Determinanten schiefsymmetrischer Matrizen

Matthias Köppe

Juni 1996

Zusammenfassung

Determinanten schiefsymmetrischer Matrizen geraden Typs sind das Quadrat einer ganzrationalen Funktion ihrer Elemente, der Pfaffschen der Matrix. Die spezielle Struktur dieser Funktion wird mittels Sätzen über Determinantenabbildungen und Bilinearformen nachgewiesen.

1 Pfaffsche einer Matrix

Definition Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit char $\mathbb{K} \neq 2$. Eine quadratische Matrix $A = ((a_{ij}))$ des Typs $n \times n$ mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{K}$ heißt *schiefsymmetrisch*, wenn ihre Transponierte A^{T} mit $-A$ übereinstimmt, also $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle i, j.

Die Einträge in der Hauptdiagonale sind sämtlich 0, denn die Beziehung $a_{kk} = -a_{kk}$ liefert $a_{kk} = 0$ wegen der Voraussetzung char $\mathbb{K} \neq 2$. Ähnliche Argumente werden wir auch im folgenden benötigen, aber die Forderung an die Charakteristik des Körpers soll nicht mehr erwähnt werden.

Die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix A ungeraden Typs verschwindet: Zunächst ist $\det A^{\mathsf{T}} = \det(-A)$. Durch Ausklammern von -1 aus jeder der n Zeilen erhalten wir daraus

$$\det A = (-1)^n \cdot \det A = -\det A,$$

also $\det A = 0$.

Determinanten schiefsymmetrischer Matrizen geraden Typs verschwinden im allgemeinen nicht. Wie der folgende Satz zeigen wird, sind sie gleich dem Quadrat einer ganzrationalen Funktion ihrer Einträge.

Definition Sei $A := (a_{ij})$ eine schiefsymmetrische Matrix des Typs $n \times n$ mit $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir

$$Pf(A) := \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \chi(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

die *Pfaffsche von A*.

Satz 1 *Sei A eine schiefsymmetrische quadratische Matrix geraden Typs. Dann gilt:* $\det A = (Pf(A))^2$.

Bevor wir den Satz beweisen, überprüfen wir die Aussage für schiefsymmetrische Matrizen des Typs 2×2 und 4×4. Dabei gewinnen wir eine wesentliche Aussage über die Struktur einer Pfaffschen.

Im Fall $m = 1$ hat die Matrix A die folgende Gestalt:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Berechnung der Pfaffschen bestätigt man den Satz:

$$\begin{aligned} Pf(A) &= \frac{1}{2^1 \cdot 1!}\left((+1) \cdot a_{12} + (-1) \cdot a_{21}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2 \cdot a_{12}) \\ &= a_{12} \\ \det A &= a_{12}^2 \\ &= (Pf(A))^2 \end{aligned}$$

Im Fall $m = 2$ hat die Matrix A die folgende Gestalt:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Um die Pfaffsche von A zu berechnen, ist die Summierung über $4! = 24$ Permutationen erforderlich. Um diesen Aufwand zu senken, wenden wir uns der Struktur der Pfaffschen zu.

Sei $\sigma \in S_{2m}$ eine Permutation und A_σ der zugehörige Summand in der Pfaffschen, nämlich

$$A_\sigma := \chi(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

Sei $\mathcal{T} := \{\langle 2t-1, 2t\rangle : t \in \{1, \ldots, m\}\} \subseteq S_{2m}$ die Klasse der Transpositionen der Gestalt $\langle 2t-1, 2t\rangle$. Zu $\tau \in \mathcal{T}$ betrachten wir den zur Permutation $\sigma \circ \tau$ gehörigen Summanden $A_{\sigma\circ\tau}$. Einerseits gilt

$$\chi(\sigma \circ \tau) = -\chi(\sigma).$$

Andererseits haben wir

$$a_{(\sigma\circ\tau)(2t-1),(\sigma\circ\tau)(2t)} = a_{\sigma(2t),\sigma(2t-1)} = -a_{\sigma(2t-1),\sigma(2t)}.$$

Die anderen Faktoren bleiben unverändert, und wir erhalten $A_{\sigma\circ\tau} = A_\sigma$.

Zu $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\} \subseteq \mathcal{T}$ setze $\tau_T := \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ (wohldefiniert und injektiv, da die $\tau_i \in \mathcal{T}$ auf disjunkte Teilmengen von $\{1, \ldots, 2m\}$ wirken). Dann gilt für τ_T mit $T \subseteq \mathcal{T}$ durch Induktion auch $A_{\sigma\circ\tau_T} = A_\sigma$.

