Seminaire sur la Geometrie
Algebraique Reelle
Paris VII - 1986 vol 24

SUR LE $16^{ème}$ PROBLÈME DE HILBERT : UN RÉSUMÉ ET QUELQUES QUESTIONS

Jean-Jacques RISLER

§1. INTRODUCTION.

Voici le texte de D. Hilbert relatif au $16^{ème}$ problème de "Topologie des courbes et des surfaces algébriques".

Le nombre maximum des branches fermées et séparées que peut posséder une courbe plane algébrique d'ordre n a été déterminé par Harnack ; reste la question de la situation mutuelle qu'occupent entre elles dans le plan, les branches d'une courbe. En ce qui concerne les courbes du sixième ordre, je suis parvenu à prouver, en entrant il est vrai dans beaucoup de détails, que les onze branches que peut avoir une courbe du sixième ordre, d'après Harnack, ne peuvent jamais avoir leurs cours tous séparés et qu'il doit au contraire, exister une branche à l'intérieur de laquelle se trouve une branche unique, tandis que les neuf autres ont leurs cours à son extérieur, et réciproquement. Une étude approfondie des positions relatives des branches séparées dans le cas de leur nombre maximum me semble présenter un grand intérêt, et il en est de même de la recherche analogue relative au nombre, à la forme et à la position relative des nappes d'une surface algébrique dans l'espace. Jusqu'ici d'ailleurs, l'on ne sait absolument rien sur le nombre maximum effectif de nappes que peut avoir une surface du quatrième ordre dans l'espace à trois dimensions. ?

Comme suite à ce problème purement algébrique, j'attirerai l'attention sur la question suivante, qui me semble pouvoir être attaquée au moyen de la méthode de la variation continue des coefficients ; la réponse à cette question est d'ailleurs importante pour la topologie des familles de courbes définies par des équations différentielles : déterminer le nombre maximum et la situation relative des cycles limites de M. Poincaré dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré de la forme $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$ où X, Y désignent des fonctions rationnelles entières de degré n, de x, y, ou, en employant l'écriture homogène, de la forme

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(x\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0 ,$$

où X, Y, Z désignent des fonctions rationnelles entières et homogènes de degré n, de x, y, z, ces fonctions devant être déterminées comme fonctions du paramètre".

David Hilbert (H) .

Deux excellents articles généraux traitant du 16ème problème de Hilbert existent : le "Review" de Gudkov de 1974 (G) et le papier de Wilson de 1978 (W). On peut aussi consulter l'exposé de A'Campo ou Séminaire Bourbaki (A') où il résume une partie du travail d'A. Marin publié ici.

Je me contenterai donc ici d'exposer les faits indispensables à la compréhension des articles de ce volume, sans chercher à être complet ni à entrer dans les détails. D'autre part j'ai émaillé cet exposé de problèmes qui m'ont été suggérés par la lecture de l'article de Gudkov ; certains sont probablement naïfs, mais je pense qu'ils peuvent motiver l'étude de la théorie, sur laquelle on ne sait pas encore grand chose.

Le premier résultat important sur le sujet remonte à Harnack : Soit $X \subset \mathbb{R}P^2$ une courbe algébrique lisse définie par un polynôme homogène de degré d à coefficients réels :

$$X = \{(x_i) \in \mathbb{R}P^2 \mid f(x_0,x_1,x_2) = 0\} .$$

La complexifiée $X_{\mathbb{C}}$ (supposée aussi lisse) de X est une courbe complexe de genre $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ et les composantes connexes de X sont homéomorphes à des cercles. On a alors :

THEOREME 1.1 - Le nombre de composantes connexes de X est inférieur ou égal à g+1. Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème ; nous en donnerons une au paragraphe 2 utilisant la théorie de Smith.

Les courbes ayant le nombre maximum de composantes connexes (à savoir g+1) sont appelées des M-courbes, les courbes ayant g composantes des M-1 courbes, etc... (nous verrons qu'il existe des M-courbes en tous degrés).

Une composante d'une courbe X est appelée ovale si elle disconnecte $\mathbb{R}P^2$ (ou de manière équivalente si elle est homotope à 0), pseudo-droite dans le cas contraire (elle est alors homotope à $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$).

