Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo y Estabilidad de Equilibrios de Nash y Aplicaciones al Modelamiento del Mercado de Energía Eléctrica

Luis Alexis Rademacher Estay

Agosto 2002

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo y Estabilidad de Equilibrios de Nash y Aplicaciones al Modelamiento del Mercado de Energía Eléctrica

LUIS ALEXIS RADEMACHER ESTAY

Comisión Examinadora	**CALIFICACIONES**		
	Nota(n^o)	(Letras)	Firma
Profesor Guía Sr. Alejandro Jofré	______	________________	_______
Profesores Integrantes Sr. Rodrigo Palma	______	________________	_______
Sr. Rafael Correa	______	________________	_______
Nota Final Examen de Título	______	________________	_______

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SANTIAGO DE CHILE
Agosto 2002

RESUMEN DEL INFORME FINAL
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: LUIS RADEMACHER E.
PROF. GUÍA: SR. ALEJANDRO JOFRÉ.

Cálculo y Estabilidad de Equilibrios de Nash y Aplicaciones al Modelamiento del Mercado de Energía Eléctrica

Los mercados de energía eléctrica de muchas partes del mundo se encuentran en diversas etapas de una transición desde una estructura centralizada a una competitiva. Tanto el legislador como el ejecutivo necesitan contar con modelos de predicción de las consecuencias de la implementación de cierta estructura competitiva de mercado.

Un primer resultado de este trabajo es un par de modelos con diversos grados de competencia. El primer modelo considera múltiples empresas que maximizan utilidades tomando decisiones de inversión, para luego aceptar una operación centralizada con un criterio de minimización de costos agregados. Se postula como solución el equilibrio de Nash de este juego y luego se prueba la existencia de tal equilibrio. A continuación se estudia la sensibilidad de la solución con respecto a los datos. Informalmente, se prueba que si el error en los datos del problema tiende a cero, entonces el error en la solución tiende a cero. Finalmente, se propone una estrategia de cálculo. El segundo modelo considera múltiples empresas que ponen precio a la energía que ofrecen, y un agente central que, conociendo esos precios, decide cuánta energía debe inyectar cada empresa a la red para satisfacer la demanda, a costo mínimo. Luego se muestran algunas propiedades que apuntan hacia la existencia de un equilibrio de Nash de este segundo juego.

Si se tiene en cuenta que muchos modelos de mercados competitivos se apoyan en el concepto de equilibrio de Nash, es imprescindible contar con herramientas de cálculo de tales equilibrios. Un segundo resultado de este trabajo es la descripción e implementación de una estrategia de cálculo de equilibrios de Nash de juegos en forma normal. Esta estrategia se basa en reformular el problema de calcular un equilibrio como un problema de complementaridad mixto y luego resolver este problema mediante un software preexistente, el solver PATH.

AGRADECIMIENTOS

Quiero mostrar, dentro de lo posible en este contexto, mi agradecimiento a aquellos que me ayudaron, de alguna forma, a desarrollar este trabajo:

A Alejandro Jofré, profesor guía: sin su acción este trabajo no habría sido posible. A Rafael Correa y Rodrigo Palma, por formar parte de la comisión examinadora. Rodrigo Palma, junto a Rigoberto Torres, merecen además mi agradecimiento por la activa interacción durante el desarrollo de este trabajo. Al Departamento de Ingeniería Matemática, Centro de Modelamiento Matemático y sus integrantes, por proveer un ambiente adecuado a la investigación.

A mis amigos Nelson Morales, Miguel Carrasco, Patricio Reyes y Juan Pablo Vielma, por las discusiones, comentarios y revisiones en torno a este trabajo.

A mis abuelos, padre y madre, por el amor y, en particular, la paciencia que mostraron.

Índice general

Índice de Notación

A continuación hay una lista de símbolos usados frecuentemente con su definición y, entre paréntesis, el número de la página en que son mencionados por primera vez.

$\mathrm{MCP}(\cdot,\cdot,\cdot)$	problema de complementaridad mixto (2)
$\mathrm{VI}(\cdot,\cdot)$	inecuación variacional (2)
$[l,u]$	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid l \leq x \leq u\}$ (2)
$N_B(x)$	cono normal a B en x (2)
$\perp$	complementaridad (2)
a_{-i}	$(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)$ (3)
$\mathcal{G}(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$	juegos finitos con estrategias Φ_i (4)
λ	medida de Lebesgue (4)
cl	clausura (4)
$\mathbb{E}_p$	esperanza con respecto a la medida o variable p (6)
e_k	k-ésimo vector canónico (7)
$x\backslash k$	$(x_1,\ldots,x_{i-1},e_k,x_{i+1},\ldots,x_n)$ (7)
$\mathrm{sop}(\cdot)$	soporte de una estrategia (8)
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ (9)
$\mathbf{eq}(\cdot)$	multiaplicación de equilibrios de Nash (10)
$\lvert A\rvert$	cardinal de un conjunto A (11)
$\mathrm{pos}(W)$	$\{Wx \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^m_+\}$ (11)
$\mathrm{proy}_C(a)$	proyección de a sobre C (41)

Introducción

El presente texto presenta una contribución al cálculo de equilibrios de Nash de juegos en forma normal y, apoyándose en éstas, describe 2 modelos del mercado de energía eléctrica con algún grado de competencia, para luego estudiar algunas de sus propiedades.

Para lograr esto, primeramente se presentan brevemente algunos tópicos que fundamentan los desarrollos posteriores:

- el problema de complementaridad mixto, un caso particular de una desigualdad variacional, que sirve como una reformulación del equilibrio de Nash de ciertos juegos en forma normal y que cuenta con un solver (PATH) capaz de resolverlo;
- con respecto a la teoría de juegos, el teorema de Nash y los resultados de sensibilidad de Harsanyi para juegos finitos y de Jofré y Wets para juegos no necesariamente finitos;
- la forma que adoptan ciertos problemas de programación estocástica multietapa;
- el mercado de energía eléctrica, los orígenes de la dificultad de su estudio y algunas de las estructuras de mercado existentes.

En segundo lugar, se describe uno de los resultados de este trabajo: la implementación de una estrategia de cálculo de equilibrios de Nash de juegos en forma normal. Esta descripción está precedida de un repaso de las estrategias más conocidas de cálculo de equilibrios de Nash: el método de Lemke y Howson, el método de cálculo de puntos fijos de Scarf, métodos algebraicos y otros.

En tercer lugar, se presenta otro de los resultados de este trabajo: 2 modelos del mercado de energía eléctrica con diversos grados de competencia.

El primer modelo considera inversión multiagente y operación centralizada[1]; luego se estudia la existencia y sensibilidad de la solución de este modelo. El segundo modelo considera la operación multiagente y presenta un acercamiento a la existencia. La descripción de los modelos es precedida por la presentación de algunos modelos que influyeron en este trabajo: el modelo competitivo de Pereira, Barroso y Kelman, el modelo de operación centralizada de Nancy Silva y el modelo de inversión y operación centralizada de Jofré y Ortega. Para algunas de las demostraciones de este capítulo, el libro "Variational Analysis" de R. T. Rockafellar y R. J-B. Wets ([RW98]) es una referencia básica; algunos resultados de este libro se reproducen sin demostración.

Motivación del Modelamiento de Mercados de Energía Eléctrica Competitivos

Contar con modelos que permitan predecir, en alguna medida, el resultado de la implementación de estructuras de mercado competitivas en el contexto del mercado de energía eléctrica, es fundamental, tanto desde el punto de vista del legislador como del ejecutivo: recientemente, en diversos lugares del mundo, la implementación de mercados de energía eléctrica competitivos sin contar con estudios suficientes del impacto de esta medida, condujo a situaciones socialmente indeseables: crisis de abastecimiento, alzas inaceptables en los precios de la energía, etc.

Motivación del Análisis de Sensibilidad

Desde el punto de vista del modelador, la sensibilidad de la solución con respecto a sus datos es un problema fundamental: se sabe que los datos con los que se alimenta el modelo son sólo una aproximación de los valores que toman esos parámetros en la realidad; se tendrá que la solución entregada por el modelo está cerca de la solución asociada a los parámetros reales, que no puedo conocer? Una propiedad como ésta, de sensibilidad o estabilidad, no es evidentemente cierta (o falsa) en casi ningún modelo, por el contrario, requiere un estudio del modelo y, en todo caso, es un requisito básico de un buen modelo.

[1] La operación centralizada está basada en el modelo de Nancy Silva([Sil99])

Motivación del Cálculo de Equilibrios de Nash

Convencido uno ya de la necesidad de contar con nuevos modelos del mercado de energía eléctrica competitivos, es evidente la necesidad de contar con herramientas de cálculo de equilibrios de Nash: al momento de estudiar mercados competitivos, una herramienta fundamental es el equilibrio de Nash. Luego, la posibilidad de que un modelo competitivo del mercado de energía eléctrica que involucra el concepto equilibrio de Nash entregue una respuesta concreta, descansa en la disponibilidad de herramientas de cálculo de equilibrios de Nash.

Objetivo General

Estudiar el cálculo y análisis de sensibilidad de equilibrios de Nash y aplicaciones al modelamiento de la inversión y operación de mercados de energía eléctrica.

Objetivos Específicos

1. Disponer de una herramienta de cálculo de equilibrios de Nash de juegos en forma normal apropiada para utilizarla, en general, en investigaciones en torno a la teoría de juegos y, en particular, en el modelamiento de mercados de energía eléctrica competitivos.

2. Contribuir al modelamiento de mercados de energía eléctrica competitivos.

3. Contribuir al análisis de sensibilidad de equilibrios de Nash de juegos en forma normal, de modo de contar con afirmaciones acerca de la sensibilidad de las soluciones de modelos de mercados de energía eléctrica competitivos.

Alcance

Para el cumplimiento de sus objetivos, este trabajo considera un repaso de las herramientas de cálculo y análisis de sensibilidad de equilibrios de Nash de juegos en forma normal, propone una estrategia de cálculo de equilibrios de Nash en tales juegos, explica la implementación de tal estrategia, y describe 2 modelos propuestos para mercados de energía eléctrica con diversos grados de competencia. No se aborda la convergencia del método de cálculo de equilibrios propuesto, ni se implementaron computacionalmente los modelos de mercado propuestos.

Estructura del Trabajo

En el capítulo 1 se presenta una descripción concisa de algunos tópicos que sustentan los capítulos siguientes, como la teoría de juegos y el mercado de energía eléctrica. En el capítulo 2 se presentan algunas de las estrategias más conocidas para el cálculo de equilibrios de Nash y a continuación se describe la estrategia desarrollada en este trabajo. En el capítulo 3 se describen algunos de los modelos preexistentes que influenciaron esta memoria; a continuación se expone otro de los resultados de este trabajo: el estudio de 2 modelos del mercado de energía eléctrica. Finalmente, en el capítulo 4 se presenta la conclusión.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presenta información selecta acerca del problema de complementaridad mixto, la teoría de juegos, la programación estocástica y el mercado de energía eléctrica. De estos temas, se presenta sólo aquella información que es ampliamente conocida por los especialistas y que se requiere para sustentar los capítulos siguientes o es central en torno al tema que se está exponiendo. Además, se introduce la notación y definiciones básicas que se usarán después.

1.1. Problema de Complementaridad Mixto

Su importancia es que el cálculo de equilibrios de Nash en algunos juegos en forma normal se puede formular como un problema de complementaridad mixto y se cuenta con un solver (PATH, véase subsección 2.2.2) para resolverlo, lo que da una vía para calcular equilibrios de Nash.

Definición 1.1 *Un problema de complementaridad mixto (MCP) es especificado por tres datos: cotas inferiores* $l \in \{\mathbb{R} \cup \{-\infty\}\}^n$*, cotas superiores* $u \in \{\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}^n$ *y una función* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*. Una solución al MCP es* $z \in \mathbb{R}^n$ *tal que exactamente una de las siguientes condiciones se tiene para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$*:*

1. $F_i(z) = 0$ *y* $l_i \leq z_i \leq u_i$
2. $F_i(z) > 0$ *y* $l_i = z_i$
3. $F_i(z) < 0$ *y* $z_i = u_i$

Se denotará MCP(F, l, u).

Un problema de complementaridad mixto puede ser visto como un caso particular de una inecuación variacional ([FP97]): para $F : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con B convexo cerrado no vacío, denótese VI(F, B) al problema de encontrar $z \in B$ tal que para todo $y \in B$

$$(y - z) \cdot F(z) \geq 0.$$

Entonces, MCP(F, l, u) es equivalente a VI$(F, [l, u])$, donde $[l, u] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid l \leq x \leq u\}$. También es útil considerar la siguiente equivalencia: $z \in B$ es solución de VI(F, B) si y sólo si

$$0 \in F(z) + N_B(z)$$

donde N_B es el cono normal a B en z.