Es gibt somit genau $\left|2^{\mathcal{T}}\right| = 2^{|\mathcal{T}|} = 2^m$ verschiedene Permutationen, die aus $\tau_i \in \mathcal{T}$ zusammengesetzt sind.

Ferner können wir die m Faktoren $a_{\sigma(\cdot)\sigma(\cdot)}$ beliebig permutieren, ohne daß sich deren Produkt ändert. Das Vertauschen zweier Faktoren äußert sich in genau zwei Transpositionen auf σ, also bleibt das Vorzeichen $\chi(\sigma)$ erhalten. Insgesamt gibt es genau $|S_m| = m!$ solcher Permutationen.

Ist also eine Permutation σ vorgegeben, so läßt sie sich mit den beschriebenen Operationen in $2^m \cdot m!$ verschiedene Permutationen σ_i mit $A_\sigma = A_{\sigma_i}$ umformen. Um die Pfaffsche zu berechnen, genügt es also, über den Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen von Permutationen zu summieren und die Summe mit $2^m \cdot m!$ zu multiplizieren. Eine geeignete Einschränkung der Permutationenmenge ist etwa:

$$\sigma(1) < \sigma(3) < \sigma(5) < \ldots < \sigma(2m-1)$$
$$\sigma(1) < \sigma(2); \sigma(3) < \sigma(4); \ldots; \sigma(2m-1) < \sigma(2m)$$

Wenn wir nur noch über einer derart eingeschränkten Permutationenmenge summieren, entfällt also der Reduktionsfaktor $\frac{1}{2^m \cdot m!}$ in der Formel der Pfaffschen.

Kehren wir jetzt zu der Pfaffschen einer 4reihigen Matrix zurück, so erhalten wir

$$Pf(A) = +a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23},$$

und durch Berechnen der Determinante und des Quadrats der Pfaffschen überzeugen wir uns von der Gültigkeit des Satzes für 4reihige Matrizen:

$$\begin{aligned}
\det A &= -a_{12}\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{13}\begin{vmatrix} -a_{12} & 0 & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{14}\begin{vmatrix} -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} \end{vmatrix} \\
&= -a_{12}(-a_{23}a_{34}a_{14} + a_{24}a_{13}a_{34} - a_{34}^2a_{12}) \\
&\quad + a_{13}(a_{13}a_{24}^2 - a_{14}a_{23}a_{24} - a_{24}a_{34}a_{12}) \\
&\quad - a_{14}(-a_{12}a_{23}a_{34} + a_{23}a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}^2) \\
&= a_{12}^2a_{34}^2 + a_{13}^2a_{24}^2 + a_{14}^2a_{23}^2 \\
&\quad + 2a12a_{34}a_{14}a_{23} - 2a_{12}a_{34}a_{13}a_{24} - 2a_{13}a_{24}a_{14}a_{23} \\
&= (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 \\
&= (Pf(A))^2
\end{aligned}$$

Zum Beweis des Satzes benötigen wir noch einige Hilfsaussagen.

Lemma 1 *Sei $A = ((a_{ik}))$ eine schiefsymmetrische reguläre Matrix. Dann existiert eine Matrix T des gleichen Typs mit folgender Eigenschaft:*

$$T^\top AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Beweis erfolgt in Abschnitt 2. Die Determinante der Matrix $T^\top AT$ ist 1. Zur Berechnung der von $Pf(T^\top AT)$ schränken wir die Permutationenmenge wie angegeben ein. Der einzige nichtverschwindende Summand gehört dann zu der identischen Permutation. Also ist $Pf(T^\top AT) = 1$.

Lemma 2 *Sei $A = ((a_{ik}))$ eine schiefsymmetrische Matrix. $Pf(A)$ verschwindet genau dann, wenn A singulär ist.*

Beweis. Wir betrachten zunächst das Verhalten der Pfaffschen unter der Linearkombination von Reihen der Matrix.