Si le degré de X est pair, toutes ses composantes sont des ovales, et s'il est impair, une et une seule des composantes de X est une pseudo-droite (en effet deux pseudo-droites se rencontrent toujours alors qu'une droite rencontre transversalement un ovale en un nombre pair de points).

Pour décrire le type topologique du plongement d'une courbe algébrique dans $\mathbb{R}P^2$, on remarque qu'un ovale sépare $\mathbb{R}P^2$ en deux composantes, l'une contractile et homéomorphe à un disque appelée l'intérieur de l'ovale et l'autre homéomorphe à une bande de Moëbius et donc non orientable.

Un ovale est dit pair s'il est inclu dans l'intérieur d'un nombre pair d'ovales, et impair dans le cas contraire.

Remarquons tout de suite qu'une courbe de degré d = 2k ne peut avoir plus de k ovales emboîtés, et que si elle a k ovales emboîtés elle n'en n'a pas d'autre (sinon une droite bien choisie couperait la courbe en plus de k points).

§2. LA THEORIE DE SMITH. (cf [S] ou [W])

Dans le théorème suivant, tous les espaces sont supposés triangulables, et l'homologie est à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>THEOREME 2.1</u> - Soit $\widetilde{X}$ un espace compact muni d'une involution τ, X l'ensemble des points fixes de τ et X' le quotient $\widetilde{X}/\tau$; on a alors une suite exacte :

$$\longrightarrow H_r(X',X) \oplus H_r(X) \xrightarrow{\alpha_r} H_r(\widetilde{X}) \xrightarrow{\beta_r} H_r(X',X) \xrightarrow{\gamma_r} H_{1-r}(X',X) \oplus H_{r-1}(X) \longrightarrow \dots$$

et de plus :

a) τ_* (action de τ sur l'homologie) est l'identité sur $\operatorname{Im} \alpha_r$

b) $\dim H_*(\widetilde{X}) = \dim H_*(X) + 2 \sum \dim \operatorname{Ker} \gamma_r$

(H_* signifiant la somme directe de tous les groupes d'homologie).

<u>COROLLAIRES 2.2</u> -

a) Soit X un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{RP}^n$, $X_{\mathbb{C}}$ son complexifié ; alors

$$\dim H_*(X) \leq \dim H_*(X_{\mathbb{C}}) \text{ et la différence est paire.}$$

b) Si $\dim H_*(X) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}})$, τ_* est l'identité sur $H_*(X_{\mathbb{C}})$.

<u>Remarque 2.3</u> - Ce corollaire avait déjà été remarqué par Thom ([T]). Il implique le théorème de Harnack (1.1), car si X est une courbe plane lisse, $\dim H_*(X)$ est égal à deux fois le nombre de composantes de X et $\dim H_*(X_{\mathbb{C}})$ à $2g+2$.

Pour les courbes, il y a une réciproque au corollaire 2.2. b) :

<u>PROPOSITION 2.4</u> - Soit X une courbe algébrique réelle lisse dans $\mathbb{RP}^2$, τ la conjugaison complexe sur $X_{\mathbb{C}}$; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) τ_* est l'identité sur $H_1(X_{\mathbb{C}},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

b) X est une M-courbe.

<u>Démonstration</u> : b) $\Rightarrow$ a) est le corollaire 2.2. b) ; pour l'implication a) $\Rightarrow$ b), nous allons d'abord montrer que sous l'hypothèse a) X sépare $X_{\mathbb{C}}$ (i.e. que $X_{\mathbb{C}} \setminus X$ a deux composantes connexes échangées par l'involution τ : cf. §4).

Supposons en effet que $X_{\mathbb{C}} \setminus X$ soit connexe ; il existerait alors un lacet ℓ dans $X_{\mathbb{C}}$ tel que $\ell.X = 1$ ($\ell.X$ désignant l'intersection de $|\ell|$ et $|X|$ calculée dans $H_1(X_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})$) ; mais pour tout lacet ℓ de $X_{\mathbb{C}}$, la self intersection $\ell.\ell \equiv 0(2)$ car $X_{\mathbb{C}}$ étant orientable, ℓ disconnecte un voisinage tubulaire ; d'autre part l'hypothèse que τ_* est l'identité sur $H_1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ implique que $\ell.\ell \equiv \ell.\tau(\ell)$ (2). X étant l'ensemble des points fixes de τ, on a aussi :

$$\ell.\tau(\ell) \equiv \ell.X \ (2)$$

car les points d'intersection de ℓ et $\tau(\ell)$ non sur X sont en nombre pair. On trouve donc une contradiction avec l'hypothèse que $\ell.X = 1$.