Un caso particular es cuando $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ l_i = 0, u_i = +\infty$, en tal caso se habla de un problema de complementaridad no lineal (NCP) y se anota de manera abreviada como:

$$0 \leq z \quad \perp \quad F(z) \geq 0 \tag{1.1}$$

donde el signo $\perp$ significa que para cada coordenada al menos una de las desigualdades es satisfecha como una igualdad, i.e. a las desigualdades se suma la condición $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ z_i F_i(z) = 0$. Si además F es lineal afín, entonces se habla de un problema de complementaridad lineal (LCP).

Por ejemplo (ver [FS98]), considérese el siguiente programa no lineal con restricciones:

$$\begin{aligned} \min f(x)& \\ \text{s.a.} \quad g(x) &\leq 0 \\ h(x) &= 0 \\ r \leq x &\leq s. \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ son dos veces continuamente diferenciables.

Si se define

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(x)$$
$$B = [r, s]$$

entonces las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker asociadas al problema 1.2 son:

$$\begin{aligned} 0 \in \nabla_x L(x, \lambda, \mu) + N_B(x) \\ 0 \geq \lambda \quad \perp \quad g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Es fácil ver que 1.3 equivale al MCP dado por

$$z = (x, \lambda, \mu), \quad F(z) := \begin{bmatrix} \nabla_x L(z) \\ g(x) \\ h(x) \end{bmatrix}, \quad l := \begin{bmatrix} r \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}, \quad u := \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ +\infty \end{bmatrix}.$$

Más información se puede encontrar en [FS98] y [FP97].

1.2. Teoría de Juegos

1.2.1. Definiciones

Definición 1.2 *Un* juego en forma normal (o estratégica)[1] *es una* $2n$*-tupla*

$$\Gamma = (A_1, \ldots, A_n, u_1, \ldots, u_n),$$

donde A_i *es un conjunto no vacío y* $u_i : A \to \mathbb{R}$*, para* $i \in J := \{1, \ldots, n\}$*, con* $A = \prod_{j=1}^n A_i$*. Los elementos de* J *se llaman los* jugadores *de* Γ*.* A_i *se llama el* espacio de estrategias *del jugador* i*,* A *se llama el espacio de estrategias del juego* Γ*.* u_i *es la* función de utilidad (o de pago) *del jugador* i*. En ocasiones, a estos espacios de estrategias se les llama espacios de estrategias puras*[2]*.*

Para una n-tupla $a = (a_1, \ldots, a_n)$, se denota a_{-i} la $(n-1)$-tupla

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

[1] Todos los juegos considerados en este trabajo tienen un número finito de jugadores. Más adelante se llamará "finito" a un juego cuando, además de tener un número finito de jugadores, los conjuntos de estrategias son finitos.

[2] Se les llama espacios de estrategias "puras" para diferenciarlos de los espacios de estrategias mixtas que se definen en la subsección 1.2.2, que corresponden a las medidas de probabilidad sobre los espacios de estrategias puras.

Definición 1.3 *Un* equilibrio de Nash *de un juego en forma normal es un* $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*) \in A$ *tal que para todo* $i \in J$*:*

$$a_i^* \in \operatorname*{argmax}_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i}^*).$$

Definición 1.4 *Un* juego finito en forma normal *es un juego en forma normal*

$$\Gamma = (\Phi_1, \dots, \Phi_n, R_1, \dots, R_n)$$

tal que Φ_i *es finito para todo* $i \in J$*. El conjunto* Φ_i *pasa a denominarse casi siempre el conjunto de* estrategias puras *del jugador* i*. Se denota* $\Phi = \prod_{i \in J} \Phi_i$.

Sea $\mathcal{G}(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ el conjunto de todos los juegos finitos con espacios de estrategias puras $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Para $\Gamma \in \mathcal{G}(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, sea r_i el vector de utilidad del jugador i asociado a las estrategias puras en Γ, i.e.:

$$r_i := \big(R_i(\phi)\big)_{\phi \in \Phi}.$$

Se puede ver r_i como un elemento de $\mathbb{R}^{m^*}$, donde $m^* = |\Phi|$. Luego, r_i se llama el *vector de utilidad* del jugador i en Γ. El *vector de utilidad* del juego Γ es el vector

$$r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{nm^*}.$$

Así, considerando un orden fijo en Φ, se obtiene una correspondencia uno a uno entre $\mathcal{G}(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ y $\mathbb{R}^{nm^*}$. $\mathcal{G}(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ puede verse como un espacio euclidiano de dimensión nm^* y se puede hablar de nociones topológicas de tal espacio así como de la medida de Lebesgue asociada a él.

Sea $\mathcal{S}$ una proposición acerca de los juegos finitos en forma normal. Se dice que $\mathcal{S}$ es verdadera para *casi todo* juego si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier n-tupla de conjuntos finitos no vacíos $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ se tiene que

$$\lambda\Big(\mathrm{cl}\big\{\Gamma \in \mathcal{G}(\Phi_1, \dots, \Phi_n) \mid \mathcal{S} \text{ es falsa}\big\}\Big) = 0,$$

es decir, la clausura del conjunto de los juegos tales que $\mathcal{S}$ es falsa tiene medida de Lebesgue nula.

1.2.2. Existencia

Juegos en Forma Normal

La desigualdad de Ky-Fan (ver, por ejemplo, [Aub93]) permite probar:[3]

Teorema 1.5 (Nash) *Sea* $\Gamma = (A_1, \ldots, A_n, u_1, \ldots, u_n)$ *un juego en forma normal tal que, para todo* $i \in J$*:*

1. $A_i \subseteq \mathbb{R}^{N_i}$*, convexo, compacto y no vacío,*
2. u_i *es s.c.s.,*
3. $(\forall a_i \in A_i)\ u_i(a_i, \cdot)$ *es s.c.i., y*
4. $(\forall a_{-i} \in A_{-i})\ u_i(\cdot, a_{-i})$ *es cóncava.*

Entonces Γ *posee al menos un equilibrio de Nash.*

Juegos Finitos en Forma Normal

Un juego finito no necesariamente posee equilibrio de Nash. Una manera de resolver este problema es agrandar el espacio de estrategias adecuadamente, lo que se verá a continuación.

Sea $\Gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$ un juego finito en forma normal. El *espacio de estrategias mixtas*[4] del jugador i es

$$\Delta_i = \{x \in \mathbb{R}^{\Phi_i} : x \geq 0, \sum_{j \in \Phi_i} x_j = 1\}.$$

y es usual interpretarlo como el espacio de las medidas de probabilidad sobre Φ_i. El *espacio de estrategias mixtas* del juego Γ es $\Delta = \prod_{i \in J} \Delta_i$, que, pensando en medidas producto, se interpreta como un espacio de medidas de probabilidad sobre Φ. Los elementos $p \in \Delta$ se llaman *estrategias mixtas* y, abusando de la notación, se pueden ver como vectores (con la notación p_{ij}, para $i \in J$, $j \in \Phi_i$) o como medidas de probabilidad (con la notación

[3] Ésta no es la formulación original del teorema de Nash, véase [Nas51].

[4] El espacio de estrategias mixtas también tiene sentido y es comúnmente utilizado en el caso de juegos no finitos, pero aquí no se considerará ese caso.

$p(C)$, para $C \subseteq \Phi$). Las funciones de utilidad R_i sobre el espacio de estrategias puras se extienden naturalmente a $\mathbb{R}^\Phi$ (y, en particular, al espacio de estrategias mixtas) definiendo la *función de utilidad esperada*, $u_i : \mathbb{R}^\Phi \to \mathbb{R}$, dada por:

$$u_i(p) = \sum_{\phi \in \Phi} R_i(\phi) \prod_{j \in J} p_{j\phi_j}.$$

Cuando $p \in \Delta$, u_i hace honor a su nombre, pues:

$$\begin{aligned} u_i(p) &= \sum_{\phi \in \Phi} R_i(\phi) p(\{\phi\}) \\ &= \mathbb{E}_p(R_i). \end{aligned}$$

donde $\mathbb{E}_p$ denota la esperanza con respecto a la medida de probabilidad p. Nótese que $\Gamma' := (\Delta_1, \dots, \Delta_n, u_1, \dots, u_n)$ es un juego en forma normal. Se dice que $p \in \Delta$ es un *equilibrio de Nash en estrategias mixtas* para el juego finito Γ si y sólo si p es un equilibrio de Nash para el juego Γ'. En virtud del teorema de Nash (teorema 1.5) es fácil probar el siguiente corolario ([Nas51]):

Corolario 1.6 *Todo juego finito en forma normal posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

1.2.3. Caracterizaciones del Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas de Juegos Finitos en Forma Normal

(Algunos detalles adicionales pueden encontrarse en [MM96].)

Sea $\Gamma = (\Phi_1, \dots, \Phi_n, R_1, \dots, R_n)$ un juego finito en forma normal. Sea $\pi_i : \mathbb{R}^{J \times \Phi} \times \Delta \to \mathbb{R}$ la función de utilidad del jugador i vista además como función del vector de utilidad $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{J \times \Phi}$ dado por $r_{i\phi} = R_i(\phi)$, para $\phi \in \Phi$. Es decir,

$$\pi_i(r, p) = \sum_{\phi \in \Phi} r_{i\phi} \prod_{k \in J} p_{k\phi_k}$$

Notar que π_i es $(n+1)$-multilineal en las variables $(r, p_1, \dots, p_n)$.

Para $x \in \mathbb{R}^\Phi$ y $k \in \Phi_i$, se denota

$$x \backslash k := (x_1, \dots, x_{i-1}, e_k, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

con e_k el k-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^{\Phi_i}$.

Se define además, para $i \in J$, $j \in \Phi_i$:

$$\begin{aligned} x_{ij}(r,p) &= \pi_i(r, p\backslash j) \quad \left(= \frac{\partial \pi_i}{\partial p_{ij}}(r,p)\right) \\ z_{ij}(r,p) &= x_{ij}(r,p) - \pi_i(r,p) \\ g_{ij}(r,p) &= \max\bigl(z_{ij}(r,p), 0\bigr). \end{aligned}$$

Se tienen las siguientes caracterizaciones equivalentes del equilibrio de Nash en estrategias mixtas de un juego finito en forma normal, para r (el vector de utilidad del juego Γ) fijo:

1. Equilibrio de Nash como el punto fijo de una función:

   Sea $y : \Delta \to \Delta$ dada por, para $i \in J$, $j \in \Phi_i$:

   $$y_{ij}(p) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(r,p)}{1 + \sum_{j \in \Phi_i} g_{ij}(r,p)}$$

   Entonces $p^* \in \Delta$ es un equilibrio de Γ si y sólo si $p^* = y(p^*)$. Como y es una función continua del convexo compacto no vacío Δ en sí mismo, del teorema del punto fijo de Brouwer se deduce que y posee un punto fijo. Este argumento fue usado por Nash [Nas51] para probar existencia de equilibrio en juegos finitos.

2. Equilibrio de Nash como una solución de un problema de complementaridad no lineal:

   La función z satisface $p_i \cdot z_i(r,p) = 0$ para todo $p \in \Delta$ e $i \in J$. Luego, dado $p \in \Delta$, p es equilibrio de Nash si y sólo si p es solución del siguiente problema de complementaridad no lineal:

   $$z(r,p) \leq 0 \quad \perp \quad p \geq 0.$$

   Notar que, en el caso de 2 jugadores, corresponde a un problema de complementaridad lineal.

3. Equilibrio de Nash como un conjunto semi-algebraico (véase subsección 2.1.2):

   El conjunto de equilibrios de Nash es el conjunto de los puntos $p \in \mathbb{R}^\Phi$ satisfaciendo

   $$p \in \Delta \text{ y } z(r,p) \leq 0.$$

Δ está definido por un conjunto de desigualdades lineales y z es polinomial en p. Luego, el conjunto de equilibrios de Nash es un conjunto semi-algebraico.

1.2.4. Equilibrio Regular

(Para más detalles véase por ejemplo [vD91], [Har73])

La importancia del concepto de equilibrio regular en el contexto de este trabajo es que, por una parte —casi por definición—, los equilibrios regulares poseen propiedades de sensibilidad sorprendentes y, por otra parte, para casi todo juego sus equilibrios son regulares.

