

Лемма 2 Тер (Картан - Люстер) Гусевых
 эквивалентно равенству $H(S, W) \cong \mathbb{C}$. $\overline{b}_w = b_w$
 и $b_w = q^{-l(w)/2} \left(T_w + \sum_{y < w} P_{w,y}(q) T_y \right)$

где $P_{w,y}(q)$ - многочлен от q степени $\leq \frac{l(w) - l(y) - 1}{2}$.

Лемма Пусть $b_i = q^{-1/2} (T_i + 1)$, тогда $\overline{b}_i = b_i$.

Доказ. $\overline{b}_i = q^{1/2} (\overline{T}_i + 1) = q^{1/2} (T_i^{-1} + 1) = q^{1/2} (q^{-1} T_i + 1 + q^{-1} + 1)$
 $= q^{-1/2} (T_i + 1) = b_i \quad \square$

Пример S_3 : легко видеть, что $\overline{b}_1 = b_1$ и $\overline{b}_2 = b_2$.

Замечание: $b_1 = q^{-1/2} (T_1 + 1)$, $\overline{b}_2 = q^{-1/2} (T_2 + 1)$

$$b_{12} = b_1 b_2 = q^{-1} (T_1 T_2 + T_1 + T_2 + 1)$$

$$b_{21} = b_2 b_1 = q^{-1} (T_2 T_1 + T_1 + T_2 + 1)$$

$$b_1 b_2 b_1 = q^{-3/2} (T_1 + 1) (T_2 T_1 + T_1 + T_2 + 1)$$

$$= q^{-3/2} (T_{121} + \underbrace{T_1^2}_{=q(T_1+1)} + T_1 T_2 + \underbrace{T_1}_{=q^{-1}(T_1+1)} + T_2 T_1 + T_1 + T_2 + 1)$$

Заметим, что $T_1^2 + T_1 = q(T_1 + 1)$, поэтому

$$b_1 b_2 b_1 = q^{-3/2} (T_{121} + T_1 T_2 + T_2 T_1 + T_1 + T_2 + 1) = b_{121} + q^{-1/2} (T_1 + 1) = b_1$$

аналогично $b_{121} = b_{121} - b_1$, легко, что $\overline{b}_{121} = b_{121}$.

Аналогично если $\frac{ws}{w} > w$, то $T_w T_s = T_{ws}$, $T_w b_s = q^{-1/2} T_{ws} + q^{-1/2} T_w$
 Если $\frac{ws}{w} < w$, то $T_w b_s = q^{1/2} (T_{ws} + T_w)$.

Далее если $\frac{ws}{w} > w$, то $T_w b_s = T_w (T_s + 1) = q^{-1/2} (T_{ws} + T_w)$.

Если $\frac{ws}{w} = u < w$, то $w = us$, и $T_w = T_u T_s$, тогда

$$T_w b_s = q^{-1/2} (T_u T_s (T_s + 1)) = q^{-1/2} T_u (T_s^2 + T_s) = \\ = q^{1/2} T_u (T_s + 1) = q^{1/2} (T_w + T_{ws}).$$

D-бс равенство: Справедливо по определению $l(w)$

Пусть рассмотрим $b_w = q^{-l(w)/2} (T_w + \sum_{y < w} P_{w,y}(q) T_y)$,

$$\text{тогда } b_w b_s = q^{-l(w)/2} (q^{-1/2} T_{ws} + q^{-1/2} T_w) + \\ + q^{-l(w)/2} \sum P_{w,y}(q) T_y \cdot b_s$$

учитывая, что
 независимы

Если $l(y_s) > l(y)$ то по определению $T_y b_s = q^{-1/2} (T_y + T_{ys})$,
 и в том же T_u имеет соответствующее значение.

Если $l(y_s) < l(y)$, то $T_y b_s = q^{1/2} (T_y + T_{ys}) = q \cdot q^{-1/2} (T_y + T_{ys})$,

и соответственно в $b_w b_s$ при T_y будет такое значение

deg $P_{w,y}(q) + 1$. (замечая, что $l(ws) = l(w) + 1$).