$X_{\mathbb{C}} \setminus X$ est donc réunion de deux ouverts V_1 et V_2 échangés par τ ; si on considère deux ouverts U_1 et U_2 tels que $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$, $U_1 \cup U_2 = X_{\mathbb{C}}$, $U_1 \cap U_2$ se rétracte sur X et $\tau(U_1) = U_2$, la suite exacte de Mayer-Vietoris s'écrit alors :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow H_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H_1(U_1) \oplus H_1(U_2) \longrightarrow H_1(X_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi} \widetilde{H}_0(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

Supposons que $X_{\mathbb{C}}$ soit de genre g, que X ait p composantes connexes; $H_1(U_1 \cap U_2)$ est alors de rang p, $H_1(X_{\mathbb{C}})$ de rang $2g$ et $\widetilde{H}_0(U_1 \cap U_2)$ de rang $p-1$, ce qui implique que $H_1(U_1)$ et $H_1(U_2)$ sont chacuns de rang g ; comme les générateurs de $H_1(U_1)$ et $H_1(U_2)$ sont échangés par τ_*, l'hypothese que τ_* est l'identité sur $H_1(X_{\mathbb{C}})$ implique que $\varphi(H_1(U_1)) = \varphi(H_1(U_2))$ et donc que $\operatorname{Im} \varphi$ est de rang $\leq g$, ce qui implique immédiatement $g \geq p-1$.

C.Q.F.D.

<u>PROBLEME 2.5</u> - A-t-on un résultat analogue en dimension supérieure ?

Indiquons rapidement comment se construit la suite exacte de Smith : soit K un complexe simplicial fini avec une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (1,h)$. On suppose que si h fixe globalement un simplexe s de K, il fixe tous les sommets de s ; alors si l'on pose $\sigma = 1 + h$, si K^G désigne le complexe fixé par $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $C(K)$ le groupe des chaînes sur K à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il est facile de voir que la suite

$$0 \longrightarrow \rho C(K) \oplus C(K^G) \xrightarrow{i} C(K) \xrightarrow{\rho} \rho C(K) \longrightarrow 0$$

est exacte d'où une suite exacte d'homologie :

$$\longrightarrow H_i(K) \xrightarrow{\rho_*} H_i(\rho C(K)) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(\rho C(K)) \oplus H_{i-1}(K^G) \xrightarrow{\alpha} H_{i-1}(K) \longrightarrow$$

et il suffit de remarquer que

$$H_i(\rho C(K)) \xrightarrow{\sim} H_i(K',K^G)$$

où $K' = K/G$ pour retrouver la suite exacte de Smith.

Remarque 2.6 - On peut aussi utiliser la suite exacte de Gysin du revêtement : $X_{\mathbb{C}}\backslash X \to X'\backslash X$ pour retrouver la suite de Smith, ce qui permet d'interpréter géométriquement les morphismes γ_r.

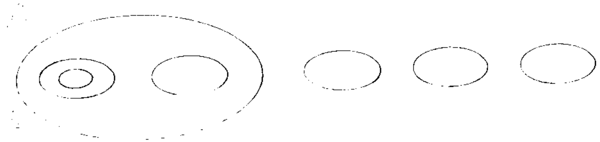
§3. CONSTRUCTIONS DE M-COURBES.

On sait depuis Harnack construire des M-courbes en tous degrés. Sa méthode est exposée en détails dans l'article d'A'Campo par exemple ([A']), ou dans celui de Gudkov.

Hilbert a donné une méthode différente (qui conduit à des résultats effectivement différents) pour construire des M-courbes de degré pair (cf. [G]) mais basée sur le même principe du "petit paramètre".

Dans l'article de Benoît Chevallier une autre méthode, basée sur un processus complètement différent est proposée.

