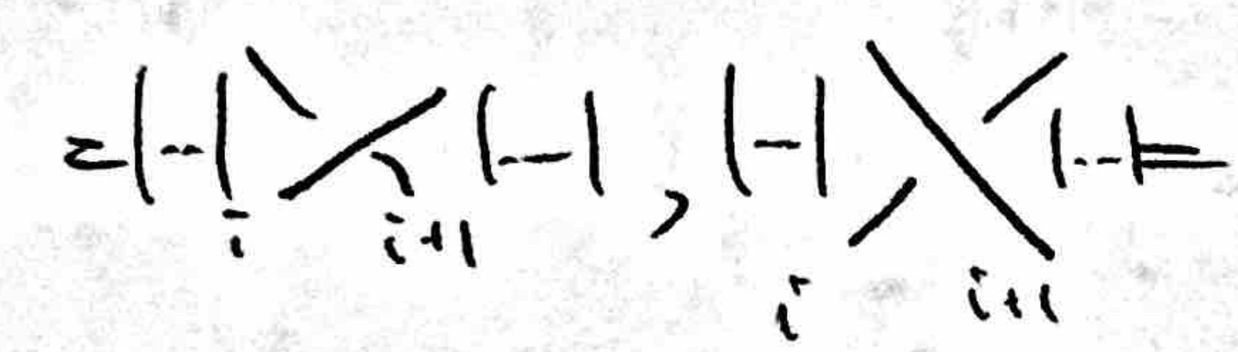
Лекция 3: В этой лекции мы будем работать только с группой $W = S_n$.

Опр Группой кос (типа A_{n-1}) наз. группа

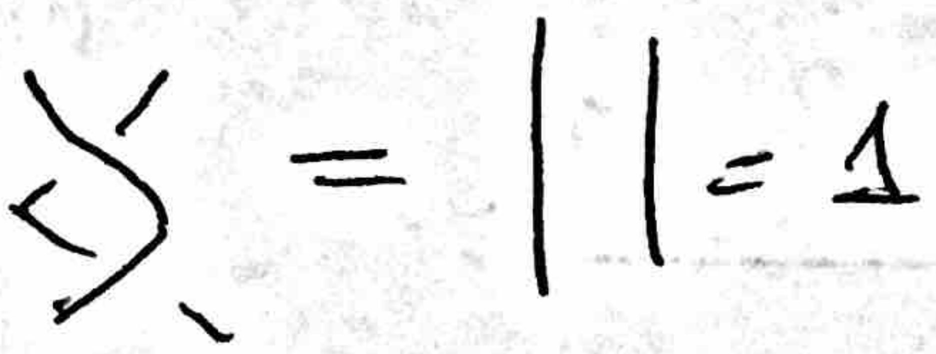
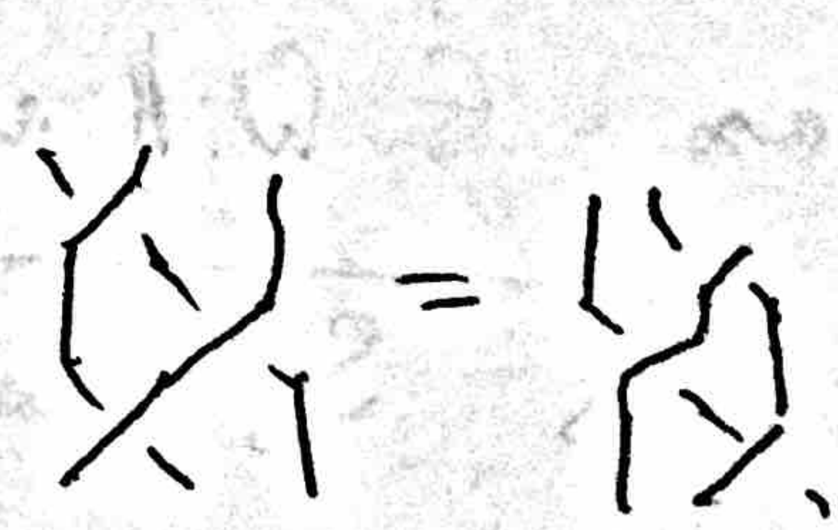
$$Br_n = \langle \sigma_1 \ldots \sigma_{n-1},\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ |i-j|\geq 2 \rangle.$$

Ясно, что $S_n = Br_n / \langle \sigma_i^2 = 1 \rangle$.

