Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder.

Von

E. Schönhardt in Tübingen.

Unter einem Dreieckspolyeder sei ein von ebenen Dreiecksflächen begrenzter einfach zusammenhängender Körper verstanden. Ist das Polyeder außerdem konvex, so läßt es sich bekanntlich in Tetraeder zerlegen, deren Eckpunkte alle zugleich Ecken des Polyeders sind. Man erhält eine solche Zerlegung, indem man die Begrenzungsdreiecke von einer Polyederecke aus projiziert. Da sich jedes ebene Polygon[1]) durch Ziehen von Diagonalen in Dreiecke zerlegen läßt, so ist auch die Zerlegung eines von beliebigen ebenen Polygonen begrenzten Polyeders in Tetraeder im obigen Sinne möglich. Anders, wenn man die Bedingung der Konvexität fallen läßt. Während das ebene Problem der Zerlegung eines Polygons in Dreiecke auch dann noch stets lösbar ist, ist, wie Herr N. J. Lennes[2]) für Dreieckspolyeder bewiesen hat, ein nicht konvexes Polyeder im allgemeinen nicht mehr in Tetraeder zerlegbar. Zum Beweis beschreibt Herr Lennes ein Dreieckspolyeder mit sieben Ecken, welches nachweisbar keine solche Zerlegung zuläßt. Ich gebe im folgenden ein anderes Beispiel, das den Vorteil besitzt, das einfachste zu sein, insofern, als das Polyeder die kleinste Zahl von Ecken aufweist, möglichst regelmäßig ist und sich infolgedessen anschaulich leicht beschreiben läßt. Es ist auch sonst noch von Interesse, weil es bei spezieller Wahl der einen noch verfügbaren Konstanten zugleich ein Beispiel für die von Herrn W. Blaschke[3]) untersuchten „wackeligen“ Achtflache darstellt.

---

[1]) Hier ist nur von gewöhnlichen Polygonen die Rede, deren Berandung ein einfach zusammenhängendes Stück der schlichten Ebene begrenzt.

[2]) Americ. Journ. of Math. **33** (1911), Theorems on simple finite polygon and polyhedron, p. 55.

[3]) Math. Zeitschr. **6** (1920), Über affine Geometrie XXVI: Wackelige Achtflache, S. 85.

Wir gehen aus von einem geraden Prisma mit gleichseitig dreieckiger Grundfläche. In den drei quadratischen Seitenflächen werden in der Weise drei Diagonalen $d_1\, d_2\, d_3$ gezogen, daß sie bei Drehung des Prismas um seine Hauptachse um 120^0 bzw. 240^0 ineinander übergehen.

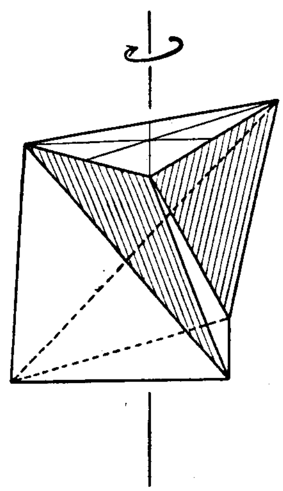


Fig. 1.

Nun wird das obere Dreieck gegen das untere um die Achse so gedreht, daß die Diagonalen sich zunächst verlängern. Die beiden Dreiecke hat man sich dabei als starr vorzustellen. Für den Drehwinkel ϑ gelte:

$$0 < \vartheta < 60^0.$$

Der so entstandene Körper[4]) besitzt drei Hohlkanten, nämlich die Diagonalen der ursprünglichen Quadrate, das heißt, längs dieser ist er konkav.

Seine Kanten haben den Zusammenhang des Oktaeders, in das er nebenbei bemerkt übergeführt werden kann, indem man obige Drehung rückgängig macht und um 60^0 weiterdreht. Infolgedessen kann ohne Einführung neuer Kanten unmöglich ein Tetraeder von ihm abgespalten werden. Die einzigen noch nicht gezogenen Verbindungslinien der sechs Eckpunkte sind aber diejenigen, welche den noch nicht verwendeten Diagonalen der Quadrate in der Ausgangsfigur entsprechen. Da sie vollständig außerhalb des Körpers liegen, kann dieser nicht in obigem Sinne in Tetraeder zerlegt werden.

Für $\vartheta = 60^0$ entsteht ein Körper, dessen Inneres in zwei getrennte Tetraeder zerfällt, und dessen Oberfläche zum Teil doppelt überdeckt ist.

Setzt man die Kantenlänge des Prismas gleich Eins, so liefert eine einfache Rechnung für die Länge d der Diagonalen d_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ die Beziehung:

$$d^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(60^0 + \vartheta).$$

Wie man hieraus ersieht, nimmt diese Länge bei wachsendem ϑ zu für $\vartheta < 30^0$, ab für $\vartheta > 30^0$ und erreicht bei $\vartheta = 30^0$ ihr Maximum. Hier verschwindet also die Ableitung der Kantenlänge nach ϑ, oder wenn man sich die Drehung etwa gleichförmig ausgeführt denkt, die Ableitung nach der Zeit. Das betreffende Polyeder ist somit im Blaschkeschen Sinne „wacklig“. Herr Blaschke hat die wackligen Achtflache in folgender Weise charakterisiert: Faßt man die acht Begrenzungsdreiecke des Achtflachs so in zwei Gruppen zusammen, daß keine zwei, verschiedenen

[4]) Die Fig. 1 zeigt ihn für den Fall $\vartheta = 30^0$ in schiefer Parallelprojektion.