Pour les courbes de degré pair, la notation est la suivante : $\frac{p}{1}$ indique que p ovales sont inclus à l'intérieur d'un ovale lui-même contenu dans aucun autre ; par exemple, $(\frac{\frac{1}{1},1}{1},3)$ désigne la configuration suivante :



On peut alors dresser le tableau de toutes les configurations a priori réalisables par des courbes de degré 6 ; d'après le théorème 1.1 ces courbes ont au plus 11 composantes connexes, et sauf pour la courbe $\frac{\frac{1}{1}}{1}$, il ne peut y avoir plus de deux ovales emboîtés :

$\frac{10}{1}$ $\frac{9}{1}\,1$ $\frac{8}{1}\,2$ $\frac{7}{1}\,3$ $\frac{6}{1}\,4$ $\frac{5}{1}\,5$ $\frac{4}{1}\,6$ $\frac{3}{1}\,7$ $\frac{2}{1}\,8$ $\frac{1}{1}\,9$ 11

$\frac{9}{1}$ $\frac{8}{1}\,1$ $\frac{7}{1}\,2$ $\frac{6}{1}\,3$ $\frac{5}{1}\,4$ $\frac{4}{1}\,5$ $\frac{3}{1}\,6$ $\frac{2}{1}\,7$ $\frac{1}{1}\,8$ 10

$\frac{8}{1}$ $\frac{7}{1}\,1$ $\frac{6}{1}\,2$ $\frac{5}{1}\,3$ $\frac{4}{1}\,4$ $\frac{3}{1}\,5$ $\frac{2}{1}\,6$ $\frac{1}{1}\,7$ 9

etc...

Gudkov a montré que seules les configurations situées sous la ligne brisée existaient, et il les a effectivement construites.

La considération de ce tableau amène à se poser plusieurs questions (indépendamment du problème de la détermination des types topologiques des courbes de degré 6) ; on peut d'abord remarquer que dans ce tableau chaque configuration non sur la ligne supérieure s'obtient à partir de l'une des deux qui sont au-dessus en lui enlevant un ovale ; on voit alors que en degré 6 si une configuration est réalisable par une courbe de degré 6, toutes celles qui sont "en dessous" (i.e. toutes celles obtenues en lui enlevant des ovales) aussi.

PROBLEME 3.1 - Le degré d étant fixé, montrer que si une configuration existe (i.e. est réalisée par une courbe de degré d) toutes les configurations "en dessous" aussi. Gudkov semble considérer ce fait comme vrai mais n'est pas clair à ce sujet.

On peut remarquer aussi que ce tableau est symétrique ; d'où :

PROBLEME 3.2 - Définir une dualité raisonnable entre les configurations (qui ici serait la symétrie par rapport à la droite verticale passant par $\frac{5}{I}$ 5) et montrer que si une configuration existe en degré d, sa duale aussi.

On dit qu'une variété algébrique réelle X est une M-variété si $\dim H_*(X) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}})$, une M-1-variété si $\dim H_*(X) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}}) - 2$, etc... (cf. §2). On a alors évidemment le problème suivant :

PROBLEME 3.3 - Y-a-t-il des M-variétés en tous degrés et en toutes dimensions ?

Ce fait n'est connu pour les surfaces que jusqu'en degré 4 ; Kharlamov ([K_2]) a en fait déterminé tous les types topologiques des surfaces de degré 4.

§4. COURBES SÉPARANTES.

Une courbe réelle X est dite séparante si elle sépare sa complexifiée $X_{\mathbb{C}}$, i.e. si $X_{\mathbb{C}} \setminus X$ n'est pas connexe.

LEMME 4.1 - Si X est une courbe séparante, $X_{\mathbb{C}} \setminus X$ a exactement deux composantes connexes échangées par l'involution τ.

En effet si $X_{\mathbb{C}} \setminus X$ a plusieurs composantes, aucune n'est globalement fixe par τ, comme on le voit localement en se plaçant au voisinage d'un point de X adhérent à deux composantes. Alors si ℓ est une composante de X, $(X_{\mathbb{C}} \setminus X) \cup \ell$ est nécessairement connexe puisque ℓ est fixe par τ, d'où le résultat.

LEMME 4.2 - Une M-courbe est toujours séparante.

En effet g+1 lacets disconnectent toujours une surface de genre g.

LEMME 4.3 - Soit X une courbe séparante ayant n composantes ; alors n g+1(2) .

En effet soit U_1 une des composantes de $X_{\mathbb{C}} \setminus X$; $\bar{U}_1$ est alors une surface à bord avec n composantes dans le bord ; on a alors $\chi(\bar{U}_1) = 2 - 2g_1 - n$, où g_1 est le genre de U_1, d'où $\chi(X_{\mathbb{C}}) = 2 - 2g = 4 - 4g_1 - 2n$, d'où $g+1 = 2g_1 + n$ n(2).