Seien etwa p und q (mit $p \neq q$) Reihenindizes für die Matrix A und λ, μ beliebige Skalare mit $\lambda \neq 0$. Die Matrix $\bar{A}$ werde durch Linearkombination der p-ten Zeile mit der q-ten Zeile sowie der p-ten Spalte mit der q-ten Spalte der Matrix A gebildet:

$$\begin{array}{lcll} \bar{a}_{pk} & := & \lambda a_{pk} + \mu a_{qk} & \forall k \neq p \\ \bar{a}_{ip} & := & \lambda a_{ip} + \mu a_{iq} & \forall i \neq p \\ \bar{a}_{ik} & := & a_{ik} & \forall i, k \neq p \\ \bar{a}_{jj} & := & 0 & \forall j \end{array}$$

$\bar{A}$ ist mit A schiefsymmetrisch und hat die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \lambda a_{1p} + \mu a_{1q} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\lambda a_{1p} - \mu a_{1q} & \cdots & 0 & \cdots & \lambda a_{pq} & \cdots & \lambda a_{pn} + \mu a_{qn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1q} & \cdots & -\lambda a_{pq} & \cdots & 0 & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & \cdots & -\lambda a_{pn} - \mu a_{qn} & \cdots & -a_{qn} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dies läßt uns die Pfaffsche von $\bar{A}$ durch Summation über eine geeignet eingeschränkte Permutationenmenge S^* berechnen. Insbesondere fordern wir für $\sigma \in S^*$ die Relation

$$\sigma(1) = p.$$

Ferner errichten wir eine Klasseneinteilung von S^* durch:

$$\begin{array}{lcl} S^1 & := & \{\sigma \in S^* : \sigma(2) = q\} \\ S^2 & := & \{\sigma \in S^* : \sigma(2) \neq q\} \end{array}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} Pf(\bar{A}) &= \sum_{\sigma \in S^*} \chi(\sigma) \cdot \bar{a}_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot \bar{a}_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdot \ldots \cdot \bar{a}_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in S^*} \chi(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)} \\ &\quad + \mu \sum_{\sigma \in S^1} \chi(\sigma) \cdot a_{qq} \cdot a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)} \\ &\quad + \mu \sum_{\sigma \in S^2} \chi(\sigma) \cdot a_{q\sigma(2)} \cdot a_{q\sigma(4)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)} \end{aligned}$$

Die zweite Summe verschwindet, da $a_{qq} = 0$ in jedem der Summanden als Faktor auftritt. In der dritten Summe tritt zu jeder Permutation auch eine auf, in der gerade $\sigma(2)$ und $\sigma(4)$ vertauscht wurden. Dabei verändert sich der Charakter der

Permutation, während die anderen Faktoren gleich bleiben. Also verschwindet auch die dritte Summe, und wir haben:

$$Pf(\bar{A}) = \lambda Pf(A)$$

Gelte jetzt $\det A = 0$. Eine verschwindende Determinante läßt sich durch Linearkombinationen von Reihen derart umformen, daß sie eine Nullreihe enthält (Gaußscher Algorithmus). Die Pfaffsche einer solchen Matrix verschwindet aber, wie wir aus der definierenden Formel erkennen, und wegen des oben gezeigten Verhaltens unter Linearkombinationen von Reihen ist auch $Pf(A) = 0$.

Gelte andererseits $\det A \neq 0$. Dann existiert nach Lemma 1 eine Matrix T, so daß $Pf(T^\top AT) = 1$ und $\det T^\top AT = 1$ gelten.

Wie in [4, Seiten 74–76] führen wir jetzt zwei Klassen *elementarer Matrizen* ein, die bei links- oder rechtsseitiger Multiplikation die vom Gaußschen Algorithmus bekannten elementaren Umformungen realisieren. Es seien $\mathcal{V}$ die Klasse der Matrizen V_{ik} mit

$$\begin{aligned} V_{ik}e_i &= e_k, \\ V_{ik}e_k &= e_i, \\ V_{ik}e_j &= e_j \qquad \forall j \neq i,k \end{aligned}$$

und $\mathcal{U}$ die Klasse der Matrizen U_{ik}^α mit

$$\begin{aligned} U_{ik}^\alpha e_k &= e_k + \alpha e_i, \\ U_{ik}^\alpha e_j &= e_j \qquad \forall j \neq k \end{aligned}$$

In [4] wird gezeigt: Zu jeder Matrix T gibt es reguläre Matrizen M und N, die jeweils Produkte von Matrizen aus $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ sind, so daß MTN eine Diagonalmatrix ist. Die Matrix T läßt sich also in ein Produkt aus einer Diagonalmatrix und elementaren Matrizen zerlegen:

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n \qquad T_i \in \mathit{Diag} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} T^\top AT &= (T_1 \cdot \ldots \cdot T_n)^\top A(T_1 \cdot \ldots \cdot T_n) \\ &= T_n^\top \cdot \ldots \cdot (T_1^\top AT_1) \cdot \ldots \cdot T_n \end{aligned}$$

