Алгебры Гекке, бимодули Зоргеля и инварианты узлов

Лекция 1 | ① Группы Коксетера

Опр Пара (W,S) называется группой Коксетера, если W — группа с образующими $S=\{s_1 \dots s_n\}$ и соотношениями

$$(1)\ s_i^2=1 \qquad (2)\ \underbrace{s_is_js_i\cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_js_is_j\cdots}_{m_{ij}}$$

для некоторых целых чисел $m_{ij}=m_{ji}>1$.

Замечание: Если $m_{ij}=2$, то $s_is_j=s_js_i$.

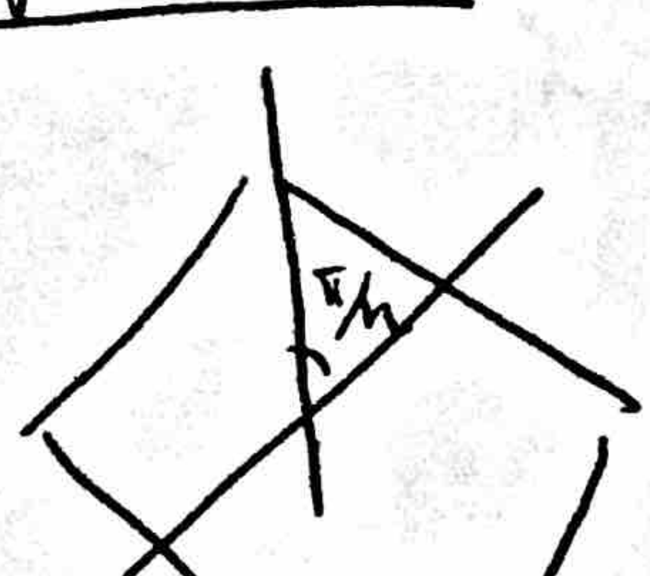
Лемма: При условии (1), (2) $\Longleftrightarrow$ $(s_is_j)^{m_{ij}}=1$.

Д-во: Пусть m_{ij} нечётно, тогда (2) имеет вид
$s_is_js_i\cdots s_js_i = s_js_is_j\cdots s_is_j$. Умножим обе части справа на $\underbrace{s_js_i\cdots s_is_j}_{m_{ij}}$:

$$(s_is_j)^{m_{ij}} = \underbrace{s_is_js_i\cdots s_js_i}_{m_{ij}}\underbrace{s_js_i\cdots s_is_j}_{m_{ij}} = \cancel{s_js_is_j}\cdots\cancel{s_is_js_js_i}\cdots\cancel{s_is_j} = 1$$

Доказательство для чётного m_{ij} аналогично □.

Примеры (a) Группа диэдра $I_2(n)$ порождена двумя отражениями s_1, s_2 ~~относит~~ относительно прямых, образующих угол в π/n. Поэтому



s_1s_2 — поворот на $\frac{2\pi}{n}$, и $(s_1s_2)^n=1$.

Можно проверить, что других соотношений нет.

(б) Группа подстановок S_n

$s_i = (i\ i{+}1)$ $\quad i=1\ldots n-1$ простые транспозиции

$s_i^2=1$, $\quad s_i s_j = s_j s_i$ если $|i-j|\geq 2$

$s_i s_{i+1} s_i = (i\ i{+}1)(i{+}1\ i{+}2)(i\ i{+}1) = (i\ i{+}2) = s_{i+1} s_i s_{i+1}$

т.е. $m_{ij}=2$, если $|i-j|\geq 2$, и $m_{i,i+1}=3$.

(в) Группа симметрий треугольного паркета $\tilde{A}_2$

W порождена тремя отражениями s_1, s_2, s_3 относительно прямых, образующих углы в $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ попарно, Как и в (а) $(s_1s_2)^3=(s_2s_3)^3=(s_1s_3)^3$

$s_1^2=s_2^2=s_3^2=1$, то есть $m_{ij}=3$

В отличие от примеров (а) и (б), группа W бесконечна, так как, например, содержит параллельные переносы.

Теорема (Коксетер) (а) Всякая конечная группа, порождённая отражениями в $\mathbb{R}^n$, изоморфна группе Коксетера (~~[illegible]~~ и углы между гиперплоскостями отражений равны $\frac{\pi}{m_{ij}}$).