Se requiere un poco más de notación. Sea

$$\Gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$$

un juego finito en forma normal. Para $\phi = (k_1, \ldots, k_n) \in \Phi$, sea

$$F(\cdot|\phi) : \mathbb{R}^\Phi \to \mathbb{R}^\Phi$$

dada por

$$\begin{aligned} F_{ik}(x|\phi) &= x_{ik}\big(u_i(x\backslash k) - u_i(x\backslash k_i)\big) && \text{para } i \in J,\ k \in \Phi_i,\ k \neq k_i \\ F_{ik_i}(x|\phi) &= \sum_{k \in \Phi_i} x_{ik} - 1 && \text{para } i \in J \end{aligned}$$

donde u_i es la función de utilidad esperada definida en la subsección 1.2.2.

Para una estrategia mixta $s \in \Delta$, se define el *soporte* como

$$\operatorname{sop}(s) := \{\phi \in \Phi \mid s(\{\phi\}) > 0\}.$$

Sea $J(\cdot|\phi)$ el jacobiano de $F(\cdot|\phi)$.

Definición 1.7 (Harsanyi) *Un equilibrio en estrategias mixtas s de Γ es un* equilibrio regular *si y sólo si $J(s|\phi)$ es no singular para algún $\phi \in \operatorname{sop}(s)$.*

El teorema de Sard permite probar que:

Teorema 1.8 (Harsanyi) *Para casi todo juego en forma normal, todo equilibrio es regular.*

1.2.5. Sensibilidad

Aquí se presentan 2 resultados: el teorema de Jofré y Wets para el caso de juegos no necesariamente finitos, y el teorema de Harsanyi, para el caso de juegos finitos.

Juegos en Forma Normal

En esta parte, se utiliza la siguiente noción de convergencia de conjuntos (para algunas de sus propiedades, véase [RW98]):

Definición 1.9 *Sea $\{C^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que la sucesión $\{C^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge a C en el sentido de Painlevé-Kuratowsky ($C^\nu \to C$) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $(\forall x \in C)\ (\exists x^\nu \to x)\ x^\nu \in C^\nu$, *y*
2. *si $\{x^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $(\forall \nu \in \mathbb{N})\ x^\nu \in C^\nu$ y x es un punto de acumulación de $\{x^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, entonces $x \in C$.*

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $N_i \in \mathbb{N}$ fijos, para $i \in J := \{1, \ldots, n\}$. Considérese un juego en forma normal

$$\Gamma = (X_1, \ldots, X_n, u_1, \ldots, u_n),$$

con conjuntos de estrategias $X_i \subseteq \mathbb{R}^{N_i}$ convexos compactos no vacíos, para $i \in J$. Sea $X = \prod_{i\in J} X_i$. Considérese además una sucesión de juegos que aproximan a Γ, para $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma^\nu = (X_1^\nu, \ldots, X_n^\nu, u_1^\nu, \ldots, u_n^\nu),$$

con conjuntos de estrategias $X_i^\nu \subseteq \mathbb{R}^{N_i}$ convexos compactos no vacíos.

Definición 1.10 *Una sucesión de funciones $\{f^\nu : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, \nu \in \mathbb{N}\}$ converge continuamente a $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ con respecto a la sucesión de conjuntos $C^\nu \to C$ si y sólo si $\forall x^\nu \to x$ tal que $(\forall \nu \in \mathbb{N})\ x^\nu \in C^\nu$ se tiene $f^\nu(x^\nu) \to f(x)$. (Notación: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)*

Definición 1.11 *Una sucesión de juegos en forma normal $\{\Gamma^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge a un juego Γ si y sólo si para todo $i \in J$:*

1. $X_i^\nu \to X_i$ y

2. las funciones de utilidad u_i^ν convergen continuamente a u_i con respecto a $\prod_{i\in J} X_i^\nu \to \prod_{i\in J} X_i$

Teorema 1.12 ([JW99]) *Supongamos que los juegos $\{\Gamma^\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ son tales que $\forall i \in J$:*

1. *la función u_i^ν es scs. y $\forall x_i \in \mathbb{R}^{N_i}, u_i^\nu(x_i, \cdot)$ es scs.;*

2. *$\forall x \in \prod_{i\in J} \mathbb{R}^{N_i}, u_i^\nu(\cdot, x_{-i})$ es cóncava.*

Si $\Gamma^\nu \to \Gamma$, entonces existen estrategias $\{\bar{x}^\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ tales que, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\bar{x}^\nu$ es equilibrio de Nash de Γ^ν y cualquier punto de acumulación de una sucesión como ésa es un equilibrio de Nash del juego Γ.

Juegos Finitos en Forma Normal

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ conjuntos finitos no vacíos. Sea

$$\mathbf{eq} : \mathcal{G}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \rightrightarrows \Delta$$

la multiaplicación que a cada juego en $\mathcal{G}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ le asocia sus equilibrios de Nash en estrategias mixtas. Gracias al teorema de Nash (corolario 1.6) sabemos que **eq** es a valores no vacíos. De hecho:

Proposición 1.13 grafo **eq** *es cerrado.*

Demostración. De acuerdo a las definiciones dadas en la subsección 1.2.3, sea $v : \mathbb{R}^{J\times\Phi} \times \Delta \to \mathbb{R}$ dada por:

$$v(r, p) = \sum_{i\in J} \sum_{j\in\Phi_i} g_{ij}(r, p).$$

Luego se tiene que p^* es equilibrio de Nash del juego con utilidad r^* si y sólo si $v(r^*, p^*) = 0$. Es decir, grafo $\mathbf{eq} = v^{-1}(0)$, que resulta ser cerrado porque v es continua. □

En el contexto de sensibilidad, esta proposición dice lo siguiente: "para toda sucesión de juegos $(\Gamma^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{G}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ tal que $\Gamma^\nu \to \Gamma$, para toda sucesión $(p^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ en Δ tal que $p^\nu \to p$ y $p^\nu \in \mathbf{eq}(\Gamma^\nu)$ (p^ν es equilibrio de

Nash en estrategias mixtas de Γ^ν), se tiene que $p \in \mathbf{eq}(\Gamma)$ (p es equilibrio de Nash en estrategias mixtas de Γ)."

Una aplicación adecuada del teorema de la función implícita permite probar lo siguiente (véase [vD91]) ($|A|$ denota el cardinal de un conjunto finito A):

Teorema 1.14 (Harsanyi) *Sea $\tilde{\Gamma} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_n)$ un juego finito en forma normal con n jugadores. Sea $\tilde{s}$ un equilibrio regular de $\tilde{\Gamma}$. Entonces existe una localización continuamente diferenciable de* $\mathbf{eq}$ *en torno a $(\tilde{\Gamma}, \tilde{s})$, es decir, existen vecindades U de $\tilde{\Gamma}$ en $\mathbb{R}^{nm^*}$ y V de $\tilde{s}$ en $\mathbb{R}^m$, tales que*

1. *$(\forall \Gamma \in U)$ $\left|\mathbf{eq}(\Gamma) \cap V\right| = 1$, y*
2. *la función $s : U \to V$ definida por $\{s(\Gamma)\} = \mathbf{eq}(\Gamma) \cap V$ es continuamente diferenciable.*

1.3. Programación Estocástica

Para una matriz W de n filas y m columnas, se denota

$$\operatorname{pos} W := \{Wx \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^m_+\}.$$

Un *programa estocástico multietapa (de H etapas) lineal con recurso fijo*([BL97]) es un programa de la forma:

$$\begin{array}{ll}
\min & c^1 z^1 + \mathbb{E}_{\xi^2}\left[\min c^2(\omega) z^2(\omega^2) + \cdots + \mathbb{E}_{\xi^H}[\min c^H(\omega) z^H(\omega^H)] \cdots \right] \\
\text{s.a.} & W^1 z^1 = h^1 \\
& T^1(\omega) z^1 + W^2 z^2(\omega^2) = h^2(\omega) \\
& \cdots \\
& T^{H-1}(\omega) z^{H-1}(\omega^{H-1}) + W^H z^H(\omega^H) = h^H(\omega) \\
& z^1 \geq 0, \quad z^t(\omega^t) \geq 0, \quad t = 2, \ldots, H.
\end{array} \tag{1.4}$$

donde $c^1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ es un vector conocido, $h^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ es un vector conocido, $\xi^t(\omega)' = (c^t(\omega)', h^t(\omega)', T^{t-1}_{1\cdot}(\omega), \ldots, T^{t-1}_{m_t\cdot}(\omega))$ es un N_t-vector aleatorio definido en (Ω, Σ^t, P) (donde $\Sigma^t \subset \Sigma^{t+1}$) para todo $t = 2, \ldots, H$, y cada W^t

es una matriz conocida de $m_t \times n_t$. Las decisiones z dependen de la historia hasta el instante t, la que se indica con ω^t.

Se dirá que tiene *recurso completo* si y sólo si $\operatorname{pos} W^t = \mathbb{R}^{m_t}$, $t = 1, \ldots, H$. Recurso completo implica que el programa es factible para cualquier lado derecho de las restricciones y, en forma más intuitiva e informal, esto implica que para cualquier decisión no negativa que se tome desde el principio hasta cierta etapa, hay una realización factible en el futuro.

1.4. Mercado de Energía Eléctrica

1.4.1. Características del Mercado

A continuación se presentan brevemente las principales características de los mercados de energía eléctrica que lo diferencian de otros mercados y que son relevantes para este trabajo.

Primeramente, en muchas partes del mundo, los mercados de energía eléctrica se encuentran sometidos a un proceso de reestructuración profunda: se encuentran en distintas fases de una transición de una estructura centralizada a una competitiva. Es natural entonces modelarlo haciendo uso de la teoría de juegos y, en particular, haciendo uso del concepto de equilibrio de Nash.

En segundo lugar, los mercados de energía eléctrica poseen algunas características intrínsecas que los diferencian de muchos otros:

1. La energía eléctrica como tal se puede acumular sólo en forma muy limitada. El almacenamiento masivo se realiza sólo en forma indirecta, por ejemplo mediante el agua acumulada en embalses.

2. Existen restricciones técnicas que limitan la transmisión de energía (como cotas en la potencia).

3. La demanda es más bien inelástica, particularmente en sistemas donde no se han desarrollado mercados minoristas.

Esto trae consecuencias que discrepan con los principios económicos tradicionales y el conocimiento de otros mercados, por ejemplo: se puede ejercer poder de mercado vendiendo más energía en vez de menos ([SLL00, CHH97]).

1.4.2. Estructuras de Mercado

Las formas básicas de mercado implementadas en la práctica se pueden dividir en mercados del tipo pool y sistemas basados en contratos bilaterales incluyendo, como se describe a continuación, a los modelos de bolsas de energía como un caso particular de pool. Combinaciones de las siguientes formas dan origen a los diversos tipos de mercados existentes en el mundo.

1. Modelos del tipo pool

   En los modelos del tipo pool hay 2 agentes encargados de la coordinación del sistema: el operador de mercado (responsable de aspectos económicos) y el operador del sistema (responsable de aspectos técnicos).

   a) Pool clásico

   En el caso de un pool clásico, oferentes y consumidores renuncian a comerciar directamente. Las compras y ventas de energía son decididas por el operador de mercado en base a curvas de oferta (o curvas de costo) y curvas de demanda, con un criterio de minimización de costos. El plan de operación que resulta es transformado en un plan técnicamente factible por el operador del sistema.

   b) Bolsa de energía

   Una bolsa de energía puede ser vista como un caso particular de un pool. Usualmente se trata de un mercado diario que tiene por objeto llevar a cabo las transacciones de energía para el día siguiente mediante la presentación de ofertas de venta y adquisición por parte de los agentes de mercado. Estas ofertas son presentadas al operador de mercado e incluidas (previa acreditación) en un proceso de casación. Este proceso culmina con las asignaciones de producción y compra de energía eléctrica para el día siguiente.

2. Contratos bilaterales físicos

   En un mercado basado en contratos bilaterales físicos, oferentes y consumidores establecen libremente relaciones de tipo comercial. El intercambio de ofertas conduce a un contrato que especifica el abastecimiento por parte del oferente y el consumo por parte del consumidor, con una influencia directa sobre el despacho de la operación resultante. Luego, en base a criterios predefinidos de seguridad y confiabilidad, el operador del sistema determina la factibilidad y los servicios de red requeridos para la realización técnica del contrato bilateral físico solicitado. Finalmente, utilizando una metodología establecida, se calcula el peaje resultante para la transacción bilateral.

3. Contratos bilaterales financieros

   De manera análoga a los contratos bilaterales físicos, los contratos bilaterales financieros son un resultado del libre intercambio comercial entre oferentes y consumidores. A diferencia de los primeros, los últimos no afectan al despacho de la operación, sino que son acuerdos entre los participantes del mercado con el fin de manejar el riesgo de variaciones futuras del precio de la energía eléctrica.

