

Izrek. Naj bo $(X, \bullet)$ bazni prostor, ki je kompakten in enostavno povezan do $R > 0$. Predpostavimo, da je $\text{LocMin}(d)$ končen. Če je M_c končen za vsak $c > 0$, potem za vsak $r > 0$ velja:

$$\text{mgs}(H_1(\text{Rips}(X, r))) \leq \text{mgs}(H_1(X)) + \sum_{c < r} |M_c| < \infty.$$

Velja še: če so $A_1, A_2, \dots, A_n$ s potmi povezane komponente $x_j \in A_j$, potem za vsak $r > 0$:

$$\text{MGS}(\text{Rips}(X, r)) \leq \text{MGS}(X) + \sum_{c < r} |M_c| < \infty.$$

Tu je $M_c := \{(x, y) \in X, |, d(x, y) = c, d \text{ ima lokalni minimum pri } (x, y)\}$ množica parov, pri kateri ima d lokalni minimum pri $d(x, y) = c$. Oznaka mgs pomeni moč najmanjše množice generatorjev grupe G in $\text{MGS}(X) = \sum_{j=1}^m \text{mgs}(\pi_1(A_j, x_j))$.

Prispevek je povzet po članku [2].

Viri

[1] D. Govc, *On the definition of the homological critical value*, J. Homotopy Relat. Struct. 11 (2016), 143–151

[2] P. Goričan, Z. Virk, *Critical edges in Rips complexes and persistence*, <https://arxiv.org/pdf/2304.05185.pdf>

24

Tranzitivnost in slučajna cenzura

Avtorja: Janko Gravner¹, Brett Kolesnik²

¹ University of California Davis, Inštitut Andreja Marušiča

² Department of Statistics, University of Oxford

Povzetek. Predpostavimo določeno število logičnih izrazov, ki so vsi med seboj ekvivalentni, vendar se tega ne zavedamo. Vemo pa za nekaj implikacij, ki predstavljajo našo začetno informacijo. To znanje potem poskušamo izpopolniti s tranzitivnostjo. Pri tem pa nam je v oviro muhasti cenzor, ki dovoli samo določene slučajno izbrane zaključke. Obravnavali bomo vprašanje, kdaj tranzitivno zaprtje z veliko verjetnostjo še vedno privede do vseh dovoljenih zaključkov, ali vsaj do večine le-teh.

1. Uvod

Denimo, da imamo n logičnih izrazov, ki jih predstavimo z množico točk $V = \{1, 2, \dots, n\}$ nekega grafa. Ti izrazi so vsi med seboj ekvivalentni, vendar se tega ne zavedamo. Vemo pa za nekaj implikacij, ki predstavljajo našo začetno informacijo: usmerjen graf $G_0 = (V, E_0)$, v katerem (usmerjene) povezave predstavljajo začetne implikacije. To znanje potem poskušamo izpopolniti s tranzitivnim zaprtjem. Pri tem pa so dovoljeni samo določeni slučajno izbrani zaključki, ki jih predstavimo kot **odprte** povezave $E_{\text{od}} \subset (V \times V) \setminus E_0$. Preostale, prepovedane povezave, so **zaprte**.

Pogosto so podobne dinamike imenovane *ojačeno pronicanje na grafih*: začni z grafom na množici točk V , potem dodajaj povezave (ne da bi spremenil V) glede na neko monotono pravilo. Take dinamike rasti grafov in to izrazoslovje so vpeljali Balogh, Bollobás in Morris v [3]. Kasnejša dela na teh problemih so [2], [7], [4]. V tem prispevku bomo skicirali rezultate iz [5].

Definicija tranzitivnega zaprtja. Za vsak čas $t = 0, 1, \dots$, definiramo množico **zasedenih** povezav E_t kot sledi. Ob dani množici E_t , naj bo $E_{t+1} = E_t \cup \{i \rightarrow j \in E_{\text{od}} : i \rightarrow k \rightarrow j \in E_t, \text{ za neki } k \in V\}$. Z besedami, odprta povezava $i \rightarrow j$ postane zasedena v času $t + 1$, če obstajata že zasedeni povezavi $i \rightarrow k, k \rightarrow j$ v času t . Ko je enkrat zasedena, povezava nikoli ne spremeni stanja. Prav tako nobena zaprta povezava ne spremeni stanja.