Die von innen ausgeführten Matrizenmultiplikationen realisieren

- (für $T_i \in \mathcal{U}$) symmetrische Linearkombinationen von Zeilen und Spalten, die die zugeordnete Pfaffsche unverändert lassen ($\lambda = 1$),
- (für $T_i \in \mathit{Diag}$) links- und rechtsseitige Multiplikationen mit regulären Diagonalmatrizen, die (wie gezeigt) die zugeordnete Pfaffsche nichtverschwindend skalieren ($\lambda \neq 0, \mu = 0$),
- (für $T_i \in \mathcal{V}$) symmetrische Reihenvertauschungen, unter denen die Pfaffsche ihr Vorzeichen ändert.

Insbesondere gilt wegen $Pf(T^\top AT) = 1$ auch $Pf(A) \neq 0$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Lemma 3 *Sei $A = ((a_{ik}))$ eine schiefsymmetrische reguläre Matrix des Typs $2m \times 2m$ und sei $T = ((t_{ik}))$ eine Matrix dieses Typs. Dann gilt:*

$$Pf(T^{\mathsf{T}}AT) = \det T \cdot Pf(A)$$

Beweis. Wegen Lemma 1 ist eine äquivalente Umformung der geforderten Gleichung

$$\det T = \frac{Pf(T^{\mathsf{T}}AT)}{Pf(A)}.$$

Diese Gleichung können wir mit dem Satz von Weierstraß über Determinantenabbildungen beweisen. Dazu zeigen wir Multilinearität, Verschwinden beim Auftreten zweier gleicher Spalten und die geforderte Skalierung.

1. *Multilinearität in den Spalten von T.* Sei zunächst das Matrizenprodukt $X := T^{\mathsf{T}}AT$ explizit bestimmt. Dazu setzen wir vorübergehend $t^{\mathsf{T}}_{ij} := t_{ji}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} T^{\mathsf{T}} \cdot (A \cdot T) &= \left(\left(\sum_{\varrho=1}^{2m} t^{\mathsf{T}}_{i\varrho} \cdot \sum_{\tau=1}^{2m} a_{\varrho\tau} t_{\tau j}\right)\right) \\ &= \left(\left(\sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} t_{\varrho i} t_{\tau j}\right)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Insbesondere ist X wie A eine schiefsymmetrische Matrix:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} t_{\varrho i} t_{\tau j} \\ &= \sum_{\varrho,\tau} a_{\tau\varrho} t_{\tau i} t_{\varrho j} \\ &= -\sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} t_{\varrho j} t_{\tau i} \\ &= -x_{ji} \end{aligned}$$

Seien die Elemente der k-ten Spalte von T linear kombiniert:

$$t_{\sigma k} := \lambda u_\sigma + \mu v_\sigma$$

Betrachten wir nun die Auswirkung der Linearkombination auf die Produktmatrix X.

- Elemente in Zeile k (ohne Diagonalelement).

$$\begin{aligned} x_{kj} &= \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} t_{\varrho k} t_{\tau j} \\ &= \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} \cdot (\lambda u_\varrho + \mu v_\varrho) \cdot t_{\tau j} \\ &= \lambda \cdot \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} u_\varrho t_{\tau j} + \mu \cdot \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} v_\varrho t_{\tau j} \end{aligned}$$

  Also setzen sich Linearkombinationen in den Elementen der k-ten Zeile fort.

- Elemente in Spalte k (ohne Diagonalelement).

$$\begin{aligned} x_{ik} &= \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} t_{\varrho i} t_{\tau k} \\ &= \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} \cdot t_{\varrho i} \cdot (\lambda u_\tau + \mu v_\tau) \\ &= \lambda \cdot \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} u_\tau t_{\varrho i} + \mu \cdot \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\tau} v_\tau t_{\varrho i} \end{aligned}$$

  Das heißt: Linearkombinationen setzen sich in den Elementen der k-ten Spalte fort.

- Das Diagonalelement (k, k) muß nicht betrachtet werden, da es in die Pfaffsche nicht eingeht. Alle anderen Elemente der Matrix bleiben unter der Linearkombination invariant.

In jedem der Summanden der Pfaffschen tritt der Index k aber genau einmal auf. Damit setzt sich die Linearität auf $Pf(X)$ fort.