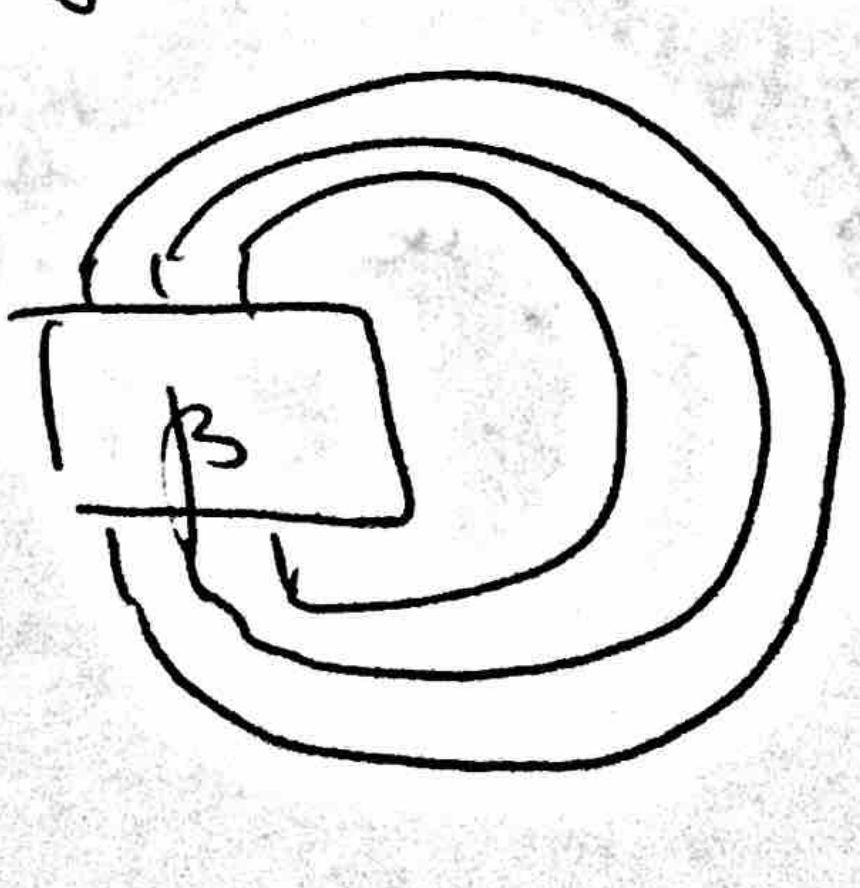
Образующие Br_n можно изображать графически:

$\sigma_i =$  $= \sigma_i^{-1}$, умножение = вертикальная композиция.

Соотношения имеют простой геометрический смысл:

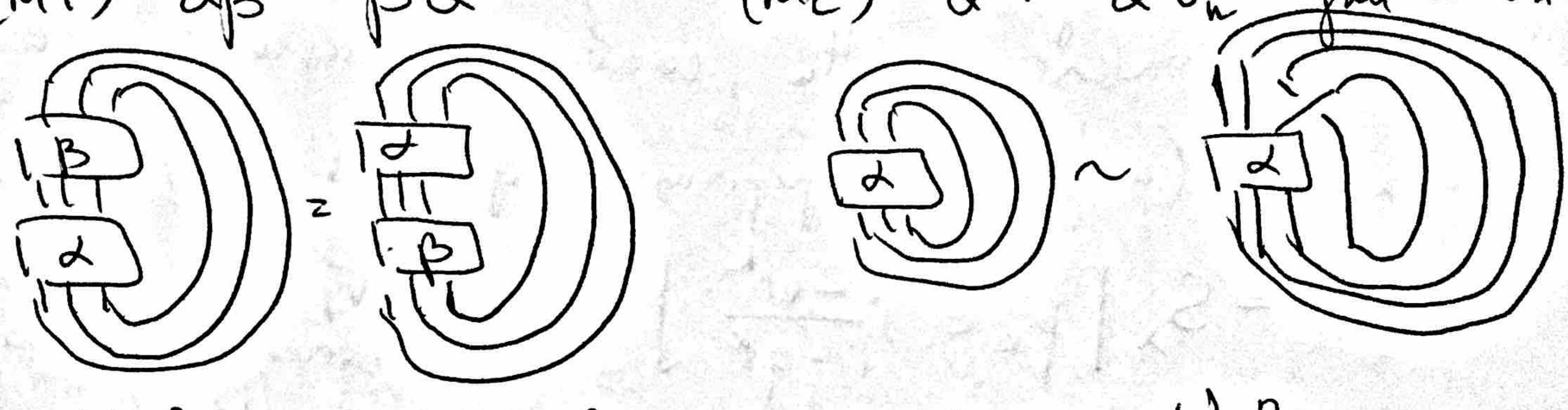
$\sigma_i\sigma_i^{-1} =$  $= 1$, $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i =$  $= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