Označimo: $E_\infty = \cup_t E_t, G_t = (V, E_t)$.

Podmnožica $V' \subset V$ je **zasičena** (v nekem času), če so vse odprte povezave v $V' \times V'$ zasedene.

Naj bo G_0 dan *deterministični* graf. Za trenutek predpostavimo, da ni zaprtih povezav, tj. $E_{\text{od}} = (V \times V) \setminus E_0$, in da je graf G_0 krepko povezan, tj. za vsaki točki $x, y \in V$ obstaja v G_0 usmerjena pot od x to y . V tem primeru so vse povezave sčasoma zasedene, torej je graf G_∞ poln in je množica V sčasoma zasičena. Če so nekatere povezave zaprte, pa ni nujno res, da postanejo vse odprte povezave zasedene, torej se lahko vprašamo, kdaj se zasičenost V zelo verjetno zgodi. Verjetnost vpeljemo preko naključnega izbora odprtih povezav: povezave zunaj E_0 so odprte neodvisno, morda z različnimi verjetnostmi.

Osredotočili se bomo na začetne grafe $G_0 = L_n$ in $G_0 = L_n^\rightarrow$, ki sta usmerjeni in neusmerjeni linearni graf na $\{1, \dots, n\}$. Levo in desno usmerjene povezave so odprte z verjetnostma p_ℓ , in p_d . Dinamiko zaprtja lahko predstavimo kot proces rasti na matriki sosednosti. Potem so elementi ob diagonali začetno zasedeni in so na slikah obravnavani modro; zaprti elementi so sivi. V naših limitnih izrekih bomo predpostavili, da gre $n \rightarrow \infty$.

2. Catalanovo pronicanje

Predpostavimo, da začetno odprte povezave tvorijo usmerjeni linearni graf $G_0 = L_n^\rightarrow$, in $p_d > 0$, $p_\ell = 0$. Potem imamo naslednji fazni prehod med skoraj praznim in skoraj zasičenim grafom, z naraščanjem gostote p_d preko vrednosti, ki so *neodvisne od n* .

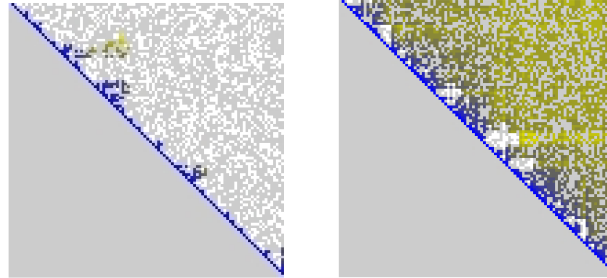
Izrek 1. *Obstajata taki konstanti $p_c^{\text{sp}}, p_c^{\text{zg}} \in (0, 1)$, da velja:*
če je $p_d < p_c^{\text{sp}}$, potem

$$\mathbb{P}(E_\infty \text{ ne vsebuje nobene povezave daljše od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1;$$

če pa je $p_d > p_c^{\text{zg}}$, potem

$$\mathbb{P}(E_\infty \text{ vsebuje vse povezave daljše od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1.$$

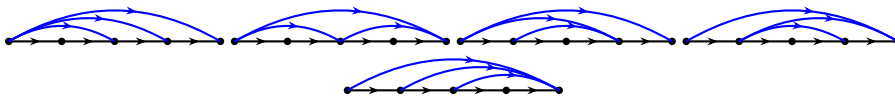
Odprt problem. Je prehod nenaden, tj. $p_c^{\text{sp}} = p_c^{\text{zg}}$?



Slika 1. Končno stanje Catalanovega pronicanja pri $p_d = 0.35$ (levo) in pri $p_d = 0.6$. Barve so interpolirane od modre do rumene glede na čas zasedenosti.

Skica dokaza obstoja subkritičnega režima. Naj bo e usmerjena povezava dolžine ℓ . Naj bo $\mathcal{E}_e$ množica vseh minimalnih (glede na inkluzijo) množic odprtih povezav, ki, skupaj s povezavami v E_0 , povzročijo zasedenost e . Potem:

- vsaka množica $A \in \mathcal{E}_e$ vsebuje $\ell - 1$ povezav, tj. $|A| = \ell - 1$;
- $|\mathcal{E}_e| = C_\ell = \binom{2\ell-1}{\ell} / (2\ell - 1)$, ℓ 'to Catalanovo število. Npr., $C_4 = 5$:



Slika 2. Povezava dolžine 4 lahko postane povezana na pet različnih načinov.