2. *Verschwindet, wenn zwei Spalten von T gleich sind.* Unter dieser Bedingung ist nämlich $\det T = 0$, also auch $\det T^\top AT = 0$. Wir haben bereits gezeigt, daß $T^\top AT$ schiefsymmetrisch ist. Nach Lemma 2 ist deshalb $Pf(T^\top AT) = 0$.

3. *Skalierung der Determinantenabbildung.* Wir setzen $T := E$. Dann gilt:

$$\frac{Pf(T^\top AT)}{Pf(A)} = \frac{Pf(A)}{Pf(A)} = 1$$

Der Satz von Weierstraß liefert wegen dieser Eigenschaften unserer Determinantenabbildung die Behauptung des Lemmas. □

Beweis des Satzes. Wir unterscheiden zwei Fälle. Angenommen, $\det A = 0$. Lemma 2 liefert dann: $Pf(A) = 0$. Damit ist der Satz für diesen Fall bereits bewiesen.

Sei nun $\det A \neq 0$. Nach Lemma 1 existiert eine Matrix T des gleichen Typs mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} T^\top AT &= \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \\ Pf(T^\top AT) &= 1 \\ \det T^\top AT &= 1 \end{aligned}$$

Lemma 3 liefert:

$$1 = Pf(T^\top AT) = \det T \cdot Pf(A) \tag{2}$$

Der Multiplikationssatz für Determinanten liefert ferner:

$$1 = \det(T^\top AT) = \det T^\top \cdot \det A \cdot \det T = (\det T)^2 \cdot \det A \tag{3}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) gewinnen wir

$$\det A = \frac{1}{(\det T)^2} = (Pf(A))^2,$$

also die Behauptung des Satzes. $\square$

2 Alternierende Bilinearformen

Dieser Abschnitt bringt schiefsymmetrische Matrizen in einen Zusammenhang mit alternierenden Bilinearformen, um den ausstehenden Existenzbeweis zu liefern.

Definition Seien E, F endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f\colon E \times F \to \mathbb{K}$ heißt $\mathbb{K}$-*Bilinearform auf* $E \times F$, wenn

- $y \mapsto f(x,y)$ $\mathbb{K}$-linear $\forall x \in E$ und
- $x \mapsto f(x,y)$ $\mathbb{K}$-linear $\forall y \in F$.

Wenn der Bezug zu der Form f klar ist, verwenden wir die Schreibweise

$$\langle x,y\rangle := f(x,y).$$

Wir untersuchen jetzt den Zusammenhang von Bilinearformen und Matrizen über dem Zahlkörper. – Sei dazu eine Bilinearform f vorgegeben, sei $\mathcal{B} := \{v_1,\ldots,v_m\}$ eine Basis von E und $\mathcal{B}' := \{w_1,\ldots,w_n\}$ eine Basis von F. Wir setzen

$$g_{ij} := \langle v_i, w_j\rangle \qquad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n).$$

Die so gebildete Matrix $G = ((g_{ij}))$ bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ und nennen sie die *Matrix der Form f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$.*

Seien nun $x \in E$ und $y \in F$ beliebig gewählte Vektoren mit folgender Darstellung:

$$\begin{aligned} x &= \sum_i x_i v_i \\ y &= \sum_j y_j w_j \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle &= \langle \sum_i x_i v_i, \sum_j y_j w_j\rangle \\ &= \sum_i x_i \langle v_i, \sum_j y_j w_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \langle v_i, w_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

Wir verwenden jetzt die Koordinatenspalten von x und y bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} X &:= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \\ Y &:= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

In dieser Notation erhalten wir:

$$\langle x, y \rangle = X^{\mathsf{T}} G Y$$

Sind also zwei Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ vorgegeben, besteht eine Bijektion zwischen dem Raum der Matrizen und der Menge der Bilinearformen.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Matrix einer Bilinearform bei einem Basiswechsel verändert. Wir beschränken uns dazu auf den Fall $E = F$ mit $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Sei $\mathcal{D}$ eine beliebige andere Basis des Vektorraums E. Sei C die Basistransformationsmatrix für den Übergang von Basis $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{B}$. Für die Koordinatenspalten der Vektoren x, y bezüglich dieser Basen gilt dann:

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{B}} &= C \cdot X_{\mathcal{D}} \\ Y_{\mathcal{B}} &= C \cdot Y_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= X_{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot Y_{\mathcal{B}} \\ &= (C X_{\mathcal{D}})^{\mathsf{T}} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot (C Y_{\mathcal{D}}) \\ &= X_{\mathcal{D}}^{\mathsf{T}} \cdot (C^{\mathsf{T}} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot C) \cdot Y_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert die Beziehung

$$\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f) = C^{\mathsf{T}} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot C$$

Wir wenden uns nun der Struktur der Bilinearformen zu und definieren hierzu einige benötigte Begriffe und Notationen.

