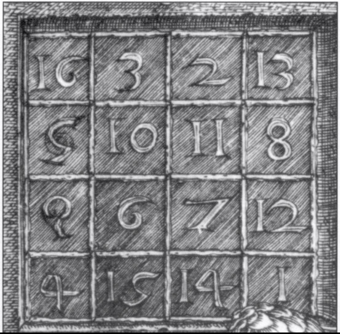
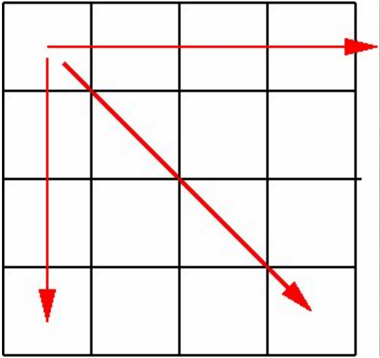
Geometría combinatoria de cuadrados mágicos, latinos, sudokus y otras tablas curiosas

Jesús A. De Loera
University of California, Davis

trabajo conjunto con Shmuel Onn (Technion Haifa Israel)



Cuadrados Mágicos



Cuadrados Latinos y Sudokus

M	A	G	I	C
G	I	C	M	A
C	M	A	G	I
A	G	I	C	M
I	C	M	A	G

8	3	5	4	1	6	9	2	7
2	9	6	8	5	7	4	3	1
4	1	7	2	9	3	6	5	8
5	6	9	1	3	4	7	8	2
1	2	3	6	7	8	5	4	9
7	4	8	5	2	9	1	6	3
6	5	2	7	8	1	3	9	4
9	8	1	3	4	5	2	7	6
3	7	4	9	6	2	8	1	5

Tablas de Contingencia y de Transportación

?	?	?	?	220
?	?	?	?	215
?	?	?	?	93
?	?	?	?	64
108	286	71	127	

En las tablas de **contingencia** las sumas son por renglones y columnas, los márgenes son las sumas de entradas en una columna o renglón concreta.

¿A quíen le interesa esto? ¿Para qué sirve?

- En **Estadística** tablas representan datos (e.g., número de gente de ojos azules con pelo café). Queremos saber si la tabla representa evidencia de que hay relaciones entre las características.
  Hay varias pruebas de independencia que requieren conocer todas las tablas con márgenes dados o por lo menos cuantas hay.
- En **Optimización** las tablas de transporte son usadas en problemas de asignación optima, logistica.
- En **combinatoria algebraica** nos interesa contar tablas por sus relaciones con teoría de representaciones del grupo simétrico (Kostka numbers, fórmula de RSK).

1	1	3
2	2	

1	1	2
2	3	

Geometría de tablas de $(n \times m)$

PARA RESPONDER A ESTAS PREGUNTAS COMBINATORIAS USAMOS GEOMETRIA!

?	?	?	?	220
?	?	?	?	215
?	?	?	?	93
?	?	?	?	64
108	286	71	127	

Nos interesa el conjunto de todas las posibles tablas cuyas sumas de columnas y renglones estan dadas por los **márgenes**. Es un convexo poliedral, un politopo convexo.

Ejemplo: El politopo de Birkhoff todos los márgenes son UNO.

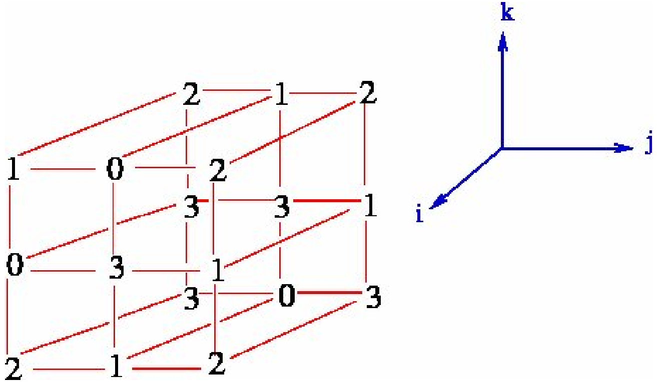
Politopos de transportation con multi-índices

Una d-**tabla de tamanõ** $(n_1, \ldots, n_d)$ es un tabla de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_d$ de números reales no negativos. $v = (v_{i_1,\ldots,i_d})$, $1 \leq i_j \leq n_j$.
Para $0 \leq m < d$, an m-**margen** de v es una m-tabla que se obtiene sumando las entradas de v sobre todos los índices excepto m de ellos que permanecen fijos.
Ejemplo Si $(v_{i,j,k})$ es una 3-tabla entonces:

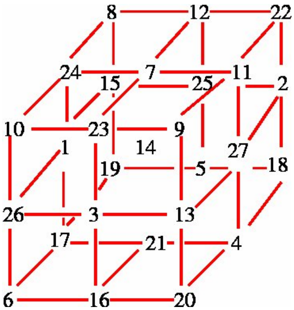
- El (único) 0-margen es $v_{+,+,+} = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} v_{i,j,k}$
- Sus 1-márgenes son $(v_{i,+,+}) = (\sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} v_{i,j,k})$ and likewise $(v_{+,j,+})$, $(v_{+,+,k})$.
- Sus 2-márgenes are $(v_{i,j,+}) = (\sum_{k=1}^{n_3} v_{i,j,k})$, similarmente $(v_{i,+,k})$, $(v_{+,j,k})$.

Definición: un **politopo de transportación con multi-índices** is el conjunto de todas las d-tablas con entradas reales no-negativas que tienen márgenes fijos.

EJEMPLO 0

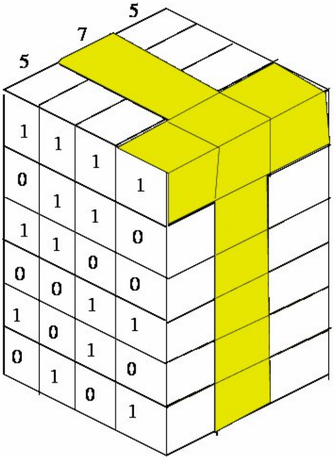


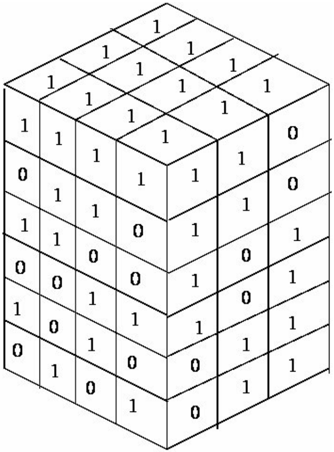
EJEMPLO 1



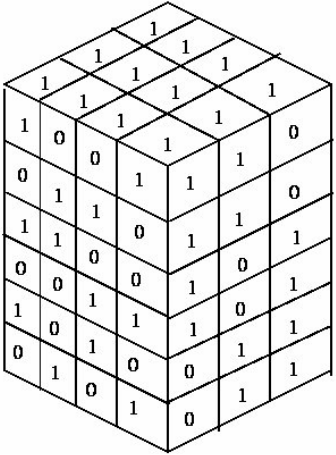
Si la suma en cada linea is igual una constante k (i.e. los 2-márgenes son tablas de k's). **El número de vertices del politopo es igual al número de cuadrados latinos.**

EJEMPLO 2





EJEMPLO 3



Trés problemas fundamentales

1. PROBLEMA DE EXISTENCIA: Dada una selección de márgenes que parecen definir una d-tabla de tamaño $(n_1 \times n_2 \times \ldots n_d)$, Existe una tabla verdadera con esos márgenes? Se puede calcular eficientemente? Hay una d-tabla con entradas de números enteros?
2. PROBLEMA DE ENUMERACIÓN: Dado una selección de márgenes, cuantas d-tablas con entradas enteras hay? Si los márgenes contienen parametros ,¿podemos escribir una fórmula?
3. PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN: Dados costos para cada entrada, el precio de una d-tabla es la suma de los costos multiplicado por las entradas. Cual es la tabla que minimiza el precio?

los politopos de transportación con multi-índices son mas misteriosos...

Los problemas de optimización y de existencia son super fáciles para politopos de transportación de 2 índices. ¿Porqué ? Por que se reduce aun problema de programación lineal (matrices totalmente unimodular).
Tambien los siguientes problemas tienen solución sencilla para politopos de transportación de 2 índices, pero estaban abiertos para 3 índices! Problemas propuestos por V. Vlach en 1986:

- ¿Hay una caracterización combinatoria (eficiente por favor!) en términos de los 2-márgenes que diga cuando un politopo de transportación de 3 índices es vacío?
- ¿Cuáles son las dimensiones posibles del politopo de transportación tamanõ $n \times m \times k$? Es siempre igual a $(n-1)(m-1)(k-1)$?