Т.к. deg $P_{w,y}(q) \leq \frac{l(w) - l(y) - 1}{2}$, то независимость имеет

следующее значение:

$$\frac{l(w) - l(y) - 1}{2} + 1 - \left(\frac{l(w) + 1}{2} \right) = -\frac{l(y)}{2}, \text{ и это можно}$$

- 8 -

уменьшить, вычитая из
 соответствующего k -го

Более подробный анализ коэффициентов дает
более фундаментальная формула для $P_{w,y}$.

Лемма (Кокс-Локс) а) ~~Для~~ ~~любой~~ $P_{w,y}$ имеют
целые неотрицательные коэффициенты

б) $b_w b_u = \sum c_{w,u}^v(q) b_v$, где $c_{w,u}^v(q)$ имеют
целые неотрицательные коэффициенты

Лемма была доказана для групп Вейля в 1980-е
(Кокс-Локс, Бейкин-Бернштейн, Дашкевич, Камилера...)
при помощи алгебраической геометрии многообразий
Шуберта. Коэффициенты $P_{w,y}$ тесно связаны с
теорией представлений соответствующей алгебры Ли.

Для других групп Коксера вопрос был решен
более поздно, и лемма была доказана только
в 2014 в работе B. Elias, G. Williamson "The Hodge theory of
Sergei bimodules".

3) Бимодули Зорнера

Пусть (W, S) — группа Коксера, выберем её реализацию
 V в конечномерном векторном пространстве. Тогда алгебра $R = \mathbb{K}[T^{\pm 1}]$
 $= \text{Sym } V$.

Для $s \in S$ рассмотрим инвариантное подпространство

$$R^s = \text{Sym}(V^s) \otimes \mathbb{K}[d_s^2]$$

Легко видеть, что R — свободный модуль над R^s ранга 2.

Определить R - R идеалы $B_S = R \otimes_R R$

Надо $B_S \otimes_R B_S \cong B_S \oplus B_S$

Дано: Дано кольцо R с идеалом S и V
и $s(x) = -x$. Тогда $R^S = K(x^2)$, и $B_S = \frac{K[x, y]}{x^2 = y^2}$.

Следовательно, $B_S \otimes_R B_S = \frac{K(x, y, z)}{x^2 y^2 = z^2} = \frac{K(x, z)}{x^2 = z^2} \oplus y \frac{K(x, z)}{x^2 = z^2} =$

как $K(x, z)$ -модуль $= B_S \oplus B_S$.
 $\Rightarrow$ R - R идеалы $\square$.

Опр Идеалы Борта - Камерсона называются

идеалами Борта $B_{S_{i_1}} \otimes_R \dots \otimes_R B_{S_{i_k}} = R \otimes_{R^{S_{i_1}}} \dots \otimes_{R^{S_{i_k}}} R$

Теор (Svergel) Пусть $w = S_{i_1} \dots S_{i_k}$ - произвольное представление.

Тогда: а) Идеалы Б-С $B_{S_{i_1}} \otimes \dots \otimes B_{S_{i_k}}$ содержат идеалы
неразрешимые идеалы B_w , которые не являются
б) идеалами Борта - Камерсона меньшей длины.

а) B_w не зависит от выбора представления

б) Любые неразрешимые идеалы в идеалах Борта - Камерсона

идеалы Борта - Камерсона изоморфны идеалу из B_w .

Следствие $B_w \otimes B_u \cong \bigoplus C_{u, w}^v B_v$ где $C_{u, w}^v$ - некоторые
целые неотрицательные $C_{u, w}^v$.

Дано B_w - идеал идеала в $B_{S_{i_1}} \otimes \dots \otimes B_{S_{i_k}}$

B_u - идеал идеала в $B_{S_{j_1}} \otimes \dots \otimes B_{S_{j_l}}$

$\Rightarrow B_w \otimes B_u$ - идеал идеала в $B_{S_{i_1}} \otimes \dots \otimes B_{S_{i_k}} \otimes B_{S_{j_1}} \otimes \dots \otimes B_{S_{j_l}}$

$\Rightarrow$ по с. Зорнен $B_w \otimes B_v$ раскладывается в сумму
сумму нескольких копий B_v . $\square$

По построению, все B_w изобразованы (~~как~~ обычно
вспомогательные в R и имеют степень 2),
поэтому все дивизоры $B-C$ и B_w также изобразованы.