Теор (Александер) Любой узел или зацепление в $\mathbb{R}^3$ можно представить как замыкание косы:

$\bar\beta =$ 

Теор (Марков) $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ задают один и тот же узел тогда и только тогда, когда α и β связаны цепочкой преобразований

(M1) $\alpha\beta \sim \beta\alpha$ (M2) $\alpha \sim \alpha\sigma_n$ для $\alpha \in Br_n$



Сл-вие: Инварианты узлов = функции на $\bigcup_n Br_n$, не меняющиеся при (M1) и (M2).

Теор (Jones, Ocneanu) Существует единственная система функций $tr_n : H_n \longrightarrow \mathbb{C}[q^{\pm 1}, z]$

т.ч. (а) $tr_n(ab) = tr_n(ba)$

(б) $tr_n(i(a)) = tr_n(a)$

(в) $tr_n(i(a)T_{n-1}) = z\, tr_n(a)$,

где H_n = алгебра Гекке S_n, а $i : H_n \longrightarrow H_{n+1}$ – естественное вложение.

Д-во: Конструкция 1. Можно проверить, что $\forall w \in S_n$ существует приведенное выражение, содержащее s_{n-1} не более 1 раза: $w = a s_{n-1} b$, где $a, b \in S_{n-1}$.

Тогда $T_w = T_a T_{n-1} T_b \Rightarrow$ определим

$$tr_n(T_w) = tr_n(T_a T_{n-1} T_b) = tr_n(T_b T_a T_{n-1}) = z\, tr_{n-1}(T_b T_a)$$

Так можно задать tr_n на всех стандартных образующих T_w и линейно продолжить на H_n.

Джонс доказал, что построенный таким образом функционал удовлетворяет (e).

<u>Конструкция 2</u> $\quad tr_n(a) = \sum_\lambda c_\lambda \cdot tr\left(a|_{V_\lambda}\right)$, где

V_λ = неприводимое представление H_n, соответствующее диаграмме Юнга λ (и деформирующее представление S_n), а $c_\lambda = S_\lambda\left[p_k = \frac{1-w^k}{1-q^k}\right]$ для w, связанного с z (p_k = степенные суммы) заменой переменных, и S_λ = функция Шура. При $w = q^N$ получается $c_\lambda = S_\lambda(1, q, \dots, q^{N-1})$.

Эта теорема позволяет построить инвариант узлов и зацеплений, т.н. многочлен HOMFLY-PT.

<u>Теор</u> (Джонс, Оснеану) Для некоторых (явно зависящих от z и q) констант λ, μ функция

$$\beta \in Br_n \longrightarrow \tilde\beta \in H_n \longrightarrow \lambda^n \mu^{\varepsilon(\beta)} tr_n(\tilde\beta)$$

инвариантна относительно (M1)–(M2) и, следовательно, задает инвариант узлов. Здесь $\varepsilon(\beta)$ — гомоморфизм $Br_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ т.ч. $\varepsilon(\sigma_i) = 1$, $\varepsilon(\sigma_i^{-1}) = -1$.

Напомним, что простейшие бимодули Зоргеля определяются как

$$B_i = R \otimes_{R^{s_i}} R = \frac{\mathbb{C}[x_1 \ldots x_n, x_1' \ldots x_n']}{\begin{array}{c} x_i + x_{i+1} = x_i' + x_{i+1}' \\ x_i x_{i+1} = x_i' x_{i+1}' \\ x_j = x_j',\ j \neq i, i+1 \end{array}}.$$

Определим двучленные комплексы:

$$F_i = [B_i \longrightarrow R] \qquad F_i^{-1} = [R \longrightarrow B_i]$$

<u>Теор</u> (Rouquier) Комплексы F_i, F_i^{-1} удовлетворяют соотношениям группы кос с точностью до гомотопической эквивалентности

<u>Пример</u> $F_i \otimes F_i^{-1} = [B_i \longrightarrow R] \otimes [R \longrightarrow B_i]$

$$= \left[B_i \longrightarrow \begin{array}{c} R \\ \oplus \\ B_i^2 \end{array} \longrightarrow B_i\right] \simeq R, \text{ т.к. } B_i^2 \simeq B_i \oplus B_i.$$

<u>Следствие</u> Для любой косы β определен комплекс $F(\beta) =$ произведение F_i, F_i^{-1}, с точностью до гомотопической эквивалентности.

