminado con el enunciado de un criterio (punto interior $\iff$ número impar de cortes), desde el nuevo punto de vista aparecen, de forma natural, otros problemas a la hora de plantear la ejecución del criterio encontrado. ¿Cómo decidir si una semirrecta dada corta o no corta a un segmento dado (por sus extremos)? ¿Deberíamos intentar hallar la intersección de todos los pares (*punto, lado del polígono*) o habrá una forma de proceder que exija menos operaciones? ¿Y si el polígono es convexo? ¿Dependerá el número de operaciones elementales (por ejemplo, en este contexto podemos tomar como una operación básica el decidir si una semirrecta corta a un segmento dado) del número de vértices del polígono o es posible diseñar un procedimiento que no dependa de n ?

Algunos otros ejemplos han sido detallados en el texto [Re] citado anteriormente. En mi opinión, el estudio de estos y de otros similares –según los niveles– contribuiría a formar en el alumno un enfoque adecuado a la manipulación actual de la información geométrica, *al tiempo que aprende Geometría*. El objetivo no es, precisamente, que el alumno adquiriera unas nociones de CAD.

Ciertamente, un rápido recorrido por los ejemplos que han sido elaborados muestra que existen claros aspectos diferenciadores de la nueva aproximación respecto de la aproximación tradicional a la enseñanza de la geometría. La

construcción mental del mundo de las figuras geométricas es distinta a la que estamos habituados (puesto que el almacenamiento de datos no es ahora, en el nuevo contexto, predominantemente antropocéntrico); los paradigmas de razonamiento más relevantes no parecen ser los mismos (por ejemplo, una forma de inducción aparece en esta geometría de modo natural, bajo la forma de “divide y vencerás”); los problemas relativos a la eficiencia en las construcciones tienen un papel más relevante; el universo de las figuras empleadas contiene, más bien, muchas figuras sencillas, antes que pocas, pero complejas, etc... Por otra parte el enfoque computacional coincidiría plenamente con el enfoque tradicional en la importancia del razonamiento, de la manipulación conjetural de las figuras: si se hiciese tal cosa con este segmento o punto... pasaría tal otra cosa... con la ventaja de que es más fácil, en este nuevo enfoque, la realización física de los experimentos mentales (por tratarse de figuras más sencillas).

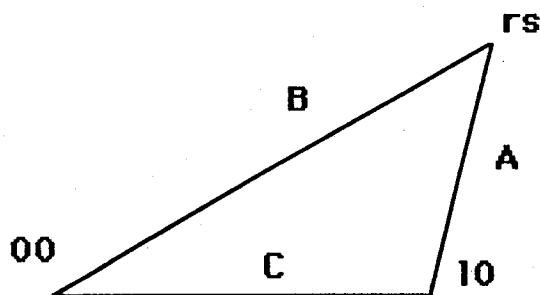
Aun con todo lo dicho, estamos muy lejos de poder señalar un panorama completo de las diferencias y concomitancias con la aproximación habitual, de poder evaluar los inconvenientes o los avances del nuevo planteamiento para la enseñanza de la geometría. Creo, por ello, que una tarea importante por hacer es, precisamente, diseñar una colección de situaciones de aprendizaje y estudiar la progresión pertinente de las mismas, de modo que respondan a los nuevos planteamientos que aquí se han esbozado.

Demostración automática

Hay otro aspecto del tratamiento automático de la información geométrica que desearíamos presentar brevemente. Se trata de los recientes desarrollos de unas técnicas de cálculo que logran *descubrir y demostrar*, mediante programas de ordenador, la práctica totalidad de los teoremas geométricos (de la geometría elemental) con los que puede verse involucrado un alumno a lo largo de sus años de estudio (incluyendo los estudios universitarios, aun cuando estos sean de la especialidad de matemáticas). Por aportar un dato más, digamos que el autor de estas líneas ha probado, con éxito, estas técnicas automáticas en algunos problemas de las Olimpiadas Internacionales. Se trata, por tanto, de una herramienta poderosa, aunque no milagrosa.