Gruppen angehörigen Dreiecke eine Kante gemein haben, so müssen die vier Ebenen jeder Gruppe durch einen Punkt gehen. In unserer Figur bilden die drei an das Grunddreieck längs einer Kante angrenzenden Dreiecke mit dem Deckdreieck zusammen eine Gruppe, und wie unmittelbar einleuchtet, haben für $\vartheta = 30^0$ die vier entsprechenden Ebenen den Mittelpunkt des Deckdreiecks gemein. (Fig. 1.)

An einem aus Zeichenpapier leicht herzustellenden Modell läßt sich die Wackligkeit anschaulich machen. Da sich die Länge d in der Nähe von $\vartheta = 30^0$ überaus wenig ändert, läßt sich das Modell deutlich verdrehen, während es sich für andere Werte von ϑ starr anfühlt. Zu einem ebenen Netz, dessen Diagonalenlänge den Bedingungen:

$$2 < d^2 < 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

genügt, gehören zwei unzerlegbare Polyeder, deren Drehwinkel ϑ symmetrisch zu $\vartheta = 30^0$ liegen.

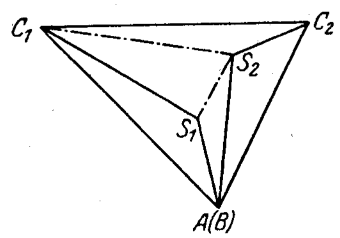
Es bleibt die Behauptung zu begründen, daß das beschriebene Polyeder das einfachste nicht zerlegbare ist.

Außer dem trivialen Fall des Tetraeders sind hier nur Polyeder mit fünf und sechs Ecken in Betracht zu ziehen. Jedes fünfeckige Dreieckspolyeder kann dadurch gebildet werden, daß man zwei Tetraeder mit einer gemeinschaftlichen Dreiecksfläche aneinandersetzt und diese Fläche wegnimmt[5]). Die gemeinsame Fläche liefert selbst die Zerlegung des entstandenen Polyeders, wenn ihre Ebene die Spitzen der Tetraeder trennt. Andernfalls muß die Spitze des einen Tetraeders innerhalb des andern liegen und man kann das Polyeder in drei Tetraeder zerlegen, welche die Verbindungslinie der beiden Spitzen zur gemeinsamen Kante haben. Die fünfeckigen Dreieckspolyeder sind somit alle zerlegbar.

Von sechseckigen Dreieckspolyedern gibt es bekanntlich[5]) außer dem Oktaedertypus noch einen zweiten. Ein Vertreter desselben entsteht aus einem Tetraeder durch Aufsetzen je eines weiteren Tetraeders auf zwei seiner Flächen. Wir bezeichnen die Ecken des Grundtetraeders T mit $A B C_1 C_2$. Auf $A B C_i$ $(i = 1, 2)$ werde das Tetraeder T_i mit Spitze S_i aufgesetzt. Liegen T_1 und T_2 getrennt und nicht beide innerhalb T, so läßt sich wenigstens eines dieser beiden Tetraeder ohne weiteres abtrennen. Es bleiben also nur die beiden Fälle zu erledigen, wo entweder S_1 und S_2 innerhalb T oder etwa S_1 außerhalb T und S_2 innerhalb T_1 liegen. Wir denken uns die Polyeder in der Richtung AB parallel auf eine Ebene projiziert. Den beiden genannten Fällen entsprechen die Figuren 2a und b.

[5]) Moebius Werke II, Nachlaß I, S. 532—533.

a)



b)

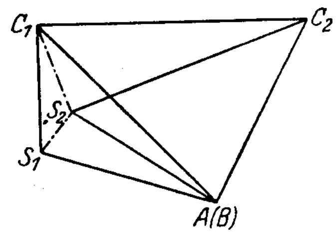


Fig. 2.

Im Fall a liegen $S_1 S_2$ und sicher eine der Strecken $S_1 C_2$ oder $C_1 S_2$, etwa $C_1 S_2$, ganz innerhalb des Polyeders, im Fall b ebenfalls $S_1 S_2$ und $C_1 S_2$. Im letzteren Fall können stets die Tetraeder $A S_2 C_1 C_2$ und $B S_2 C_1 C_2$ abgespalten werden, wobei ein fünfeckiges Dreieckspolyeder $A B C_1 S_1 S_2$ übrigbleibt, das wie oben in drei Tetraeder zerlegt werden kann. Dasselbe gilt für den Fall a, wenn S_1 innerhalb des Tetraeders $A B C_1 S_2$ liegt. Andernfalls verläuft auch die letzte noch mögliche Verbindungslinie $S_1 C_2$ innerhalb des Polyeders, womit die Zerlegung unmittelbar gegeben ist.

Somit sind die nicht dem Oktaedertypus angehörigen sechseckigen Dreieckspolyeder alle in Tetraeder zerlegbar.

Tübingen, 18. November 1926.

(Eingegangen am 2. 12. 1926.)