<u>Опр</u> Гомологии Хованова-Розанского:

$$KhR(\beta) = H^*(\mathrm{Hom}(R, F(\beta)))$$

<u>Теор</u> (Хованов, Розанский) $KhR(\beta)$ удовлетворяет (M1)–(M2) $\Rightarrow$ инвариант узлов и зацеплений.

Пример $\beta =$  $= \sigma_1^2$, $\bar\beta =$  зацепление Хопфа

$$F(\beta) = F_1 \otimes F_1 = [B_1 \longrightarrow R] \otimes [B_1 \longrightarrow R]$$
$$\simeq [B_1^2 \longrightarrow 2B_1 \longrightarrow R] \simeq [B_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow R].$$

Можно проверить, что $\mathrm{Hom}(R, B_1) = \mathrm{Hom}(R, R) = R$, поэтому $\mathrm{Hom}(R, F(\beta)) = [R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{x_1 - x_2} R]$

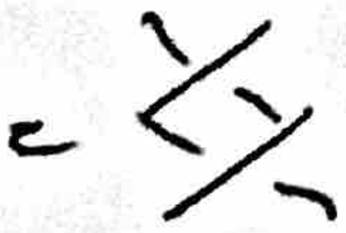
Следовательно, гомологии Хованова-Розанского зацепления Хопфа изоморфны $R \oplus R/(x_1 - x_2)$.
(и, в частности, зацепление не развязывается).

Факт ~~...~~ Определено билинейное умножение
$$KhR(\alpha) \otimes KhR(\beta) \longrightarrow KhR(\alpha\beta).$$

Следствие ~~...~~ Пусть $\varphi = ($$)^n$ = поворот на 360°

Это центральный элемент в группе кос. Тогда $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} KhR(\varphi^k)$ — градуированная алгебра, а для любой косы β, $M_\beta = \bigoplus_{k=0}^{\infty} KhR(\beta \cdot \varphi^k)$ — градуированный A-модуль $\Rightarrow$ (квази) когерентный пучок на $\mathrm{Proj}\, A$.

Теор (G.-Хоганкамп) $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} KhR(\varphi^k) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} J^k/(y)J^k$, как град. алгебры
где $J \subset \mathbb{C}[x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n]$ — идеал, порожденный антисимметрическими многочленами.

<u>Пример</u> $n=2$, $k=1$, тогда $\varphi =$ 

$$J = (\underset{\overset{\shortparallel}{z}}{x_1-x_2},\ \underset{\overset{\shortparallel}{w}}{y_1-y_2}) = \frac{\mathbb{C}[x_1,x_2,y_1,y_2]\langle z,w\rangle}{z(y_1-y_2)=w(x_1-x_2)}$$

$$J/(y)J = \frac{\mathbb{C}[x_1,x_2]\langle z,w\rangle}{w(x_1-x_2)=0} = R \oplus R/(x_1-x_2).$$

<u>Теор</u> (Хайман) а) $\mathrm{Proj}\,\widetilde{\bigoplus_{k\geq 0}} J^k = X_n$ — т.н. изоспектральная схема Гильберта точек на $\mathbb{C}^2$

б)
$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & (\mathbb{C}^2)^n \arrow[d] \\ \mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2 \arrow[r] & S^n\mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$
в коммутативной диаграмме слева X_n = приведенное расслоенное произведение $(\mathbb{C}^2)^n$ и $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2$ над $S^n\mathbb{C}^2$.

в) морфизм $X_n \xrightarrow{\pi} \mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2$ конечный и плоский

г) отображение $X_n \longrightarrow (\mathbb{C}^2)^n$ — раздутие объединения всех диагоналей $\{P_i = P_j\}$.

<u>Следствие</u> По любой косе β можно построить пучок $\mathcal{F}_\beta$ на X_n и пучок $\pi_*\mathcal{F}_\beta$ на $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2$.