No es este el foro oportuno para describir los principios y métodos que se usan en estas técnicas de demostración automática. De nuevo, remitimos al lector al capítulo 1 de [Re] o a [Re-V] para una visión más detallada.

Tal vez sea más interesante aquí presentar unas escenas de un futuro no muy lejano, en un aula en la que los alumnos disponen ya de calculadoras simbólico/gráficas, con los programas de demostración automática en la memoria de las máquinas.



En la primera escena el profesor propone a los alumnos que investiguen si hay alguna fórmula que relacione las longitudes de los lados de un triángulo y su área. El alumno traza un triángulo cualquiera con el programa de dibujo, sobre la pantalla de su calculadora. El alumno denomina A, B, C , a las longitudes de los lados correspondientes. La calculadora asigna, internamente, unas coordenadas genéricas sencillas a los vértices de ese triángulo y calcula, a través del programa simbólico que tiene conectado con el programa de dibujo, las ecuaciones de A, B, C , en términos de estas coordenadas:

$$A^2 - ((r - l)^2 + s^2) = 0, \quad B^2 - (r^2 + s^2) = 0, \quad C^2 - l^2 = 0$$

El ordenador pregunta al alumno: ¿en qué dirección he de investigar? El alumno contesta: busco una fórmula que relacione el área S del triángulo y las longitudes A, B, C . El ordenador indaga una vez más: ¿qué es el área? (tal vez esta definición, tan elemental, forme parte de su base de datos, junto a la de longitud de un segmento...). El alumno introduce la definición correspondiente, $S = ls/2$ (u otras equivalentes).

El ordenador pasa la nueva información al programa simbólico y obtiene todas las conclusiones posibles que relacionan A, B, C, S . En nuestra propia experiencia, en cuestión de milisegundos, hemos obtenido la ecuación:

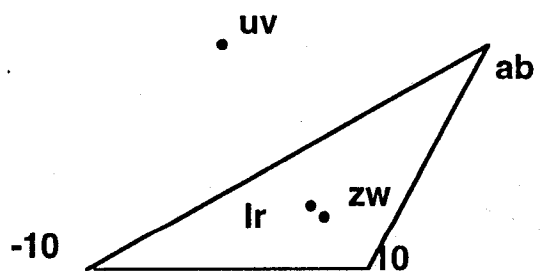
$$A^4 - 2A^2B^2 + B^4 - 2A^2C^2 - 2B^2C^2 + C^4 + 16S^2 = 0$$

El alumno levanta la mano y le dice al profesor que

dieciseis veces el cuadrado del área es igual a dos veces el cuadrado de A por el cuadrado de B, mas dos veces el cuadrado de A por el cuadrado de C, mas dos veces el cuadrado de B por el cuadrado de C, menos la suma de las potencias cuartas de A, B, C.

El profesor se queda frío. Abre su calculadora y verifica la validez de esta fórmula. Llama p al semiperímetro y trata de ver si la expresión del cuadrado del área que le acaban de leer es una variante de la fórmula de Herón, $S^2 - p(p-A)(p-B)(p-C) = 0$. Para ello simplifica la esta expresión, módulo el par de igualdades $\{2p - (A + B + C) = 0, A^4 - 2A^2B^2 + B^4 - 2A^2C^2 - 2B^2C^2 + C^4 + 16S^2 = 0\}$. El resultado, obtenido rápidamente por la calculadora simbólica, es cero, y lo mismo ocurre si procedemos a la inversa (simplificando $A^4 - 2A^2B^2 + B^4 - 2A^2C^2 - 2B^2C^2 + C^4 + 16S^2 = 0$ respecto de $\{2p - (A + B + C) = 0, S^2 - p(p-A)(p-B)(p-C) = 0\}$). De modo que la fórmula de Herón no es sino otra forma de escribir la fórmula obtenida por el alumno.