Capítulo 2

Cálculo de Equilibrios

En este capítulo se describe uno de los resultados de este trabajo: el desarrollo de una herramienta de cálculo de equilibrios de Nash de juegos en forma normal, llamada EQUILIBRIA. En la sección 2.1 se describen brevemente algunas de las estrategias más conocidas para el cálculo de equilibrios de Nash de juegos en forma normal. En la sección 2.2 se describe el desarrollo de EQUILIBRIA. En primer lugar se explica el hecho de que el problema de encontrar un equilibrio de Nash de un juego finito en forma normal es equivalente a resolver cierto problema de complementaridad mixto. Luego se describe brevemente el solver PATH (preexistente) que se usa para resolver tal problema.

2.1. Estrategias Existentes de Cálculo de Equilibrios

A continuación, un breve repaso de algunas de las principales estrategias de cálculo de equilibrios de Nash en estrategias mixtas de juegos finitos en forma normal. Algunos de estos métodos pueden ser aplicables a juegos no finitos.

En primera instancia se pueden clasificar entre aquellos métodos que calculan un equilibrio y aquellos que calculan todos los equilibrios. Evidentemente, la importancia de los métodos que calculan un equilibrio es que éstos tienen tiempos de ejecución menores que aquellos que calculan todos los equilibrios. Es claro que los métodos que calculan un equilibrio pueden ser ejecutados varias veces (digamos, partiendo de diferentes puntos iniciales) con la esperanza de calcular varios equilibrios, pero sin ninguna garantía de encontrarlos todos.

Existe un software, GAMBIT ([MMT, MMT00]), que calcula equilibrios de Nash en juegos finitos, entre otras cosas. De entre los métodos que se describen a continuación, en él se encuentran implementados: el métodos de Lemke-Howson y un método basado en el algoritmo de cálculo de punto fijo de Scarf.

2.1.1. Cálculo de un Equilibrio

Métodos Globalmente Convergentes

Veamos primero aquellos métodos que son globalmente convergentes.

En el caso de juegos de 2 jugadores, se cuenta con el algoritmo de Lemke-Howson ([MM96], [LH64], [Lem65], [Eav71]), que es hoy en día un método capaz de resolver problemas de complementaridad lineal (LCP) (véase sección 1.1).

En el caso de n jugadores, un enfoque conocido es utilizar algoritmos derivados del algoritmo de Scarf ([MM96], [Sca98]) para calcular puntos fijos de una función continua sobre un conjunto convexo compacto no vacío.

Métodos Sin Convergencia Global

Se vio en la subsección 1.2.3 que encontrar un equilibrio es equivalente a encontrar una solución a un problema de complementaridad no lineal (ecuación 1.1). Resumidamente, un enfoque es aplicar una generalización del método de Newton (para encontrar un cero de una función C^1) al problema de complementaridad.

2.1.2. Cálculo de Todos los Equilibrios

Algunos teoremas garantizan que la tarea de calcular todos los equilibrios es, en principio, computacionalmente factible. Un *conjunto semi-algebraico* es un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que es el conjunto de los puntos satisfaciendo una fórmula proposicional $P(x)$ formada por igualdades y desigualdades polinomiales en las variables $x_1, \ldots, x_m$, los operadores lógicos 'y', 'o' y 'no' y paréntesis. De acuerdo a las caracterizaciones dadas en la subsección 1.2.3, el conjunto de equilibrios de Nash de un juego finito en forma normal es un conjunto semi-algebraico. De los trabajos de Hironaka ([Hir75]) y Collins ("cylindrical algebraic decomposition", [Col75]), se sabe que los conjuntos semi-algebraicos son triangularizables, de hecho, se cuenta con un algoritmo para encontrar una triangulación. Estos resultados son importantes porque la topología de un espacio con una triangulación finita está completamente determinada por los datos combinatoriales (finitos) que especifican la triangulación. Así, una gran cantidad de información topológica es, en principio, calculable.

2.2. Método Propuesto: EQUILIBRIA

EQUILIBRIA es uno de los resultados de este trabajo: un software que permite calcular equilibrios de Walras y de Nash en MATLAB. El cálculo de equilibrio de Walras no se describe aquí, pero puede encontrarse junto con ejemplos en la documentación de EQUILIBRIA, [Rad00], y en [Rad01].

2.2.1. Implementación

Considérese un juego en forma normal

$$\Gamma = (X_1, \ldots, X_n, u_1, \ldots, u_n),$$

con conjuntos de estrategias $X_i \subseteq \mathbb{R}^{N_i}$ descritos por un conjunto de igualdades y desigualdades y funciones de utilidad u_i dos veces diferenciables, de modo tal que las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker sean suficientes y necesarias. Por ejemplo, la siguiente proposición es una consecuencia elemental de las condiciones de optimalidad suficientes y necesarias de primer orden para problemas de optimización con restricciones (ver, por ejemplo, [RW98]):

Proposición 2.1 *Supongamos que, para cada $i = 1, \ldots, n$ y cada $x_{-i} \in X_{-i}$:*

1. *existen funciones $g_{ij} : \mathbb{R}^{N_i} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots q_i$, convexas continuamente diferenciables, $h_{ik} : \mathbb{R}^{N_i} \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, s_i$, lineales afines tales que:*

$$\begin{aligned} X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{N_i} \mid\ & g_{ij}(x_i) \leq 0, j = 1, \ldots q_i, \\ & h_{ik}(x_i) = 0, k = 1, \ldots, s_i\}, \end{aligned}$$

2. $u_i(\cdot, x_{-i})$ *cóncava continuamente diferenciable,*

3. $\sup_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i})$ *finito,*

4. existe $x_i \in X_i$ *tal que* $g_{ij}(x_i) < 0$*, para todo* $j = 1, \ldots, q_i$*.*

Entonces $x^* \in X$ *es equilibrio de Nash del juego* Γ *si y sólo si, para cada* $i = 1, \ldots, n$*, existen* $\lambda_{ij} \geq 0$*,* $j = 1, \ldots q_i$*, y* $\mu_{ik} \in \mathbb{R}$*,* $k = 1, \ldots, s_i$*, tales que:*

$$\lambda_{ij} g_{ij}(x_i^*) = 0, \qquad j = 1, \ldots q_i$$
$$-\nabla u_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q_i} \lambda_{ij} \nabla g_{ij}(x_i^*) + \sum_{k=1}^{s_i} \mu_{ik} \nabla h_{ik}(x_i^*) = 0.$$

Es fácil ver que la proposición 2.1 se aplica en el caso de un juego finito, es decir, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker son suficientes y necesarias.

Considérense F_i, l_i, u_i tales que $\mathrm{MCP}(F_i, l_i, u_i)$ es el problema de complementaridad mixto[1] asociado a las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del problema del i-ésimo jugador, $i = 1, \ldots, n$. Se definen entonces

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $x \in X$ es equilibrio de Nash para Γ si y sólo si x es solución de $\mathrm{MCP}(F, l, u)$.

Para calcular un equilibrio de Nash de Γ, se resuelve $\mathrm{MCP}(F, l, u)$ por medio del solver PATH, que se describe a continuación.

2.2.2. El Solver PATH

El solver PATH ([DF93], [FM98]) es un software desarrollado por Michael C. Ferris del Departamento de Ciencias de la Computación la Universidad de Wisconsin. Es una implementación de un método de Newton estabilizado para la solución del problema de complementaridad mixto. El esquema de estabilización emplea un procedimiento de generación de caminos que es usado para construir un camino lineal por trozos desde el punto actual al punto de Newton; un criterio que mide cuan aceptable es el largo del paso y una búsqueda a lo largo del camino no monótona son usados para escoger

[1] Véase la sección 1.1.

el siguiente punto. Se ha probado que el algoritmo es globalmente convergente bajo requerimientos que generalizan aquellos requeridos para obtener resultados similares en el caso suave.

Con respecto a las definiciones dadas en la subsección 1.1, PATH toma como datos un punto inicial, una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, las cotas l, u y una versión rala (sparse) del jacobiano de F y, cuando converge, entrega un $x \in \mathbb{R}^n$ que es solución (dentro de la precisión en uso) de $\mathrm{MCP}(F, l, u)$.

Capítulo 3

Modelamiento del Mercado

En este capítulo se presenta otro de los resultados de este trabajo: la formalización y estudio de algunas de las propiedades de 2 modelos del mercado de energía eléctrica. En la sección 3.1 se presenta un esquema genérico para describir y clasificar modelos del mercado de energía eléctrica. En la sección 3.2 se presenta una breve descripción de los modelos existentes que tuvieron mayor influencia en este trabajo. En la sección 3.3 se presenta un primer modelo que representa conjuntamente la inversión decidida por múltiples empresas que actúan de manera no cooperativa y la operación determinada por un agente central. En este caso se estudia la existencia y sensibilidad de la solución. En la sección 3.4 se presenta un modelo de operación multiagente, sin inversión, en una etapa y se hace un acercamiento al problema de la existencia de solución de este modelo.

3.1. Descripción y Clasificación de Modelos

Algunos de los criterios para clasificar modelos[1] del mercado de energía eléctrica son los siguientes:

- Inversión monoagente o multiagente.
- Operación[2] monoagente o multiagente.

[1] En este contexto la palabra "modelo" no se refiere a la estructura real de un mercado, sino a una abstracción matemática que intenta representar o simular tal realidad.

[2] "Operación" se refiere conjuntamente a los roles del operador de mercado, del operador del sistema, de la generación, transmisión y consumo.

- Uninodal o multinodal. En el primer caso el balance de energía ("oferta igual demanda") se hace globalmente: la oferta total iguala a la demanda total. En el segundo caso, se considera explícitamente en el modelo la presencia de una red de transmisión de energía: el balance de energía se hace en cada nodo de tal red. Tal red puede ser modelada considerando o no las pérdidas en la transmisión, las cotas en la potencia transmitida y otras restricciones técnicas.

- Con información completa o incompleta. Esto significa, respectivamente, que los agentes conocen o no conocen completamente el criterio de decisión de los demás agentes.

- Determinísticos o con aleatoriedad. Esto es, respectivamente, que los datos del problema se conocen con exactitud o bien son variables aleatorias.[3]

- Estáticos o dinámicos. *Estático* quiere decir que los agentes toman sus decisiones simultáneamente (o, equivalentemente, que toman sus decisiones sin conocer las decisiones de los demás); se dice *dinámico* cuando no es estático.

En los modelos, usualmente se supone que el o los agentes son maximizadores de utilidad (o minimizadores de costos). Esto conduce de manera natural a un problema de optimización en el caso monoagente y a uno de equilibrio en el caso multiagente.

Notar que un modelo monoagente puede verse como un caso particular de uno multiagente.

Un modelo puede resumirse especificando los siguientes elementos:

- Qué agentes participan en el modelo.

- Cuándo toman decisiones los agentes.

- Qué es lo que cada agente puede hacer en cada decisión que enfrenta.

- Qué es lo que cada agente sabe al tomar cada decisión.

[3] En ocasiones se usa la siguiente terminología: "incertidumbre" se refiere a la toma de decisiones dado el desconocimiento del actuar de otros agentes del mercado, en cambio, la toma de decisiones es con "aleatoriedad" cuando el desconocimiento se debe a causas naturales.

- El pago que cada agente recibe para cada combinación de decisiones escogidas por los agentes.

Debe tenerse presente que el "cuándo" es un modelo y no necesariamente corresponde a la secuencia de eventos de la situación que se intenta modelar.

Con respecto a la naturaleza de las decisiones en un modelo del mercado de energía eléctrica, las decisiones de inversión corresponden, por ejemplo, a la construcción de centrales en cierto momento del horizonte de planificación del modelo. Las decisiones de operación pueden corresponder, por ejemplo, a manejo de aguas, flujos en la red y niveles de generación.

3.2. Algunos Modelos Existentes

Estos son algunos de los trabajos que tuvieron influencia en éste:

1. [Sil99] considera primero un modelo centralizado, sin inversión, multinodal, multi-embalse, de minimización de costos para el problema de operación de un sistema hidrotérmico con pérdidas en la transmisión. Tal problema es formulado como un problema de optimización estocástica multietapa no lineal, donde las pérdidas son aproximadas mediante el modelo de aproximación activa a corriente continua. Es decir, tiene la forma (véase 1.4 para algunos detalles de la notación):

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^1 z^1 + \mathbb{E}_{\xi^2}\big[\min c^2(\omega) z^2(\omega^2) + \cdots + \mathbb{E}_{\xi^H}[\min c^H(\omega) z^H(\omega^H)] \cdots \big] \\
\text{s.a.} \quad & W^1 z^1 + F^1(z^1) \leq h^1 \\
& T^1(\omega) z^1 + W^2 z^2(\omega^2) + F^2\big(z^2(\omega^2)\big) \leq h^2(\omega) \\
& \vdots \\
& T^{H-1}(\omega) z^{H-1}(\omega^{H-1}) + W^H z^H(\omega^H) + F^H\big(z^H(\omega^H)\big) \leq h^H(\omega) \\
& z^1 \geq 0, \quad z^t(\omega^t) \geq 0, \quad t = 2, \ldots, H.
\end{aligned}$$

donde para $t = 1, \ldots, H$ se tiene $F^t : \mathbb{R}^{n_t} \to \mathbb{R}^{m_t}$ de la forma (para $i = 1, \ldots, m_t$):

$$F_i^t(z^t) = z^{t\prime} A_i^t z^t$$

con A_i^t matriz diagonal semidefinida positiva de $n_t \times n_t$. En este problema, la variable z^t corresponde a las decisiones de manejo de aguas, flujos en la red y niveles de generación de cada central. (Algunos detalles adicionales se encuentran en la subsección 3.3.1.) A continuación considera diversas técnicas de la optimización no lineal (como la descomposición de Benders y la relajación lagrangiana) para calcular de manera eficiente una solución de tal problema.