Ker je $C_\ell \leq 4^\ell$,

$$\mathbb{P}(e \text{ postane zasedena}) \leq 4^\ell p_d^{\ell-1},$$

in je torej $p_c^{\text{sp}} \geq 1/4$.

Skica dokaza obstoja superkritičnega režima. Privzemimo, da je $i \rightarrow j$ odprta povezava. Če je p_d nad kritično verjetnostjo usmerjenega pronicanja, so v matriki sosednosti verjetne dolge odprte severovzhodne poti od diagonale. Transitivno zaprtje zasede vsako povezavo na takih poteh. Če je p_d dovolj blizu 1, je zelo verjetno, da sta obe povezavi $i \rightarrow k$ in $k \rightarrow j$ zasedeni za neki k , kar povzroči zasedenost $i \rightarrow j$.

Zasičenje pri Catalanovem pronicanju nastopi, ko je p_d dovolj blizu 1, da so zasedene vse odprte povezave dolžine 3, ki jih je najtežje zasedi. Naslednji izrek je posledica Poissonove konvergence.

Izrek 2. Naj bo $G_0 = L_n^{-\rightarrow}$ usmerjeni linearni graf na $\{1, \dots, n\}$, z gostotama odprtih povezav $p_\ell = 0$ in $p_d = 1 - \alpha n^{-1/2}$, za neki $\alpha > 0$. Verjetnost zasičenja potem konvergira k $e^{-\alpha^2}$, ko gre $n \rightarrow \infty$.

3. Dvosmerni grafi

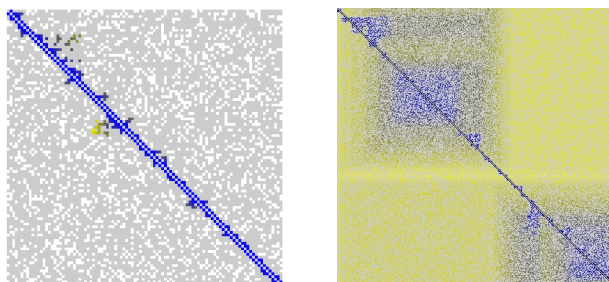
Zdaj predpostavimo, da je $G_0 = L_n$ neusmerjeni linearni graf na $\{1, \dots, n\}$, in da je $p_\ell = p_d = p$. Dolge povezave je tako lažje zasedi. Koliko lažje?

Izrek 3. Obstajata taki konstanti $c, C \in (0, \infty)$, da velja:

- 1) ko je $p < \frac{c}{\sqrt{\log n}}$, $\mathbb{P}(E_\infty \text{ ne vsebuje povezav daljših od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1$;
- 2) ko je $p > \frac{C \log \log n}{\sqrt{\log n}}$, je zasičenje zelo verjetno, tj., $\mathbb{P}(E_\infty = E_0 \cup E_{\text{od}}) \rightarrow 1$.

Odprt problem. Ali je res, da ob primerno izbrani potenci γ obstajata taki pozitivni konstanti c in C , da zaključek v (1) velja, ko je $p < \frac{c(\log \log n)^\gamma}{\sqrt{\log n}}$, medtem ko zaključek v (2) velja, ko je $p > \frac{C(\log \log n)^\gamma}{\sqrt{\log n}}$?

(Domneva: to drži za $\gamma = 1/2$.)



Slika 3. Subkritično (levo, $p_\ell = p_d = 0.25$) in superkritično ($p_\ell = p_d = 0.35$) tranzitivno zaprtje. Opazimo tvorbo jeder: zasičenost celotne množice točk povzročijo relativno majhne zasičene podmnožice, ki rastejo z zasedenostjo povezav ob robu.

4. Neusmerjeni grafi

Isti Izrek 3 velja, ko je $G_0 = L_n$, neusmerjene povezave so v E_{od} neodvisne z verjetnostjo p , in dinamika zapolni vsak trikotnik z dvema zasedenima povezavama in eno odprto. Skicirali bomo dosti lažji dokaz za ta primer. Ideje izhajajo iz drugih procesov s tvorbo jeder, od katerih imata glavno vlogo naslednja dva: *ojačeno pronicanje* ([1] in številni nadaljnji članki); in *pronicanje s sestavljanjem* [6].