Опр ~~Б~~ Бидивизор Зорнен — локаль сумм B_w (с
свободными изобразовками). Категория бидивизоров Зорнен
 SBM задана относительно $\oplus, \otimes$ и свободных изобразовок.

Определим разностную (split) группу Гротендика $K_0(SBM)$
как аддитивную группу, порожденную классами изоморфизма
объектов $[E]$ по закону соотношения $[E] + [F] = [E \oplus F]$
и $[E(1)] = q[E]$.

Тем (Serre) а) $K_0(SBM)$ — свободная абелева группа над
 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, порожденная $[B_w]$, $w \in W$.

б) $K_0(SBM) \cong H_1(W, S)$ как коалгебра ($[E] \cdot [F] = [E \otimes F]$)
и $[B_{s_i}] = b_{s_i}$.

Часть (а) следует из известной теоремы Зорнена. Для
части (б) см. т.н. "отображение характеров"
 $K_0(SBM) \longrightarrow H(W, S)$, построенное Зорненем.

Опр Назовем стандартным бидивизором R_w бидивизор,
изоморфизм R как векторное пространство, на котором
линейные R стандартно, а w действует по v .

Важное замечание: R_w не является гомологическим спектром (для $w \neq 1$).

Замечая, что B_S может быть фильтровано R_w :

Если $R = K[x]$, то $B_S = \frac{K[x, y]}{x^2 = y^2}$.

~~Важно отметить, что R_w не является гомологическим спектром, так как оно не является локальным. В частности, для $w \neq 1$ элемент x является делителем нуля в R_w , что не позволяет использовать стандартные методы гомологической алгебры для доказательства того, что R_w является гомологическим спектром.~~

Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \frac{K[x, y]}{x-y} \xrightarrow{x+y} B_S \rightarrow \frac{K[x, y]}{x+y} \rightarrow 0$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $R \quad \quad \quad R_S$

т.е. в B_S есть идеалы, изоморфные R , и фактор изоморфен R_S . Аналогично, можно показать, что гомологический спектр — Салемского фильтрован R_w .

Лемма (Serre) Гомологический спектр гомоморфизма канонически фильтрован стандартными гомологическими R_w , вложен с разложением в идеалы. Образован $[E] \rightarrow \text{ch}(\text{gr } E)$, где $\text{gr } E$ — градуированное разложение E относительно этой фильтрации, и $\text{ch}(R_w) = T_w$ задает ~~канонический~~ изоморфизм

$$K_0(\text{SBim}) \xrightarrow{\sim} H_1(W, S).$$

Следствие Если $E \in \text{SBim}$, то $\text{ch}(\text{gr } E)$ раскладывается по T_w с целыми неотрицательными коэффициентами

Тест (Elias-Williamson) для вещественных реализаций
(уравновешенных неопорной ф-и - $u(b_i)$) выполняется
 $[B_w] = b_w$, где b_w - базис Кахрана - Хосона.

Следствие Тимотца Кахрана - Хосона верна!

Задняя модаль группа Кокстера порождает вещественную
реализацию (см. лекция 1). Вообще говоря, конструируя
дифференциал Зорнера зависит от реализации, и классы
 $[B_w]$ могут давать разные базисы в алгебре Тейлора.
Даже в характеристике 0 есть примеры реализаций,
в которых $[B_w] \neq b_w$. В характеристике p базис $[B_w]$
называется "p-canonical basis" и активно изучается
в работах G. Williamson и соавтор.

Пример Для S_3 получаем

$$B_1 \otimes B_2 \otimes B_1 \cong B_1 \oplus B_{121}, \text{ где}$$

$$B_{121} \cong \bigoplus_{R^{S_3}} R \otimes R. \text{ Это вычисление наглядно}$$

вычислено $b_1 b_2 b_1 = b_1 + b_{121}$ в базисе Кахрана - Хосона
в начале лекции.