2. [KBP01] considera un modelo competitivo, sin inversión. Investiga el poder de mercado en un despacho hidrotérmico basado en subasta. El poder de mercado es simulado mediante un esquema de programación dinámica estocástica tal que la decisión es —para cada etapa, estado y escenario— un equilibrio (de Nash-Cournot, véase por ejemplo [Gib92]) para un juego multi-agente. Además, considera el efecto de contratos bilaterales[4] para mitigar el poder de mercado.

3. [JO99] estudia la paralelización eficiente de un modelo centralizado (mono-agente), multinodal y multi-embalse, que considera conjuntamente las decisiones de inversión y operación y cuyo objetivo es calcular la inversión y operación de mínimo costo. Esto conduce a un problema de optimización estocástica no lineal (por las pérdidas en la transmisión) con variables enteras (decisiones de inversión) y continuas.

3.3. Inversión Multiagente, Operación Monoagente

En esta sección se presenta un primer modelo de la inversión y operación, considerando múltiples empresas generadoras que toman las decisiones de inversión y un agente central que toma las decisiones de operación, dada la inversión decidida por las empresas. De acuerdo a las descripciones dadas en la sección 1.4, es razonable pensar que, en este modelo, el agente central representa el comportamiento del operador de mercado y del operador del sistema en un modelo de tipo pool, que no deja libertad en la operación a las empresas: todos los datos del problema —como los costos— son de conocimiento público.

Primeramente se describirá el modelo y el concepto de solución propuesto, luego se probará que existe tal solución y, finalmente, se estudiarán algunos aspectos de la sensibilidad de la solución con respecto a los datos del modelo.

[4] Véase subsección 1.4.2

3.3.1. Descripción del Modelo

Los agentes son ciertas empresas generadoras y un agente central. El modelo considera las siguientes etapas:

- Las generadoras toman decisiones de inversión simultáneamente, esto es, cada una decide sin conocer la decisión de las demás generadoras. Esto corresponde a un plan de obras para el horizonte considerado.
- El agente central decide la operación para todo el horizonte de planificación, conociendo las decisiones de inversión efectuadas por las empresas generadoras.
- Al agente central se le asigna el costo de operación asociado a su decisión; cada generadora recibe como utilidad los ingresos por venta de energía de sus centrales menos los costos de inversión y operación de sus centrales.

Se supone además que hay información completa.

A continuación, una descripción más detallada de los agentes:

El Agente Central

Para el agente central, se puede considerar un modelo de operación centralizado con un criterio de minimización de costos; en este caso se consideró el expuesto en [Sil99], que se introduce brevemente en la sección 3.2. Éste es un modelo hidrotérmico, multinodal, multietapa, en etapas trimestrales y con aleatoriedad en los caudales de agua (un espacio de probabilidad con caudales $\omega \in \Omega$ finito). Las variables de decisión son, para cada etapa de tiempo:

- los niveles de generación de cada central, x_i,
- los flujos de energía en cada línea de la red de transmisión, f_l, y
- los niveles de embalses y caudales destinados a turbinas, riego, etc. (manejo de aguas), V.

El objetivo del agente central es minimizar los costos esperados de operación de las centrales térmicas y de ciclo combinado.

Más en detalle, el problema del agente central se puede escribir entonces de la siguiente manera: (para simplificar la notación no se explicita el factor de descuento ni aquí ni en lo que sigue: cada término de una suma sobre el tiempo debe multiplicarse por $1/(1+r)^t$, donde r es la tasa de descuento correspondiente y t es la etapa)

$$\begin{aligned} \min_{(x,f,V)\in C(a^*)} \quad & c(x,f,V) \\ \text{con } c(x,f,V) := \mathbb{E}_\omega & \sum_{t\in T} \sum_{i\in ITCC} c_{it}^V x_{it}(\omega) \end{aligned}$$

donde

1. $ITCC$ son las centrales térmicas y las de ciclo combinado (se asume que las centrales hidráulicas tienen costos variables despreciables, luego no contribuyen a los costos totales),
2. c_{it}^V es el costo de producir una unidad de energía en la central i en el periodo t, y
3. $C(a^*)$ es un convexo que resume las restricciones de manejo de aguas, flujo de energía factible, niveles de generación factibles, satisfacción de demanda, etc. Tales restricciones son lineales salvo por un término cuadrático asociado a las pérdidas en la transmisión.

La dependencia en a^* denota el hecho de que las decisiones del agente central se toman conociendo (y depende de) las decisiones de inversión de las empresas generadoras: a^* denota las decisiones de inversión de las empresas generadoras.

De acuerdo a lo expuesto en [Sil99], este problema puede verse como un problema de optimización estocástica multietapa.

Las Empresas Generadoras

Sea G el conjunto finito de las empresas generadoras, sea A_g el conjunto finito de acciones para $g \in G$. Las acciones pueden ser elementos del estilo de "instalar cierta central en cierto momento con cierta capacidad".[5]

[5] En realidad puede ser casi cualquier modificación a los datos del problema de operación que enfrentará el agente central.

Por ejemplo, podríamos considerar un caso particular con 2 empresas, $G = \{1, 2\}$, cada una proyectando construir una central distinta. Los conjuntos de acciones para cada empresa podrían ser $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$, con a_{11} = "se construye en periodo 1", a_{12} = "se construye en periodo 2", a_{13} = "no se construye", y análogamente para la empresa 2.

Las utilidades de la empresa g cuando ella elige la acción i y la otra empresa escoge la acción j están dadas por:

$$u_g(i,j) := -c_g^I(i) + \mathbb{E}_\omega \sum_{t\in T} \sum_{k\in ITCC_g} \big(p_{kt}^*(i,j,\omega) - c_{kt}^V\big) x_{kt}^*(i,j,\omega)$$

donde

1. $c_g^I(i)$ es el costo de inversión asociado a la empresa g cuando escoge la estrategia i,
2. c_{kt}^V es el costo variable de operación por unidad de energía de la central k en el instante t,
3. $ITCC_g$ son las centrales térmicas y de ciclo combinado de propiedad del agente g,
4. $x_{kt}^*(i,j,\omega)$ es el nivel de generación de la central k en el instante t y escenario ω que resulta de la operación óptima decidida por el agente central dadas las decisiones de inversión (se supone $x_{kt}^*(i,j,\omega) = 0$ para las centrales no construidas), y
5. $p_{kt}^*(i,j,\omega)$ es el precio de la energía asociado a la central k en el periodo t y escenario ω, que puede ser un dato a priori o bien puede ser resultado de la operación óptima, por ejemplo las variables duales asociadas a las restricciones de satisfacción de demanda (o, equivalentemente, balance de energía) en el respectivo nodo de la red. En los desarrollos que siguen en el resto de esta sección se considera el caso en el que los precios son un dato a priori. La mayoría de los resultados (como la existencia de solución) se pueden extender al caso de precios dados por variables duales.

Volviendo al caso general con más de 2 jugadores, las utilidades de una empresa $g \in G$ cuando todas las empresas escogen la acción $a \in A = \prod_{g\in G} A_g$ están dadas por:

$$u_g(a) := -c_g^I(a) + \mathbb{E}_\omega \sum_{t\in T} \sum_{k\in ITCC_g} \big(p_{kt}^*(a,\omega) - c_{kt}^V\big) x_{kt}^*(a,\omega).$$

con definiciones análogas a las dadas para el caso de 2 jugadores.

Formulación como Juego en Forma Normal

Sea C el conjunto de las funciones que a cada $a \in A$ le asocian una decisión de operación factible para el problema del agente central, más formalmente:

$$\begin{aligned} C &= \{y : A \to \mathbb{R}^m \mid (\forall a \in A)\ y(a) \in C(a)\} \\ &= \prod_{a \in A} C(a). \end{aligned}$$

donde m es la dimensión del espacio de las decisiones de operación (i.e. $C(a) \subseteq \mathbb{R}^m$). Considérese además la función $\pi : A \times C \to \mathbb{R}$ dada por

$$\pi(a, y) = -c\big(y(a)\big).$$

Entonces $\Gamma = (\{A_g\}_{g \in G}, C, \{u_g\}_{g \in G}, \pi)$ es un juego en forma normal.[6][7]

Solución

El concepto de solución que se considerará para el modelo anterior será el de equilibrio de Nash para el juego Γ antes descrito, cuando los inversionistas consideran estrategias mixtas y el agente central, estrategias puras[8]. La función de utilidad del agente central se extiende al espacio de estrategias mixtas de las empresas generadoras mediante el concepto de utilidad esperada introducido en la sección 1.2.2. Es decir (si seguimos denotando π a la extensión), para $p \in \Delta$, $y \in C$:

$$\pi(p, y) = -\mathbb{E}_p(c \circ y). \tag{3.1}$$

Sea

$$\Gamma' = (\{\Delta_g\}_{g \in G}, C, \{u_g\}_{g \in G}, \pi)$$

el juego recién descrito.

[6] Aquí hay un pequeño abuso de notación en el hecho de que, hasta ahora, no se había escrito explícitamente la dependencia de u_g en y.

[7] En realidad, podría pensarse que, como se trata de un juego dinámico, sería natural trabajar con la forma extensiva (véase por ejemplo [Gib92]) en vez de la forma normal. Sin embargo, desde el punto de vista dinámico, el juego es muy simple como para introducir toda la maquinaria de la forma extensiva; por otra parte, los resultados de sensibilidad considerados más adelante operan más naturalmente en la forma normal.

[8] Véase la sección 1.2, en particular la subsección 1.2.2

3.3.2. Existencia de Solución

Se analiza primeramente el problema del agente central (cuando se considera el modelo de operación antes descrito: [Sil99]), dadas las decisiones de inversión de las empresas generadoras. El problema del agente central es equivalente a un problema de minimización convexo y s.c.i., sobre un conjunto factible compacto. Luego, como se ve en [Sil99], si el problema es factible entonces existe solución. Con respecto a la factibilidad, los orígenes de infactibilidad pueden ser:

- Demanda insatisfecha. La presencia de centrales de falla hace que el problema se vuelva factible.

- Cotas mínimas de riego o cotas mínimas de volumen embalsado insatisfechas. En este caso se hará una simplificación del modelo: no se considerará el riego o —equivalentemente para nuestros fines— no se considerarán aquellas cotas en el riego que conducen a infactibilidad.

En consecuencia, cuando existen centrales de falla, el problema del agente central posee solución.

Se denomina estrategia óptima (o de equilibrio)[9] para el agente central a cualquier función $y^* \in C$ tal que a cada acción conjunta de las empresas le asocia alguna decisión optimal para el agente central, es decir, tal que, para todo $a \in A$:

$$y^*(a) \in \operatorname*{argmin}_{C(a)} c(x, f, V).$$

El análisis previo permite concluir:

Afirmación 3.1 *En el juego Γ' existe al menos una estrategia óptima para el agente central.*

La sencillez de la existencia y caracterización de una estrategia óptima para el agente central, fue posible gracias a que el modelo se construyó de tal manera que al momento de tomar su decisión él conoce la decisión de los demás.

[9] El nombre "estrategia de equilibrio" tiene sentido ya que, en realidad, es una "estrategia (débilmente) dominante", es decir, una estrategia que, para toda decisión de los demás jugadores ($a \in A$), es óptima para el agente central. Veremos que hay un equilibrio de Nash para el juego Γ' en el cual el agente central juega esta estrategia dominante.