(б) Всякая конечная группа Коксетера допускает реализацию как группа, порождённая отражениями в $\mathbb{R}^n$.

Для бесконечных групп Коксетера ~~[illegible]~~ реализацию построить сложнее, тем не менее, их можно увидеть так:

Пусть $a_{ij} = \begin{cases} 2, & i=j \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right), & i\neq j \end{cases}$

Рассмотрим векторное пространство V с базисом $\{\alpha_i\}$ и определим $S_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i$.

Другими словами, $S_i(\alpha_i) = -\alpha_i$

$$S_i(\alpha_j) = \alpha_j + 2\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)\alpha_i, \quad i\neq j$$

Можно проверить, что это задаёт представление W в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $\xi_{ij} = \cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)$ — алгебраическое число, поэтому представление определено над всеми полями, над которыми минимальный многочлен ξ_{ij} имеет корень (для всех i,j).

Это представление можно обобщить следующим образом: рассмотрим представления W, в которых S_i диагонализуется с $(n-1)$ собственными числами $(+1)$ и одним собственным числом (-1).

(char $k \neq 2$).

Пусть α_i – собственный вектор с с.з. (-1),
тогда $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$, и $s_i\big|_{V/\langle \alpha_i \rangle} = \mathrm{id}$.

Поэтому существуют ковекторы $\alpha_i^\vee$ такие, что

$$\boxed{s_i(v) = v - (\alpha_i^\vee, v)\,\alpha_i} \qquad (*)$$

Такие представления наз. <u>реализациями</u> W. Они определяются "матрицей Картана" $A = (\alpha_i^\vee, \alpha_j)$, которая может быть и несимметричной. Условие $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$ эквивалентно некоторому алгебраическому условию на $a_{ij} = (\alpha_i^\vee, \alpha_j)$ и $a_{ji} = (\alpha_j^\vee, \alpha_i)$, которое можно выписать явно (см. напр. arxiv: 1308.6611 Appendix A).

Так как группа W явно задана образующими и соотношениями, можно определить следующие понятия:

<u>Опр</u> Представление $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ наз. ~~[illegible]~~ приведенным выражением для w, если k – минимально возможное. В этом случае k называется <u>длиной</u> w и обозначается $l(w)$.

<u>Лемма</u> $w \longrightarrow (-1)^{l(w)}$ задает одномерное представление W.

<u>Д-во</u> Зададим гомоморфизм $W \longrightarrow \{\pm 1\}$ формулой $s_i \longrightarrow (-1)$, тогда $s_i^2 = 1$ и $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$ выполнены $\Rightarrow$ гомоморфизм групп корректно определен. $\square$.

<u>Следствие</u> $l(u) + l(w) \equiv l(uw) \mod 2$ для всех $u, w \in W$.

Лемма $\ell(ws)=\ell(w)\pm 1$ для всех $w\in W$ и $s\in S$.