En la segunda escena, el alumno se encuentra sólo en casa y prepara un trabajo para la clase del día siguiente. Se trata de escribir algunas propiedades de ciertos puntos notables del triángulo. Le parece recordar que el baricentro, incentro y circuncentro están siempre alineados. Como en el caso anterior, introduce los datos pertinentes en su calculadora y formula la tesis de alineación. La máquina verifica si la tesis se sigue de los datos introducidos y concluye que no, *pero que sería cierta si el triángulo fuese isósceles*.



En la figura se ha representado el baricentro (l, r) , circuncentro (u, v) , incentro (z, w) y ortocentro (x, y) , en uno de los casos de alineación. Lo crucial es que a esta conclusión no ha llegado la calculadora simplemente revisando una supuesta base de datos geométricos. El alumno podría haber inventado cualquier tesis, por disparatada que fuese, que la calculadora, en principio, le daría una respuesta adecuada. No, se trata, de nuevo, de la aplicación de un algoritmo de razonamiento automático y, por tanto, empleable en cualquier situación no prevista inicialmente: el algoritmo considera que la validez de una conclusión tiene que ver con que ciertos polinomios que se derivan de las ecuaciones involucradas en las hipótesis se hagan cero y, si no lo son, la tesis no es válida, pero lo sería si se *impone* la anulación de los mismos... lo que significa que el triángulo habrá de tener dos lados iguales. Es así como la máquina, en nuestra descripción, acierta a proporcionar las hipótesis complementarias necesarias.

Ambas escenas no son fantasías literarias: los dos supuestos pueden realizarse ya, con cualquier pequeño ordenador provisto de un programa de cálculo simbólico. Por el contrario, el diálogo y la facilidad de relación con el ordenador que hemos descrito, son ficticios. Hoy hace falta, todavía, un entrenamiento no trivial para introducir los datos y leer los resultados en los programas de demostración automática.

Pero, ¿que haremos cuando estas escenas sean plena realidad? ¿Empezaremos entonces a debatir si conviene o no prohibir el uso de tales calculadoras? ¿Cómo podremos aprovechar las mismas para enseñar a razonar geométricamente? Llegaremos a decir, entonces, ¿qué les enseño, si ya lo hace la calculadora?

Las calculadoras serán capaces de obtener conclusiones, pero nunca podrán valorar el interés o la belleza de las mismas, su significado en un contexto más amplio. Tal vez sea esta la dirección en la que deberíamos empezar a poner el acento en la enseñanza...

Conclusión

Hemos presentado dos reflexiones sobre el posible impacto, en un futuro no muy lejano, de las técnicas de tratamiento automático de la información geométrica en la enseñanza de la geometría. En general, el desarrollo de estas técnicas y la eficacia de las máquinas que las implementan parecen, en una primera aproximación, cuestionar o amenazar el normal desarrollo

del aprendizaje de los conceptos y destrezas geométricos tradicionales. Esta apreciación puede ser correcta si nos empeñamos en considerar las calculadoras como una herramienta marginal para enseñar las matemáticas, en vez de centrar nuestra atención en *los problemas matemáticos que plantean las calculadoras y en las matemáticas que podemos enseñar con las calculadoras*.

Las matemáticas son algo dinámico, que se origina en los problemas que al hombre se le plantean cuando interactúa con el medio, a través de las herramientas de las que dispone. Como ayer, tal vez, el compás, hoy, por ahora, la calculadora

Referencias

[IJCAME] International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education. Dirección electrónica: www.users.globalnet.co.uk/resinf/deri.htm

[Re] Recio, Tomás: *Cálculo Simbólico y Geométrico*. Editorial Síntesis, Madrid, 1998.

[Re-V] Recio, Tomás y Vélez, Pilar: Automated Deduction of Elementary Geometry Theorems. *Journal of Automated Reasoning*. 1999.

[T] Toussaint, Godfried : Scanning the Issue. En *Computational Geometry*, volumen especial de los Proceedings of the IEEE, sept. 1992, vol. 80, no. 9.

Dirección del autor: Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander.

Tomás Recio trabaja en Álgebra y Geometría Computacional y en sus aplicaciones a diversos campos, como la Geometría Algebraica, la Robótica o la Enseñanza.