Considérese ahora el juego reducido que jugarían las empresas tomando como dato y^*

$$\Gamma''_{y^*} = (\{\Delta_g\}_{g\in G}, \{u_g(\cdot, y^*)\}_{g\in G}).$$

que es el juego en estrategias mixtas asociado a un juego finito en forma normal. En virtud del teorema de Nash (corolario 1.6):

Afirmación 3.2 *Para todo $y \in B$, el juego Γ'' posee al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

En términos del juego Γ', las estrategias así construidas forman un equilibrio:

Proposición 3.3 *Sea y^* una estrategia óptima para el agente central y p^* un equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego Γ''_{y^*}. Entonces (p^*, y^*) es un equilibrio para Γ'.*

DEMOSTRACIÓN. Por construcción, para cada $g \in G$ y para (p^*_{-g}, y^*), se tiene que p^*_g es una respuesta óptima para la empresa g, i.e. p^*_g es solución óptima del problema de la empresa g. Para completar la demostración, basta probar que y^* es solución óptima del problema del agente central dado p^*. En efecto, sea $y \in C$ cualesquiera. Por construcción, se tiene que, para todo $a \in A$

$$c\big(y(a)\big) \geq c\big(y^*(a)\big).$$

Es decir

$$c \circ y \geq c \circ y^*$$

Luego

$$\mathbb{E}_{p^*}(c \circ y) \geq \mathbb{E}_{p^*}(c \circ y^*)$$

y, con la definición de π (véase la ecuación 3.1), la función de utilidad del agente central, se concluye

$$\pi(p^*, y) \leq \pi(p^*, y^*).$$

□

Combinando las afirmaciones 3.1 y 3.2 y la proposición 3.3 se obtiene:

Proposición 3.4 *El juego Γ' posee un equilibrio de Nash.*

En conclusión, se ha trazado una vía de cálculo de una solución que nos garantiza existencia en el modelo en consideración.

3.3.3. Análisis de Sensibilidad

En esta parte, cuando se diga "instancia del modelo" o simplemente "modelo" se refiere a una instancia particular del modelo antes descrito: inversión multiagente y operación monoagente, donde las empresas generadoras escogen estrategias mixtas y el agente central escoge estrategias puras. La convergencia de juegos es en el sentido de la definición 1.11.

El siguiente resultado de sensibilidad se refiere al caso en que se perturban los datos de las funciones de utilidad de los jugadores:

Proposición 3.5 *Sea Γ una instancia del modelo con vector de costos variables c^V, vector de costos de inversión c^I y vector de probabilidades p de los escenarios $\omega \in \Omega$; para cada $\nu \in \mathbb{N}$, sea Γ_ν un modelo igual a Γ salvo porque el vector de costos variables se sustituyó por c^V_ν, el vector de costos de inversión se sustituyó por c^I_ν y el vector de probabilidades se sustituyó por p_ν. Si $c^V_\nu \to c$, $c^I_\nu \to c^I$ y $p_\nu \to p$ entonces $\Gamma_\nu \to \Gamma$.*

Demostración. Basta notar que las funciones de utilidad de las empresas y del agente central son continuas con respecto a c^I, c^V y p, así como con respecto a las estrategias, lo cual es suficiente para tener la convergencia continua de las funciones de utilidad. Como los conjuntos factibles permanecen fijos, con lo anterior se tiene la convergencia de los juegos. $\square$

Para la siguiente proposición, repetimos aquí la forma de un programa estocástico multietapa vista en la sección 1.3, ecuación 1.4:

$$\begin{array}{ll} \min & c^1 z^1 + \mathbb{E}_{\xi^2}\left[\min c^2(\omega) z^2(\omega^2) + \cdots + \mathbb{E}_{\xi^H}[\min c^H(\omega) z^H(\omega^H)] \cdots \right] \\ \text{s.a.} & W^1 z^1 = h^1 \\ & T^1(\omega) z^1 + W^2 z^2(\omega^2) = h^2(\omega) \\ & \vdots \\ & T^{H-1}(\omega) z^{H-1}(\omega^{H-1}) + W^H z^H(\omega^H) = h^H(\omega) \\ & z^1 \geq 0, \quad z^t(\omega^t) \geq 0, \quad t = 2, \ldots, H. \end{array} \tag{3.2}$$

Esta proposición da un resultado de sensibilidad en el caso en que se perturban las restricciones de operación; se requiere una hipótesis adicional: que el problema del agente central sea a recurso completo (véase la sección 1.3).

Se necesita el siguiente resultado, que se cita parcialmente y sin demostración(teorema 4.32 de [RW98])

Teorema 3.6 (convergencia de soluciones de sistemas) *Sea*

$$C^\nu = \{x \in X^\nu \mid L^\nu(x) \in D^\nu\}$$
$$C = \{x \in X \mid L(x) \in D\}$$

para aplicaciones lineales $L^\nu, L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y conjuntos convexos $X^\nu, X \subset \mathbb{R}^n$ y $D^\nu, D \subset \mathbb{R}^m$ tales que $L(X)$ no puede separarse de D. Entonces

$$L^\nu \to L, X^\nu \to X, D^\nu \to D \Longrightarrow C^\nu \to C.$$

Ahora, la proposición anunciada:

Proposición 3.7 *Sea Γ una instancia del modelo con el problema del agente central, para cierto $a_0 \in A$, de la forma (3.2), es decir, un programa estocástico de H etapas lineal con recurso fijo, factible. Supongamos además que este problema es a recurso completo (véase la sección 1.3). Para cierto $\omega_0 \in \Omega$ y cierto $t_0 \in \{2, \ldots, H\}$ y para cada $\nu \in \mathbb{N}$, sea Γ_ν un modelo igual a Γ salvo porque los datos $T^{t_0-1}(\omega_0), W^{t_0}, h^{t_0}(\omega_0)$ que determinan el conjunto factible del agente central en la etapa t_0 y escenario ω_0 han sido reemplazados por $T_\nu^{t_0-1}(\omega_0), W_\nu^{t_0}, h_\nu^{t_0}(\omega_0)$. Si $T_\nu^{t_0-1}(\omega_0) \to T^{t_0-1}(\omega_0)$, $W_\nu^{t_0} \to W^{t_0}$ y $h_\nu^{t_0}(\omega_0) \to h^{t_0}(\omega_0)$ entonces $\Gamma_\nu \to \Gamma$.*

Demostración. Se debe probar que $C_\nu \to C$. El conjunto factible del agente central en Γ tiene la forma:

$$C = \prod_{a \in A} C(a)$$

y análogamente para Γ^ν:

$$C_\nu = \prod_{a \in A} C_\nu(a).$$

Se tiene que si $(\forall a \in A) C_\nu(a) \to C(a)$ entonces

$$\prod_{a \in A} C_\nu(a) \to \prod_{a \in A} C(a).$$

Luego, para concluir, basta probar que $C_\nu(a_0) \to C(a_0)$. En efecto, denótese D al conjunto definido por las restricciones de $C(a_0)$ salvo por la restricción perturbada. Es decir:

$$\begin{aligned} D = \{z \geq 0 \mid W^1 z^1 = h^1 & \\ & T^{t-1}(\omega) z^{t-1}(\omega^{t-1}) + W^t z^t(\omega^t) = h^t(\omega) \\ & t = 2, \ldots, H; \quad \omega \in \Omega; \qquad (t, \omega) \neq (t_0, \omega_0)\} \end{aligned}$$

que es un convexo. Sea L la aplicación lineal asociada al lado izquierdo de la restricción perturbada, es decir

$$L(z) = T^{t_0-1}(\omega_0)z^{t_0-1}(\omega_0^{t_0-1}) + W^{t_0}z^{t_0}(\omega_0^{t_0}).$$

Así:

$$\begin{aligned} C(a_0) &= \{z \in D \mid L(z) = h^{t_0}(\omega_0)\} \\ C_\nu(a_0) &= \{z \in D \mid T_\nu^{t_0-1}(\omega_0)z^{t_0-1}(\omega_0^{t_0-1}) + W_\nu^{t_0}z^{t_0}(\omega_0^{t_0}) = h_\nu^{t_0}(\omega_0)\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Fíjense $\bar{z}^1(\omega_0^1), \ldots, \bar{z}^{t_0-1}(\omega_0^{t_0-1})$ factibles. Sea $D' \subseteq D$ dado por

$$D' = \{z \in D \mid z^1(\omega_0^1) = \bar{z}^1(\omega_0^1), \ldots, z^{t_0-1}(\omega_0^{t_0-1}) = \bar{z}^{t_0-1}(\omega_0^{t_0-1})\}$$

Entonces, gracias a que el problema del agente central es a recurso completo: dada la historia $\bar{z}^1(\omega_0^1), \ldots, \bar{z}^{t_0-1}(\omega_0^{t_0-1})$ hasta la etapa $t_0 - 1$, se tiene que todo $z^{t_0}(\omega_0^{t_0}) \geq 0$ posee una realización factible en su futuro. Luego:

$$L(D') = \operatorname{pos} W^{t_0} = \mathbb{R}^k$$

con k el número de filas de W^{t_0}. En particular,

$$h^{t_0}(\omega_0) \in \operatorname{int} L(D),$$

con lo que, en virtud del teorema 3.6 y teniendo en cuenta la ecuación (3.3), se concluye $C_\nu(a_0) \to C(a_0)$.

□

En realidad estas proposiciones son sólo una preparación para aquella que es más importante en el modelamiento: la sensibilidad conjunta con respecto a todos los datos del modelo. La idea de la demostración es la misma que en las anteriores, pero la notación es más complicada.

Proposición 3.8 *Sea Γ una instancia del modelo con el problema del agente central, para todo $a \in A$, de la forma (3.2), es decir, un programa estocástico factible de H etapas lineal con recurso fijo y completo. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, sea Γ_ν un modelo igual a Γ salvo porque:*

1. *el vector de costos variables c^V se sustituyó por c_ν^V, el vector de costos de inversión c^I se sustituyó por c_ν^I y el vector de probabilidades p se sustituyó por p_ν,*

2. para cada $a \in A$: $W^{(a)1}$ y $h^{(a)1}$, los datos que determinan el conjunto factible del agente central en la etapa 1 y todo escenario dada la decisión a de las empresas, han sido reemplazados por $W_\nu^{(a)1}$ y $h_\nu^{(a)1}$, y

3. para cada $a \in A$, $\omega \in \Omega$ y $t \in \{2, \ldots, H\}$: los datos $T^{(a)t-1}(\omega)$, $W^{(a)t}$, $h^{(a)t}(\omega)$ que determinan el conjunto factible del agente central en la etapa t y escenario ω dada la decisión a de las empresas, han sido reemplazados por $T_\nu^{(a)t-1}(\omega), W_\nu^{(a)t}, h_\nu^{(a)t}(\omega)$.

Si

1. $c_\nu^V \to c$, $c_\nu^I \to c^I$ y $p_\nu \to p$,

2. $(\forall a \in A)$: $W_\nu^{(a)1} \to W^{(a)1}$, $h_\nu^{(a)1} \to h^{(a)1}$, y

3. $(\forall a \in A)$, $(\forall t \in \{2, \ldots, H\})$, $(\forall \omega \in \Omega)$: $T_\nu^{(a)t-1}(\omega) \to T^{(a)t-1}(\omega)$, $W_\nu^{(a)t} \to W^{(a)t}$ y $h_\nu^{(a)t}(\omega) \to h^{(a)t}(\omega)$,

entonces $\Gamma_\nu \to \Gamma$.

Demostración. La convergencia continua de las funciones de utilidad se obtiene con el argumento de la proposición 3.5.

Se debe probar que $C_\nu \to C$. Para ello, basta probar que

$$(\forall a \in A) C_\nu(a) \to C(a).$$

Fíjese $a \in A$. Para cada $\omega \in \Omega$, $t \in \{1, \ldots, H\}$, sea $L_{\omega t}^{(a)}$ la aplicación lineal asociada al lado izquierdo de la restricción correspondiente a la etapa t y escenario ω, dada la decisión a de las empresas, en el juego Γ.

Sea $D = \mathbb{R}_+^n$ con n el número de variables del problema estocástico en cuestión (notar que este D contiene al D de la proposición 3.7). El mismo argumento de la proposición 3.7 permite concluir que, para todo $t \in \{2, \ldots, H\}$ y para todo $\omega \in \Omega$:

$$h^{(a)t}(\omega) \in \operatorname{int} L_{\omega t}^{(a)}(D).$$

Un argumento análogo permite concluir que

$$h^{(a)1} \in \operatorname{int} L_{\omega 1}^{(a)}(D).$$

Es decir, abusando de la notación para escribir todas las restricciones de igualdad del problema estocástico en cuestión como una sola:

$$h^{(a)\cdot}(\cdot) \in \operatorname{int} L_{\cdot\cdot}^{(a)}(D).$$

Esto, combinado con el hecho de que

$$C(a) = \{z \in D \mid L_{\cdot\cdot}^{(a)}(z) = h^{(a)\cdot}(\cdot)\}$$

y el teorema 3.6 permite concluir que $C_\nu(a) \to C(a)$. Luego $\Gamma_\nu \to \Gamma$. $\square$

Los resultados anteriores con el teorema 1.12 entregan resultados de sensibilidad de inmediato.