LEMME 4.4 - Soit X une courbe algébrique réelle projective (non nécessairement plane). Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) X est séparante

b) $i_* : H_1(X) \longrightarrow H_1(X_{\mathbb{C}})$ est non injective.

La démonstration est un simple exercice sur la suite exacte d'homologie de la paire $(X_{\mathbb{C}}, X)$.

A. Marin construit dans son article un grand nombre de courbes séparantes de degré 6 qui ne sont pas des M-courbes.

ISCE

En voici un exemple en tous degrés pairs :

LEMME 4.5 - Soit X une courbe réelle lisse de degré 2k obtenue en déformant légèrement l'équation de k cercles concentriques ; alors X sépare $X_{\mathbb{C}}$.

Il suffit de voir que si X' désigne la réunion de k cercles concentriques, X' sépare $X'_{\mathbb{C}}$; mais chaque composante X'_i de X' sépare sa complexifiée $X'_{i\mathbb{C}}$ (qui est topologiquement une sphère) et les sphères $X'_{i\mathbb{C}}$ sont deux à deux bitangentes aux "points cycliques" qui sont échangés par l'involution τ (en effet les tangentes à $X'_{i\mathbb{C}}$ passant par le centre de X'_i passent par les points cycliques) ; il est alors clair que X' sépare $X'_{\mathbb{C}}$.

PROBLEME 4.6 - Deux courbes réelles de degré 2k formées de k ovales emboîtés peuvent-elles être déformées l'une dans l'autre à travers des courbes lisses de degré 2k ?

Le problème 4.6 admet une réponse positive pour k = 2 : on peut toujours déformer une courbe de degré 4 formée de deux ovales emboîtés en deux cercles concentriques à travers des courbes de degré 4 ayant la même configuration (Si P est l'équation de la courbe et Q l'équation de deux cercles concentriques bien choisis, la déformation $(1-t)P + tQ$ convient).

Appelons k-maximale une configuration réalisée par une courbe de degré 2k telle qu'en lui rajoutant un ovale on obtienne une configuration non réalisable par une courbe de degré 2k. Par exemple en degré 6 les configurations maximales sont celles des M-courbes $\frac{9}{I}1$, $\frac{5}{I}1$ et $\frac{1}{I}9$ et les configurations $\frac{6}{I}2$, $\frac{2}{I}6$ et $\frac{1}{\frac{I}{I}}$.

PROBLEME 4.7 - Soit C une configuration réalisée par une courbe de degré 2k. Est-il vrai que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) toutes les courbes de degré 2k ayant cette configuration sont séparantes.

b) C est k-maximale.

A. Marin montre dans son article que le problème 4.7 admet une réponse positive en degré 6.

§5. LES CONGRUENCES DE ARNOLD-ROHLIN.

Arnold ([A]) a eu une idée très féconde dans la théorie : l'utilisation de résultats arithmétiques sur les formes quadratiques (ici la forme d'intersection sur $H_{2n}(X_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})$ où X est une variété algébrique réelle de dimension 2n) ; son résultat principal est le suivant :

THEOREME 5.1 - Si X est une courbe séparante de degré 2k, alors $P-I \equiv k^2(4)$.

Dans ce théorème, P désigne le nombre d'ovales pairs et I le nombre d'ovales impairs de la courbe X (cf. §1).

Pour les M-courbes Rohlin ($[R_1]$) a montré peu après le théorème 5.2 (cf. l'article de Marin pour des commentaires sur cette "preuve") :

THEOREME 5.2 - Si X est une M-courbe de degré 2k, $P-I \equiv k^2(8)$.

Remarques -

a) Si on choisit une équation f de X négative à l'infini (i.e. sur la partie non orientable de $\mathbb{RP}^2\setminus X$), et si l'on pose $\mathbb{RP}^+ = \{x \in \mathbb{RP}^2 | f(x) \geq 0\}$, ce qui a un sens

car f est de degré pair, alors $\chi(\mathbb{RP}^+) = P-I$ et $\chi(\mathbb{RP}^-) = I-P+1$.

b) parmi les 11 configurations à priori réalisables comme des M-courbes de degré 6 les trois qui peuvent être effectivement réalisées sont celles qui vérifient la congruence de Rohlin.