RESULTADOS

- **TEOREMA** La complejidad computacional del problema de EXISTENCIA para 3-tablas de tamanõ (r, c, h) with $3 \leq r \leq c \leq h$ con todos los 2-márgenes especificados:

	r, c, h fixed	r, c fixed, h variable	r fixed, c, h variable	r, c, h variable
binary 2-marginals	P	NPC	NPC	NPC

- **TEOREMA** La complejidad computacional del problema de ENUMERACION para 3-tablas de tamanõ (r, c, h) with $3 \leq r \leq c \leq h$ con todos los 2-márgenes especificados es:

	r, c, h fixed	r, c fixed, h variable	r fixed, c, h variable	r, c, h variable
binary 2-marginals	P	#PC	#PC	#PC

- **TEOREMA** La complejidad computacional del problema de OPTIMIZATION para 3-tablas de tamanõ (r, c, h) with $3 \leq r \leq c \leq h$ con todos los 2-márgenes especificados es:

	r, c, h fixed	r, c fixed, h variable	r fixed, c, h variable	r, c, h variable
binary 2-marginals	P	NPC	NPC	NPC

TEOREMA PRINCIPAL

Teorema (JDL & Shmuel Onn):

1. Cualquier politopo $P = \{y \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : Ay = b\}$ definido por una matriz $A = (a_{i,j})$ entera de $m \times n$ y vector entero b se puede re-escribir en tiempo polynomial como un politopo de transportación de 3 índices

$$T = \{\, x \in \mathbb{R}^{r \times c \times 3}_{\geq 0} \ : \ \sum_i x_{i,j,k} = w_{j,k} \ , , \ \sum_j x_{i,j,k} = v_{i,k} \ , \ \sum_k x_{i,j,k} =$$

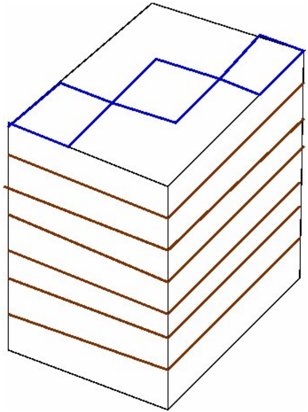
2. Cualquier politopo $P = \{y \in \mathbb{R}^n : \ Ay = b \ y \geq 0 \ \}$ se puede re-escribir en tiempo polinomial como **una cara** de un politopo de transportacion con 3 índices dado por 1-margenes. $T = \{\, x \in \mathbb{R}^{r \times c \times 3}_{\geq 0} \ : \ \sum_{i,j} x_{i,j,k} = w_k \ , \ \sum_{j,k} x_{i,j,k} = v_i \ , \ \sum_{i,k} x_{i,j,k} = u_j \,\}$.

Pasos del Algoritmo

Paso 1 Reducir el tamaño de los coeficientes:
Dado un politopo $P = \{y \geq 0 : Ay = b\}$ con $A = (a_{i,j})$ matriz entera b vector entero. Lo podemos representar como $Q = \{x \geq 0 : Cx = d\}$, donde $\{-1, 0, 1, 2\}$ son las entradas de la matriz $C = (c_{i,j})$:
Usar la expansión binaria $|a_{i,j}| = \sum_{s=0}^{k_j} t_s 2^s$ with all $t_s \in \{0, 1\}$, we rewrite this term as $\pm \sum_{s=0}^{k_j} t_s x_{j,s}$.
EXAMPLE: La ecuación $3y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 7$ se vuelve

$$\begin{array}{cccccccccc}
2x_{1,0} & -x_{1,1} & & & & & & = & 0 \\
 & & 2x_{2,0} & -x_{2,1} & & & & = & 0 \\
 & & & 2x_{2,1} & -x_{2,2} & & & = & 0 \\
 & & & & & 2x_{3,0} & -x_{3,1} & = & 0 \\
x_{1,0} & +x_{1,1} & -x_{2,0} & & -x_{2,2} & & +x_{3,1} & = & 7
\end{array} .$$

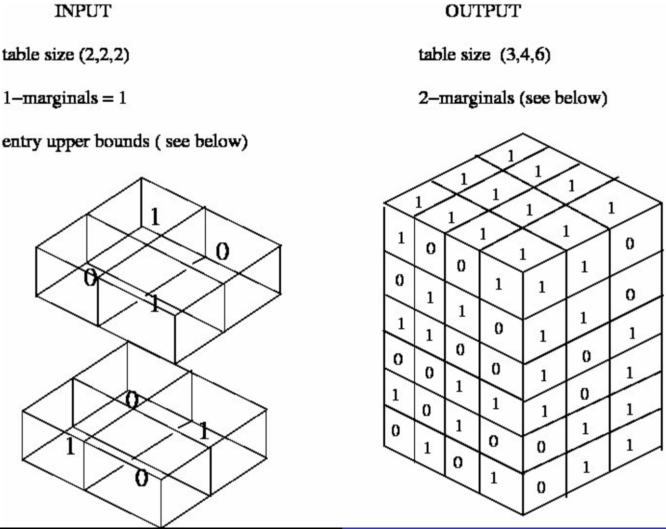
Paso 2 transformar el politopo original en un politopo de transportación con 1-márgenes y sus entradas estan acotadas