3.3.4. Cálculo de una Solución

Siguiendo los pasos de la subsección 3.3.2:

1. Primero se calcula alguna estrategia óptima y^* para el agente central. Para ello, para cada $a \in A$, se resuelve el problema del agente central. Es un problema de programación estocástica multietapa lineal con espacio de probabilidad de cardinal finito. La vía propuesta es la descomposición anidada de Benders. Varios refinamientos de esta vía se pueden encontrar en [Sil99].

2. Luego se calcula un equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego reducido en el que las empresas toman como dato la estrategia óptima del agente central antes calculada (y^*). Aquí se utiliza EQUILIBRIA.

3.4. Operación Multiagente

El segundo modelo que se estudió en este trabajo es un acercamiento al modelamiento de la operación multiagente. Este modelo considera una etapa de la operación: múltiples empresas informan a un agente central el precio de la energía que ofrecen en cada una de sus centrales y, a continuación, el agente central decide la cantidad de energía que compra a las empresas de modo de satisfacer la demanda y tomando en cuenta la red de transmisión.

3.4.1. Descripción del Modelo

Los agentes son ciertas empresas generadoras ($g \in G$) y un agente central.

La secuencia de eventos del juego es la siguiente:

1. Cada empresa generadora escoge privadamente un precio por central y se lo comunican simultáneamente al agente central.
2. El agente central decide la operación del sistema: flujos en la red (f) y cantidades de energía que compra a las generadoras (q), sujeto a restricciones de la red de transmisión y satisfacción de la demanda.
3. Las generadoras reciben ingreso por venta de energía menos costos de generación. El agente central paga a las generadoras la energía que decidió comprarles.

Se supone que hay información completa.

El Agente Central

El problema del agente central es el siguiente, dados los precios ofrecidos por las empresas generadoras (p^*):

$$\begin{aligned} &\min_{(f,q)\in C} \quad Q(q) \\ &\text{con } Q(q) := \sum_{i\in I} p_i^* q_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

con I el conjunto de todas las centrales y C un convexo cerrado no vacío que representa las restricciones asociadas a la transmisión y la satisfacción de la demanda.

Las Empresas Generadoras

Para $g \in G$, el problema de la empresa generadora g es, dado $y^* = (f^*, q^*)$, la decisión del agente central en función de los precios y p_{-g}, la decisión de las otras empresas generadoras:

$$\begin{aligned} &\max_{p_g\in P_g} \quad u_g(p_g, p_{-g}, y^*) \\ &\text{con } u_g(p_g, p_{-g}, y^*) = \sum_{i\in I_g} p_i q_i^*(p_g, p_{-g}) - C_i(q_i^*(p_g, p_{-g})). \end{aligned}$$

con I_g el conjunto de las centrales que pertenecen a g, $P_g \subseteq \mathbb{R}_+^{I_g}$ el espacio de estrategias asociado la empresa g (el espacio de precios), $p_g = (p_i)_{i \in I_g}$ y C_i la función costos de generación de la central i, que se supone convexa.

Formulación como Juego en Forma Normal

Sea $P = \prod_{g \in G} P_g$ el espacio conjunto de estrategias de las empresas generadoras. Sea B el conjunto de las funciones que a cada oferta de las empresas generadoras p le asocian una decisión factible para el agente central, es decir

$$B = \{y : P \to C\}.$$

Sea la función de utilidad del agente central $\pi : P \times B \to \mathbb{R}$ dada por

$$\pi(p, y) = -Q(y(p)).$$

Entonces $\Gamma = (\{P_g\}_{g \in G}, B, \{u_g\}_{g \in G}, \pi)$ es un juego en forma normal.

Solución

Una solución de este modelo es un equilibrio de Nash del juego Γ antes descrito[10].

3.4.2. Propiedades Básicas

En analogía con el modelo de inversión y operación de la sección 3.3, es fácil ver que, si existe solución, entonces ésta se puede construir de la siguiente manera: se escoge una estrategia óptima (o dominante) del agente central $y^* \in B$ y luego se escoge un equilibrio de Nash del juego reducido entre las empresas generadoras[11]:

$$\Gamma''_{y^*} = (\{P_g\}_{g \in G}, \{u_g(\cdot, y^*)\}_{g \in G}).$$

De acuerdo a la forma del problema del agente central (ecuación 3.4), no es difícil garantizar la existencia de una estrategia dominante para el agente central, por ejemplo si C es compacto, una condición muy razonable en el problema eléctrico, donde todas las variables representan magnitudes físicas.

[10] Este concepto de solución es sólo una sugerencia o ejemplo. No es claro que sea el buen concepto de solución, puesto que no se ha garantizado existencia.

[11] Esto no es más que lo que se llama "inducción reversa" en el contexto de juegos dinámicos (véase [Gib92])

Sin embargo, hasta aquí llegan las analogías con el modelo de inversión y operación: ahora el juego Γ'' no es equivalente a la búsqueda de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de un juego finito en forma normal. De hecho, en general las funciones de utilidad $u_g(\cdot, y^*)$ no tienen por qué ser continuas (ni siquiera semi-continuas) ni convexas (ni siquiera cuasi-convexas) ya que y^* (que aparece en la función de utilidad de las empresas) no tiene necesariamente esas propiedades y, en consecuencia, los resultados clásicos (como el teorema 1.5) no son claramente aplicables.

Aquellos teoremas clásicos permiten concluir fácilmente afirmaciones como la siguiente:

Proposición 3.9 *Supóngase que cada empresa generadora posee exactamente una central, que los costos son lineales ($C_g(q_g) = c_g q_g$ con $c_g \geq 0$) y que, para todo $g \in G$, $P_g \subseteq [c_g, +\infty]$ es un convexo compacto no vacío. Si existe $y^* = (f^*, q^*)$ estrategia óptima del agente central continua tal que para todo p_{-g} se tiene $q_g(\cdot, p_{-g})$ cóncava continua decreciente dos veces diferenciable, entonces existe solución.*

Demostración. Basta verificar las hipótesis del teorema 1.5. En efecto, la única hipótesis de tal teorema que no es evidente que se cumpla es la concavidad de las funciones de utilidad de las empresas: u_g. Pero, para $g \in G$,

$$u_g(p_g, p_{-g}, y^*) = (p_g - c_g) q_g^*(p_g, p_{-g})$$

y, luego

$$\frac{\partial u_g}{\partial p_g}(p_g, p_{-g}, y^*) = (p_g - c_g)\frac{\partial}{\partial p_g} q_g^*(p_g, p_{-g}) + q_g^*(p_g, p_{-g})$$
$$\frac{\partial u_g^2}{\partial p_g^2}(p_g, p_{-g}, y^*) = (p_g - c_g)\frac{\partial^2}{\partial p_g^2} q_g^*(p_g, p_{-g}) + 2\frac{\partial}{\partial p_g} q_g^*(p_g, p_{-g}) \leq 0$$

gracias a la concavidad y decrecimiento de $q_g^*(\cdot, p_{-g})$. □

Veremos a continuación que, en realidad, la continuidad y la monotonía son razonables.

Monotonía

Una condición mínima de consistencia es que el modelo esté de acuerdo con la siguiente intuición económica: "si yo, como empresa generadora, aumento algún precio (con todo lo demás constante), entonces el consumo respectivo no puede aumentar". De hecho, no se requiere ninguna condición especial acerca del problema del agente central (que decide cuánto consume) para que ésta intuición se realice siempre:

Proposición 3.10 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo cerrado no vacío. Sea $q^* : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por*

$$q^*(p) = \operatorname*{argmax}_{q \in C} p' q.$$

Entonces q^* es monótona maximal.

Demostración. Se tiene que

$$q \in q^*(p) \Longleftrightarrow p \in N_C(q).$$

Es decir

$$N_C^{-1} = q^*.$$

El corolario 12.8 de [RW98] dice precisamente que N_C es monótono maximal y, equivalentemente (ejercicio 12.8, [RW98]), N_C^{-1} es monótono maximal. □

Formulando la proposición anterior en términos del efecto del comportamiento del agente central ante una modificación del precio, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.11 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo cerrado no vacío. Sea $q^* : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por*

$$q^*(p) = \operatorname*{argmin}_{q \in C} p' q.$$

Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $p_i^1, p_i^2 \in \mathbb{R}$ y $q^1 \in q^*(p_i^1, p_{-i})$, $q^2 \in q^*(p_i^2, p_{-i})$. Entonces

$$p_i^1 < p_i^2 \Longrightarrow q_i^1 \geq q_i^2.$$

Demostración. Por la proposición 3.10 se tiene $p \rightrightarrows q^*(-p)$ monótona. Luego:

$$(q^1 - q^2) \cdot ((-p^1) - (-p^2)) \geq 0.$$

Es decir

$$(q_i^1 - q_i^2)(p_i^1 - p_i^2) \leq 0$$

a partir de lo cual la conclusión buscada es evidente. □

Continuidad

Una condición razonable sobre el modelo puede garantizar que q^*, las cantidades que el agente central decide consumir como función del precio p, es univaluada y continua. La condición es que se consideren las pérdidas cuadráticas en la transmisión y que exista a lo más una central en cada nodo de la red. Para obtener esta conclusión, se necesita un par de resultados y definiciones previos (definición 1.16, teorema 1.17 y ejercicio 5.22 de [RW98]) que se citan parcialmente y sin demostrar:

Definición 3.12 *Una función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ con valores $f(x,u)$ tiene* conjuntos de nivel acotados en x localmente uniformemente en u *si para cada $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una vecindad $V \in \mathcal{N}(\bar{u})$ y un conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\{x \mid f(x,u) \leq \alpha\} \subset B$ para todo $u \in V$; o, equivalentemente, existe una vecindad $V \in \mathcal{N}(\bar{u})$ tal que el conjunto $\{(x,u) \mid u \in V, f(x,u) \leq \alpha\}$ es acotado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. ($\mathcal{N}(u)$ denota las vecindades de u)*

Teorema 3.13 (minimización paramétrica) *Sea*

$$p(u) := \inf_x f(x,u)$$
$$P(u) := \operatorname*{argmin}_x f(x,u),$$

en el caso de una función propia, s.c.i. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f(x,u)$ tiene conjuntos de nivel acotados en x localmente uniformemente en u. Para que p sea continua en un punto $\bar{u}$ con respecto a un conjunto U que contiene $\bar{u}$, una condición suficiente es la existencia de algún $\bar{x} \in P(\bar{u})$ tal que $f(\bar{x},u)$ es continua en u en el punto $\bar{u}$ con respecto a U.

Ejemplo 3.14 (multiaplicación conjunto óptimo) *Supóngase que*

$$P(u) := \operatorname*{argmin}_x f(x,u)$$

para una función propia, s.c.i. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ con $f(x,u)$ con conjuntos de nivel acotados en x localmente uniformemente en u. Sea $p(u) := \inf_x f(x,u)$ y considérese un conjunto $U \subset \operatorname{dom} p$. Entonces, P es continua con respecto a U en cualquier punto $\bar{u} \in U$ donde P es univaluada y p es continua con respecto a U.

Ahora, el resultado que nos interesa:

Proposición 3.15 *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Sea $I \subseteq V$ (nodos en los que hay una central). Sea $K_v \subseteq E$ el conjunto de las aristas adyacentes al vértice v. Supóngase que $y^* : \mathbb{R}^I \rightrightarrows \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^I$ está dada por (es decir, el problema del agente central tiene la forma siguiente):*

$$y^*(p) = \operatorname*{argmin}_{(f,q) \in C} p'q \tag{3.5}$$

con

$$\begin{aligned} C = \{(f, q) \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^I \mid \\ \sum_{e \in K_i} r_e \frac{1}{2} f_e^2 + \sum_{e \in K_i} f_e + d_i \leq q_i \quad i \in I, \\ \sum_{e \in K_i} r_e \frac{1}{2} f_e^2 + \sum_{e \in K_i} f_e + d_i \leq 0 \quad i \in V \backslash I, \\ -\bar{f} \leq f \leq \bar{f}, 0 \leq q \leq \bar{q}\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $\bar{f}_e > 0$, $r_e > 0$ (resistencia) para todo $e \in E$, $\bar{q}_i > 0$ para todo $i \in I$, y $d_v \geq 0$ (demanda) para todo $v \in V$. Supóngase además que este problema es factible.