Rohlin ($[R_2]$) a ensuite démontré deux théorèmes pour les M-variétés (i.e. les variétés X pour lesquelles $H_*(X) = H_*(X_{\mathbb{C}})$). Ces théorèmes sont en fait montrés sous l'hypothèse à priori plus faible que l'action τ_* de l'involution sur l'homologie $H_*(X_{\mathbb{C}},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est l'identité : cf. le Problème 2.5.

THEOREME 5.3 - Soit X une M-variété projective de dimension 2n ; alors :

$$\chi(X) \equiv \sigma(X_{\mathbb{C}})\ (16)$$

où $\sigma(X_{\mathbb{C}})$ désigne la signature de la variété $X_{\mathbb{C}}$ (de dimension réelle 4n).

Pour le cas où X est de dimension impaire, on suppose que X est intersection complète dans $\mathbb{R}P^{q+1}$, définie par s équations $P_1,\dots,P_s$ de degré $m_1,\dots,m_s$, le degré m_s étant pair, et on pose $B = \{x \in \mathbb{R}P^{q+1} | P_1(x) = \dots = P_{s-1}(x) = 0\}$

$$B_- = \{x \in B | P_s(x) \leq 0\}.$$

Soit Y le revêtement double de $B_{\mathbb{C}}$ ramifié le long de $X_{\mathbb{C}}$; il y a alors une involution naturelle $\tau : Y \to Y$ telle que l'ensemble F des points fixes de Y par τ soit le revêtement double de B_- ramifié le long de X ; on a alors :

THEOREME 5.4. - Si F est une M-variété (i.e. si $\dim H_*(F) = \dim H_*(Y)$), on a :

$$2\chi(B_-) \equiv \sigma(Y)\ (16)$$

Remarques -

a) Ce théorème appliqué au cas des courbes redémontre la congruence : $P-I \equiv k^2$ (8) pour une M-courbe de degré 2k. (Si X est de dimension 1, F est en effet une M-variété si et seulement si X est une M-courbe ; cf [W]).

b) Pour une M-surface X de degre pair dans $\mathbb{R}P^3$, le théorème 5.3 implique $\chi(X) \equiv 0$ (16).

c) Ces deux théorèmes montrent qu'il est important de pouvoir calculer la signature modulo 16 d'une variété algébrique complexe lisse : c'est l'objet de l'article ~~de~~ S. Ochanine.

Signalons que Kharlamov (|K$_2$|) a récemment déterminé tous les types topologiques des surfaces de degré 4, ce qui répondait à une partie du 16ème problème de Hilbert.

Signalons enfin que pour les M-1 variétés, Kharlamov (|K$_1$|) et Gudkov et Krakhnov (|G-K|) ont montré des théorèmes analogues aux théorèmes 5.2 et 5.3 :

THEOREME 5.5 -

a) pour une (M-1)-courbe de degré 2k, $P-I \equiv k^2 \pm 1(8)$

b) Si X est une (M-1)-variété algébrique réelle de dimension 2n ; alors :

$$\chi(X) \equiv \sigma(X_{\mathbb{C}}) \pm 2(16).$$

Pour d'autres résultats et des démonstrations, cf. |W| ou |G|, et l'article de Marin dans ce volume.

§6. QUELQUES AUTRES PROBLEMES.

Signalons pour commencer la conjecture de Ragsdale (1906) :

CONJECTURE 6.1 - Pour une courbe réelle de degré 2k, on a

$$P \leq \frac{3}{2}k(k-1)+1$$

$$I \leq \frac{3}{2}k(k-1).$$

Cette conjecture entraîne les inégalités de Petrowsky : $-\frac{3}{2}k(k-1) \leq P-I \leq \frac{3}{2}k(k-1)+1$ qui sont démontrées (cf. l'article de Marin) et ont été améliorées par Arnold (|A|). Considérons maintenant l'espace $\mathbb{R}P^N$ (avec $N = \frac{d(d+3)}{2}$) de toutes les courbes réelles de degré d, et $D \subset \mathbb{R}P^N$ le discriminant (ensembles des courbes singulières) ; Marin montre que deux courbes de degré 7 ayant même type topologique de plongement dans $\mathbb{R}P^2$ et dans leur compléxifiée ne sont pas nécessairement dans la même composante connexe du complémentaire de D ; on peut néanmoins poser beaucoup de problèmes :

what ?!