Cada ecuación se codifica en una “tabla horizontal”.
Cada variable se codifica en una “caja vertical’.’
Todas las otras entradas se llenan con ceros.

Paso 3 Re-escribir el politopo de transportación con 1-márgenes y sus entradas estan acotadas como un politopo de transportación con 2-márgenes

Ejemplo: del politopo $P = \{y | 2y = 1, \ y \geq 0\}$ obtenemos:



mas consecuencias

- **Corolario:** Todos los programas lineales o de programación lineal entera son equivalentes a un problema de optimización sobre un politopo de transportación de tamaño $3 \times r \times c$ dado por sus 2-margenes.
- **Corolario:** Todos politopo aparece como cara de un politopo de transportación de tamaño $3 \times r \times c$ dado por sus 1-margenes.
- **Corolario** Los problemas de EXISTENCIA, ENUMERACION, y OPTIMIZACIÓN sobre politopos de transportación con 3-índices so tan difíciles como para politopos convexos arbitrarios.
- **Corolario** La respuesta a todas las preguntas de Vlach 1986 es ¡NO!

En general los politopos de transportación con 3 índices son malos...pero hay buenas noticias:
Si se asume que la dimensión es fija existen algoritmos eficientes.

TEOREMA El problema de optimización lineal entera sobre un politopo de transportación de 3-índices dado por 2-márgenes is NP-duro, pero si **dos índices están fijos** se puede resolver en tiempo polinomial.

TEOREMA: Si $M_n(s)$ es el número de cuadrados magicos de $n \times n$ con suma magica s, entonces

$$\sum_{s=0}^{\infty} M_4(s) t^s = \frac{t^8 + 4t^7 + 18t^6 + 36t^5 + 50t^4 + 36t^3 + 18t^2 + 4t + 1}{(1-t)^4(1-t^2)^4}$$

Hay 163890864 posibles con suma mágica 34 (cuadrado de Dürer).

LattE Software

68	119	26	7	220
20	84	17	94	215
15	54	14	10	93
5	29	14	16	64
108	286	71	127	

There are
1.225.914.276.768.514 such tables.

- **LattE**=Algoritmos para manipular los puntos enteros de un politopo convexo: Contar los puntos enteros, escribir formulas parametricas, integracion sobre politopos. Primera implementacion del algoritmo de Barvinok. Software implementado en C++.
- **EQUIPO LattE:** M. Köppe, R. Hemmecke, B. Dutra, R. Yoshida, D. Haws, P. Huggins, J. Tauzer, J. Wu + JDL

Preguntas y Conjeturas Abiertas

- ¿És verdad que la gráfica de un politopo de transportación con 2 índices es siempre hamiltoniana?
- **Conjetura:** Todos los números enteros entre 1 y $m + n - 1$, son los posibles diámetros de las gráficas de politopos de transportación de $m \times n$
- Supongamos $\phi_1(m, n), \phi_2(m, n), \ldots, \phi_{t_{m,n}}(m, n)$ son todos los posibles números of vertices de un politopo de transportación $m \times n$. Dar una fórmula for $t_{m,n}$, explicar la distribución posible.
- ¿ Cúal es el número mas grande de vertices posible para un politopo de transportación de $n \times m \times k$ (3 índices) dado por 2-márgenes?
  (The YKK conjecture 1988) El politopo de tamanõ $m \times n \times k$ cuyos 2-márgenes son $n \times k$ matriz $U(j, k) = m$, the $m \times k$ matriz $V(i, k) = n$, y la $m \times n$ matriz $W(i, j) = k$.
  ¡FALSO! (JDL & S. Onn)

¡Mil Gracias!

Transparencias disponibles en

`http://www.math.ucdavis.edu/~deloera/mytalks.htm`

Software disponible en

`http://www.math.ucdavis.edu/~deloera/RECENT_WORK/recent.html`

Email: deloera@math.ucdavis.edu