Skica dokaza obstoja subkritičnega režima. Če obstajajo zasedene povezave dolžine k , potem lahko najdemo interval I z dolžino vsakega reda velikosti manjšega od k , z naslednjo lastnostjo: vsaka točka v iz I je del **roga** v I , tj., v in ena od njenih sosed v I sta povezana z isto točko v I s parom povezav v $E_0 \cup E_{\text{od}}$:

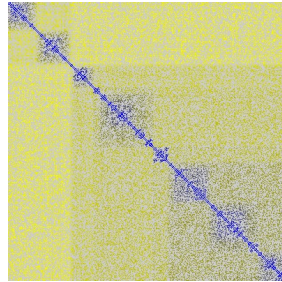


Slika 4. Če so obarvane povezave v enem od teh dveh primerov odprte, je točka v del roga.

Če zanemarimo odvisnost, ima določeni interval tako lastnost približno $(p^2 k)^k$. Če je nadalje $k = \log n$, medtem ko je $p = c/\sqrt{\log n}$, za dovolj majhen c , je verjetnost obstoja vsaj enega takega intervala največ

$$n(p^2 k)^k = n^{1+2\log c} \rightarrow 0,$$

torej interval s to lastnostjo zelo verjetno ne obstaja.



Slika 5. Tvorba jeder v neusmerjenem primeru pri $p = 0.33$.

|

Skica dokaza obstoja režima zasičenosti. Privzemimo $C > 8$ in definirajmo

$$k = \left\lceil \frac{\log n}{2 \log \log n} \right\rceil, \quad p = \sqrt{\frac{C \log k}{k}}.$$

Oglejmo si naslednje dogodke (1)–(3).

- (1) Vse povezave $1 \leftrightarrow j \in [2, k]$ so v $E_{\text{od}} \cup E_0$.
- (2) Za vsak par točk $x, y \in [k+1, k^3]$ obstaja taka točka $z \in [1, k]$, da sta $x \leftrightarrow z, y \leftrightarrow z \in E_{\text{od}} \cup E_0$.
- (3) Za vsak $x \in [k+1, k^3]$ je množica $V_x \subset [1, k]$ krajišč z , ki pripadajo povezavam $x \leftrightarrow z \in E_{\text{od}} \cup E_0$, povezana s povezavami v $E_{\text{od}} \cup E_0$.

Da se pokazati, da se ti trije dogodki skupaj zgodijo z verjetnostjo vsaj $n^{-1/2}$ in v tem primeru postane interval $[1, k^3]$ zasičen. Torej je z veliko verjetnostjo zasičen neki podinterval dolžine k^3 . Interval take dolžine pa z visoko verjetnostjo povzroči zasičenost celotne množice točk V .

Odprt problem. Za neusmerjene grafe Izrek 3 velja, če je G_0 zaporedje povezanih grafov omejene stopnje. Kaj pa, če stopnje niso omejene? Recimo, kaj se zgodi, če je G_0 hiperkocka razsežnosti n (ki ima 2^n točk in stopnjo n)?

Viri

- [1] M. Aizenman and J. L. Lebowitz, *Metastability effects in bootstrap percolation*, J. Phys. A 21 (1988), no. 19, 3801–3813.
- [2] O. Angel and B. Kolesnik, *Sharp thresholds for contagious sets in random graphs*, Ann. Appl. Probab. 28 (2018), no. 2, 1052–1098.
- [3] J. Balogh, B. Bollobás, and R. Morris, *Graph bootstrap percolation*, Random Structures Algorithms 41 (2012), no. 4, 413–440.
- [4] Z. Bartha, B. Kolesnik, *Weakly saturated random graphs*, arXiv:2007.14716.
- [5] J. Gravner and B. Kolesnik, *Transitive closure in a polluted environment*, Ann. Appl. Probab. 33 (2023), no. 1, 107–126.
- [6] J. Gravner and D. Sivakoff, *Nucleation scaling in jigsaw percolation*, Ann. Appl. Probab. 27 (2017), no. 1, 395–438.
- [7] B. Kolesnik, *Sharp threshold for K_4 -percolation*, Electronic Journal of Probability 27 (2022), 1–23.