Д-во: Ясно, что $\ell(ws)\le \ell(w)+1$. Кроме того,

$\ell(w)\le \ell(ws^2)\le \ell(ws)+1$, поэтому

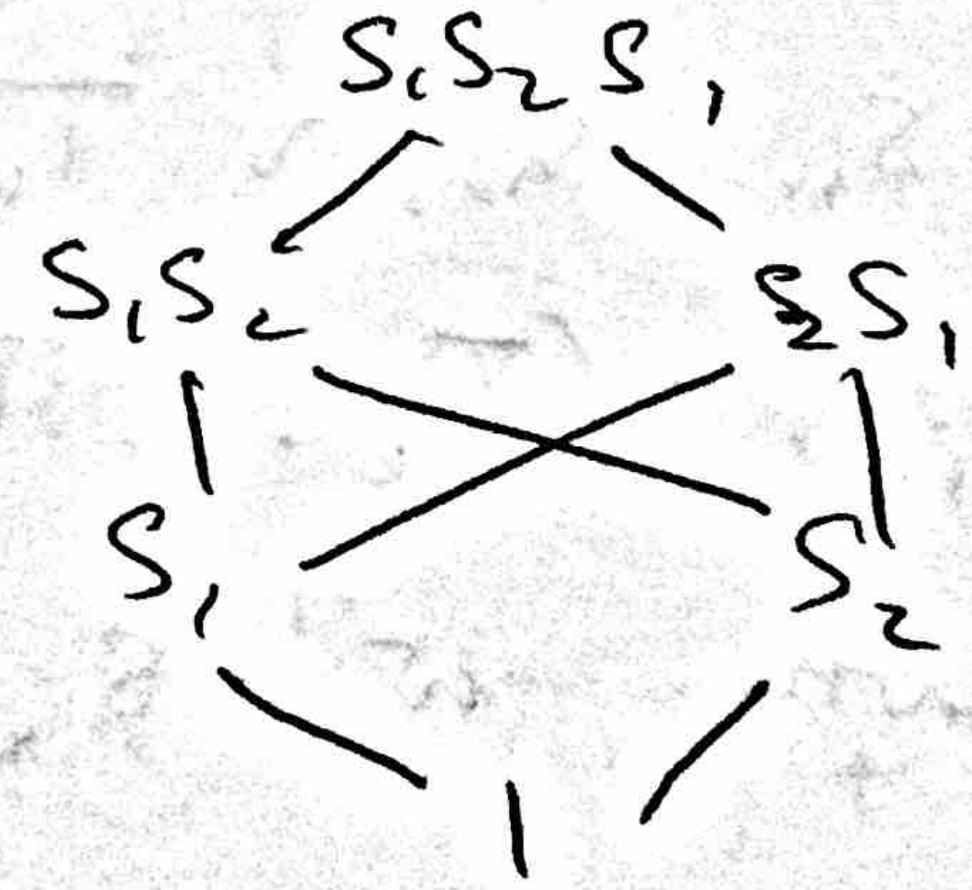
$\ell(w)-1\le \ell(ws)\le \ell(w)+1$. Т.к. по пред. следствию

$\ell(ws)\ne \ell(w)$, получаем $\ell(ws)=\ell(w+1)$ или $\ell(ws)=\ell(w)-1$.

Лемма (Matsumoto) Пусть $w=s_{i_1}\dots s_{i_k}=s_{j_1}\dots s_{j_k}$ — два приведенных выражения для w. Тогда они связаны последовательностью соотношений (2): $\underbrace{s_is_j\dots}_{m_{ij}}=\underbrace{s_js_i\dots}_{m_{ij}}$. подряд

Порядок Брюа Скажем, что $u\le w$, если какое-то приведенное выражение для u является подсловом в некотором прив. выражении для w.

Пример: $S_3=\langle s_1,s_2\rangle$



② Алгебра Гекке

Опр Алгеброй Гекке группы Коксетера $H(W,S)$ наз. алгебра с образующими T_i и соотношениями:

(1') $(T_i-q)(T_i+1)=0$

(2) $\underbrace{T_iT_j\dots}_{m_{ij}}=\underbrace{T_jT_i\dots}_{m_{ij}}$

Замеч При $q=1$ получаем $H_{q=1}=\mathbb{Z}[W]$.

Стандартный базис Пусть $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ — привед. выражение

Тогда определим $T_w = T_{i_1} \dots T_{i_k} \in H(W,S)$

По лемме Мацумото не зависит от приведенного выражения!

Нетрудно видеть, что:

- T_w образуют базис в $H(W,S)$
- $T_w \cdot T_u = T_{wu}$, если $\ell(wu) = \ell(w) + \ell(u)$.

Из квадратичного соотношения (1') получаем:

$T_i(T_i - q + 1) = q$, $T_i^{-1} = q^{-1} T_i - 1 + q^{-1}$, т.е. T_i обратима.

Лемма $H(W,S)$ допускает инволюцию (Каждана-Люстига) т.ч. $\overline{q} = q^{-1}$, $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$ и $\overline{T_i} = T_i^{-1}$.

Лемма $\overline{T_w} = T_{w^{-1}}^{-1}$

Д-во Если $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$, то $T_w = T_{i_1} \dots T_{i_k}$, т.е.

$$\overline{T_w} = T_{i_1}^{-1} \cdots T_{i_k}^{-1} = (T_{i_k} \cdots T_{i_1})^{-1}$$

С другой стороны, $w^{-1} = s_{i_k} \dots s_{i_1}$, т.е. $\overline{T_w} = T_{w^{-1}}^{-1}$. □