(1) PROBLEMES SUR LE COMPLEMENTAIRE DE D.

a) estimer le nombre de configurations de M-courbes de degré d en fonction d (les méthodes de Harnack et Hilbert pout construire des M-courbes montrent que ce nombre tend vers l'infini avec d : cf. l'article de Benoît Chevalier).

b) estimer en fonction de d le nombre de composantes connexes du complémentaire de D.

c) il y a un autre discriminant $\tilde{D} \supset D$ qui représente les courbes X de degré d telles que $X_{\mathbb{C}}$ soit singulière ; si deux courbes non dans $\tilde{D}$ sont dans la même composante de CD, sont-elles dans la même composante de $C\tilde{D}$?

(2) PROBLEMES SUR LES COURBES SINGULIERES.

a) Le discriminant D est-il connexe ?

b) peut-on caractériser les types topologiques des courbes de degré d obtenues en déformant d droites ? (par exemple en degré 6, on obtient au plus 9 composantes connexes).

c) Arnold a introduit la notion de "degré de non rigidité" d'une courbe singulière (cf. |G|).

DEFINITION - Une courbe X est de degré 0 si toutes les courbes voisines (obtenues en déformant l'équation de X) lui sont isotopes.

- par récurrence, supposons définies les courbes de degré de non rigidité 0,1,...,n-1 ; alors une courbe X est de degré n si :

1) dans tout voisinage de X il existe une courbe de degré de non rigidité n-1.

2) toutes les courbes voisines de X et non de degré < n sont isotopes.

Par exemple une courbe est de degré de non rigidité 0 si et seulement si elle est lisse, et de degré 1 si et seulement si elle a un seul point double ordinaire.

PROBLEME - Chaque courbe singulière a-t-elle un degré bien défini ?

(3) PROBLEMES EN DIMENSION SUPERIEURE.

Signalons enfin que l'on ne connait pratiquement rien en dimension > 1 (à part le cas des surfaces de degré ≤ 4). Par exemple on ne sait pas quel est le nombre maximum de composantes connexes d'une surface de degré $d > 4$ (on sait borner ce nombre grâce au corollaire 2.2, mais par exemple pour une surface de degré 4 ce corollaire donne $\dim H_*(x) \leq 24$, ce qui borne le nombre de composantes connexes par 12 (la surface pourrait être constituée de 12 sphères) alors que Kharlamov a montré qu'une telle surface avait au plus 10 composantes).

BIBLIOGRAPHIE.

[A'] A CAMPO - Sur la 1ère partie du 16ème problème de Hilbert. Séminaire Bourbaki 1978-1979, n°537.

[A] V.I. ARNOLD - The arrangement of the ovals of real plane algebraic curves... Funct. Anal and its appl. 5 (1972), 169-175.

[G] D.A. GUDKOV - The topology of real projective algebraic manifold, Russ. Math. Surveys 29 (1974), p. 1-79.

[G-K] GUDKOV and KRAKHNOV - Periodicity of the Euler characteristic of real algebraic M-1 varieties, Funct. Anal. and its appl. 7 (1974), p. 98-102.

[H] D. HILBERT - Sur les problèmes futurs des mathématiques - Compte-rendu du deuxième congrès international des mathématiciens, Paris, Gauthier-Villars 1902.

[K_1] KHARLAMOV - Additional congruences for the Euler characteristic of real manifolds of even dimensions. Functional Anal. Appl., 9 (1975), p. 134-141.

[K_2] KHARLAMOV - Topological types of non-singular surfaces of degree 4 in $\mathbb{RP}^3$, Funktsional'ni Analiz... ; 10 (1976), p. 41-48

[R_1] ROKHLIN - Proof of Gudkov's conjecture. Funct. Anal. and its appl. 6 (1972) p. 136-138.

[R_2] ROKHLIN - Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem, Funct. Anal. and its appl. 6 (1972) p. 301-306, part. II, ibid 7 (1974), 163-164.

[S] Seminar on Transformation Groups - Ann. Math. Studies n°46, Princeton (1960).

[T] THOM - Sur l'homologie des variétés algébriques réelles, differential and combinational topology, University Press, Princeton, 1965, p. 255-265.

[W] WILSON - Hilbert's Sixteenth problem, Topology vol. 17 (1978), p. 53-73.