Entonces $q^*(p) : \mathbb{R}^I \rightrightarrows \mathbb{R}^I$ dada por $q^*(p) = \operatorname{proy}_{\mathbb{R}^I}(y^*(p))$ es univaluada y continua en todo $p \in \operatorname{int} \mathbb{R}^I_+$. ($\operatorname{proy}_C(a)$ denota la proyección de a sobre un convexo cerrado C)

Demostración. Sea $p \in \operatorname{int} \mathbb{R}^I_+$. Se tiene que las restricciones 3.6 (de balance de energía en cada vértices con central) están activas en el óptimo.[12]

Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $K_i \neq \varnothing$ para todo $i \in I$. (Si algún $K_i = \varnothing$, entonces el nodo i está aislado y $q_i^*(p) = d_i$.)

Sea $K = \bigcup_{i \in I} K_i$ (aristas adyacentes a centrales). Definiendo $D = \operatorname{proy}_{\mathbb{R}^K}(C)$ y $g : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(f, p) = \sum_{i \in I} p_i \Big[\sum_{e \in K_i} r_e \frac{1}{2} f_e^2 + \sum_{e \in K_i} f_e + d_i \Big],$$

el problema

$$\min_{f \in D} g(f, p) \tag{3.7}$$

[12]Si no, hay un exceso de energía en algún nodo y, en consecuencia, se pueden reducir los costos enviando menos energía a ese nodo.

es equivalente a 3.5 en el siguiente sentido: Si (f, q) resuelve 3.5, entonces $\mathrm{proy}_{\mathbb{R}^K}(f)$ resuelve 3.7. Recíprocamente, si f resuelve 3.7, entonces cualquier preimagen de f vía $\mathrm{proy}_{\mathbb{R}^K}(\cdot)$ resuelve 3.5.

Ahora, notar que la función objetivo g de 3.7 es estrictamente convexa (de hecho es lineal-cuadrática) y su conjunto factible es convexo, luego este problema tiene solución única, digamos $f^*(p)$. Además, f^* es continua para $p \in \operatorname{int} \mathbb{R}^I_+$ en virtud del teorema 3.13 y el ejemplo 3.14. En efecto, g, la función objetivo del problema 3.7 es continua, tanto en la variable f como en el parámetro p. Además, la condición de ser a conjuntos de nivel acotados en f localmente uniformemente en p es inmediata, dado que D es compacto.

En consecuencia, $q^*(p)$ es univaluada y continua pues está dada por:

$$q_i^*(p) = \sum_{e \in K_i} r_e \frac{1}{2} f_e^*(p)^2 + \sum_{e \in K_i} f_e^*(p) + d_i.$$

$\square$

Capítulo 4

Conclusión

En esencia, se puede decir que se lograron algunos avances relevantes para el logro de los objetivos específicos de este trabajo.

En primer lugar, se creó una herramienta de cálculo de equilibrios de Nash de juegos en forma normal, EQUILIBRIA, basada en una extensión del método de Newton al caso no diferenciable. Resumidamente, se replanteó el problema de calcular un equilibrio como el de resolver un problema de complementaridad mixto, el cual fue resuelto con el solver PATH. En pruebas informales, EQUILIBRIA resultó ser más rápido que otro software preexistente (GAMBIT, [MMT, MMT00]) basado en los algoritmos de cálculo de punto fijo de Scarf. Esto no es tan sorprendente si se considera que en el algoritmo de Scarf está garantizada la convergencia, mientras que en EQUILIBRIA no. Sin embargo, en esas mismas pruebas, nunca se observó que GAMBIT convergiera y EQUILIBRIA no.

En segundo lugar, se estudiaron 2 modelos del mercado de energía eléctrica con algún grado de competencia.

El primer modelo contempla empresas generadoras que toman decisiones de inversión, y, a continuación, un agente central que, dada la inversión, decide la operación del sistema que minimiza los costos totales, de modo de satisfacer la demanda. Cada uno de ellos enfrenta entonces los costos o utilidades asociados a sus decisiones y las de los demás. Se consideró como solución un equilibrio de Nash de este juego. En este modelo, se probó que existe una solución como esa y un resultado de sensibilidad: que la convergencia de los datos del modelo a un cierto límite implica que las soluciones asociadas, si se acumulan, entonces se acumulan en torno a una solución del modelo límite. Además, se propone una vía de cálculo de una solución de este modelo.

El segundo modelo se refiere a la operación competitiva o multiagente: cierto número de empresas generadoras comunican a una agente central el precio que cobran por la energía en cada una de sus centrales de generación; luego, de acuerdo a esos precios, el agente central decide cuánta energía debe inyectar cada central a la red, de modo de satisfacer la demanda. Como solución a este modelo se propone el equilibrio de Nash de tal juego. Con respecto a la existencia, se observa que depende fundamentalmente del comportamiento o decisión del agente central como función del precio. Se prueban 2 propiedades: que las cantidades que el agente central demanda son monótonas y continuas con respecto al precio.

Los resultados presentados en torno a estos modelos no son versiones definitivas en términos de generalidad o potencia, sino que son ejemplos concretos de los resultados que es posible obtener en esta clase de modelos con los teoremas y técnicas en torno a existencia y sensibilidad de equilibrios de Nash.

Hay varias tareas que, de ser completadas, satisfarían grandemente los objetivos. Algunas de estas tareas son descritas a continuación.

4.1. Ideas para Trabajos Futuros

Acerca de la Sensibilidad de Equilibrios de Nash

- Obtener una versión cuantitativa (es decir, métrica) del teorema de sensibilidad de Jofré y Wets. Si se siguiera el mismo camino que se usó para probar el resultado existente, entonces una dificultad particular que aparece es que la demostración pasa por un resultado de convergencia de puntos max-inf, el que se apoya en la noción de convergencia "lopsided" (asimétrica), para la cual no existe una caracterización métrica apropiada.

- Generalizar, dentro de lo posible, las conclusiones del teorema de Harsanyi al caso de juegos no necesariamente finitos. La demostración de Harsanyi no es necesariamente un buen punto de partida, pues utiliza de manera fundamental el hecho de que está en el contexto de juegos finitos.

Acerca del Cálculo de Equilibrios

- Probar algún resultado acerca de la convergencia de la estrategia desarrollada. En [DF93] se señalan las hipótesis bajo las cuales PATH converge a una solución del problema de complementaridad mixta que se le plantea y la velocidad a la cual lo hace.

- Portar la implementación a un lenguaje más eficiente.

- Estudiar e implementar la siguiente estrategia (descrita en [FP97]) para el caso de juegos finitos en forma normal:

  De acuerdo a la sección 1.2, sea $\Gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$ un juego finito en forma normal con vector de utilidad r. Entonces $p \in \Delta$ es equilibrio de Nash en estrategias mixtas de Γ si y sólo si p resuelve $\mathrm{VI}(F, \prod_{j \in J} \Delta_j)$, con $F_{ij}(p) := -x_{ij}(r, p)$. Este problema, a su vez, es equivalente a un problema de complementaridad mixto si se introducen multiplicadores: $\mathrm{VI}(F, [l, u] \cap X)$ con $X = \{x \mid Ax = b\}$ y A una matriz de $m \times n$ es equivalente a $\mathrm{VI}(H, [l, u] \times \mathbb{R}^m)$ con

$$H(x, \lambda) = \begin{pmatrix} F(x) + A'\lambda \\ -Ax + b \end{pmatrix}.$$

Acerca de los Modelos del Mercado

- Disponer de una implementación del modelo de inversión multiagente y operación monoagente presentado en la sección 3.3. Una dificultad práctica que presenta esta tarea es el tamaño del problema que resulta de una implementación ingenua: en el caso de etapas anuales con un horizonte de planificación de 10 años y con 10 escenarios hidrológicos por etapa, el problema tendrá 10^{10} escenarios, lo cual implica una cantidad de variables inmanejable.

- Disponer de un modelo de la operación de un mercado de energía eléctrica competitivo, cercano a la realidad y con un fundamento matemático adecuado (existencia, sensibilidad, cálculo, etc.). Parte de la dificultad de este problema radica en que, en un juego tipo subasta como éste, las funciones de utilidad de los jugadores no tienen por qué ser continuas ni convexas (basta pensar en lo que ocurre en una subasta cuando la postura de 2 jugadores es la misma). Un camino a seguir podría ser la aplicación o extensión de los resultados y ejemplos de existencia de equilibrio de Nash de juegos discontinuos presentados en [Ren99].

Bibliografía

[Aub93] Jean-Pierre Aubin. *Optima and Equilibria*. Número 140 en Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1993.

[BL97] John R. Birge y François Louveaux. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research. Springer, 1997.

[CHH97] J. Cardell, C. Hitt, y W. Hogan. Strategic interaction in power systems. *Energy and Resource Economics*, 19(1–2):109–137, marzo 1997.

[Col75] G. E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. En *Second Gl Conference on Automata Theory and Formal Languages*, tomo 33 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 134–183. Springer-Verlag, 1975.

[DF93] Steven P. Dirkse y Michael C. Ferris. The PATH solver: A nonmonotone stabilization scheme for mixed complementarity problems, septiembre 1993. http://www.cs.wisc.edu/˜ferris/.

[Eav71] B. C. Eaves. The linear complementarity problem. *Management Science*, 17:612–634, 1971.

[FM98] Michael C. Ferris y Todd S. Munson. Interfaces to PATH 3.0: Design, implementation and usage, mayo 1998. http://www.cs.wisc.edu/˜ferris/.

[FP97] Michael. C. Ferris y J. S. Pang. Engineering and economic application of complementarity problems. *SIAM Rev.*, 39(4):669–713, diciembre 1997.

[FS98] Michael C. Ferris y Krung Sinapiromsaran. Formulating and solving nonlinear programs as mixed complementarity problems, 1998. http://www.cs.wisc.edu/~ferris/.

[Gib92] Robert Gibbons. *A Primer in Game Theory*. Harvester Wheatsheaf, 1992.

[Har73] J. C. Harsanyi. Oddness of the number of equilibrium points: an new proof. *International Journal of Game Theory*, 2:235–250, 1973.

[Hir75] H. Hironaka. Triangulation of algebraic sets. En *AMS Symposium in Pure Mathematics*, tomo 29, páginas 165–185. 1975.

[JO99] Alejandro Jofré y Francisco Ortega. Energy generation planning model with investments and parallel stochastic optimization, 1999. Report for European Commission. INCO Project.

[JW99] Alejandro Jofré y Roger J-B Wets. Continuity results for Nash and Walras equilibrium points, diciembre 1999. Submitted.

[JW02] Alejandro Jofré y Roger J-B Wets. Continuity properties for Walras equilibrium points and applications, 2002. To appear in Annals of Operations Research.

[KBP01] Rafael Kelman, Luiz Augusto Barroso, y Mario Veiga F. Pereira. Market power assessment and mitigation in hydrothermal systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(3):354–359, agosto 2001.

[Lem65] C. E. Lemke. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science*, 11:681–689, 1965.

[LH64] C. E. Lemke y J. T. Howson, Jr. Equilibrium points in bimatrix games. *SIAM Journal on Applied Math*, 12:413–423, 1964.

[MM96] Richard D. McKelvey y Andrew McLennan. Computation of equilibria in finite games, junio 1996.

[MMT] Richard D. McKelvey, Andrew McLennan, y Theodore Turocy. Gambit. http://www.hss.caltech.edu/gambit/. Sitio web del proyecto.

[MMT00] Richard D. McKelvey, Andrew McLennan, y Theodore Turocy. *Gambit manual*. California Institute of Technology, octubre 2000.

[Nas51] John F. Nash. Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, 54:289–295, 1951.

[Rad00] Luis Rademacher. Documentación de EQUILIBRIA para MATLAB 5, enero 2000. lrademac@dim.uchile.cl.

[Rad01] Luis Rademacher. Informe de proyecto de ingeniería matemática, agosto 2001. lrademac@dim.uchile.cl.

[Ren99] Philip J. Reny. On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games. *Econometrica*, 67(5):1029–1056, septiembre 1999.

[RW98] Ralph Tyrrell Rockafellar y Roger J-B. Wets. *Variational Analysis*. Número 317 en Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1998.

[Sca98] Herbert E. Scarf. The computation of equilibrium prices. En Alan Kirman, editor, *Elements of General Equilibrium Analysis*, capítulo 3. Blackwell Publishers Ltd, 1998.

[Sil99] Nancy A. Silva. *Optimización estocástica aplicada al problema de operación eléctrica con pérdidas en las líneas de transmisión*. Memoria para optar al título de ingeniero matemático, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Matemática, agosto 1999.

[SLL00] Karl Seeley, Jacques Lawarrée, y Chen-Ching Liu. Analysis of electricity market rules and their effects on strategic behavior in a noncongestive grid. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(1):157–162, febrero 2000.

[vD91] Eric van Damme. *Stability and Perfection of Nash Equilibria*. Springer-Verlag, second edición, 1991.