Definition Sei $f\colon E \times E \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform.

- Wenn $\langle x, y \rangle = 0$, so nennen wir x, y *orthogonal*, in Zeichen: $x \perp y$.
- Sei $S \subseteq E$ eine Menge. Wenn $\forall y \in S : x \perp y$ gilt, so sagen wir, x stehe *orthogonal* auf S, in Zeichen: $x \perp S$.
- Seien $A, B \subseteq E$. Wenn $\forall x \in A : x \perp B$ gilt, so sagen wir, A und B seien *orthogonal*, in Zeichen: $A \perp B$.
- Das *orthogonale Komplement $S^{\perp}$ von S* ist definiert durch $S^{\perp} := \{x \in E : x \perp S\} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in E\}$.
- Der *Kern* der Bilinearform f ist definiert durch $\mathrm{kern} f := E^{\perp}$.
- Die Form f heißt *nicht-entartet* auf E, wenn $\mathrm{kern} f = \{0\}$ gilt. Ferner heißt E dann *nicht-entartet* bei f.
- Seien $A, B \subseteq E$. Ist $A \oplus B$ die direkte Summe von A und B und gilt $A \perp B$, so nennen wir $A \oplus B$ die *orthogonale Summe* von A und B.

Definition Eine Bilinearform $f\colon E \times E \to \mathbb{K}$ heißt *alternierend*, wenn für alle $x \in E$ gilt:

$$f(x, x) = 0$$

Aus $\langle x+y, x+y\rangle = 0$ erhalten wir insbesondere

$$\underbrace{\langle x,x\rangle}_{=0} + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{=0} = 0,$$

also

$$\langle x,y\rangle = -\langle y,x\rangle \qquad \forall x,y \in E.$$

Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von E und $G := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ die Matrix der alternierenden Form f. Mit den Koordinatenspalten bezüglich $\mathcal{B}$ lautet das Ergebnis:

$$\begin{array}{rcl} X^{\mathsf{T}}GY & = & -\,Y^{\mathsf{T}}GX \\ & = & -\,(Y^{\mathsf{T}}GX)^{\mathsf{T}} \\ & = & -\,X^{\mathsf{T}}G^{\mathsf{T}}Y \qquad \forall X,Y \in \mathbb{K}^n \\ X^{\mathsf{T}}(G+G^{\mathsf{T}})Y & = & 0 \qquad \forall X,Y \in \mathbb{K}^n \end{array}$$

Also ist $G + G^{\mathsf{T}} = 0$, somit G schiefsymmetrisch.

Wir haben damit gezeigt, daß die Matrix einer alternierenden Form schiefsymmetrisch ist. Umgekehrt beschreibt jede schiefsymmetrische Matrix eine alternierende Form.

Definition Eine *hyperbolische Ebene* ist ein 2dimensionaler Vektorraum V mit einer alternierenden Form f, die nicht-entartet auf V ist.

Sei V ein Vektorraum ($V \neq \{0\}$) mit einer alternierenden Bilinearform f. Sei $P \subseteq V$ eine hyperbolische Ebene bezüglich der Form f. Sei $w \in P$ mit $w \neq 0$. Wäre $\langle w,y\rangle = 0 \quad \forall y \in P$, so wäre $w \in P^{\perp} = \mathrm{kern} f = \{0\}$, ein Widerspruch zu $w \neq 0$. Also gibt es $y \in P$ mit $\langle w,y\rangle \neq 0$. Nach Division von y durch eine bestimmte skalare Konstante können wir (wegen der Bilinearität der Form) annehmen, daß gilt:

$$\langle w,y\rangle = 1$$

Da die Bilinearform alternierend ist, folgt:

$$\begin{array}{rcl} \langle y,w\rangle & = & -1 \\ \langle y,y\rangle & = & 0 \\ \langle w,w\rangle & = & 0 \end{array}$$

Aus diesen Ergebnissen können wir die Matrix der Form auf P bezüglich der Basis $\{w,y\}$ ablesen.

$$\mathcal{M}_{\{w,y\}}^{\{w,y\}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei umgekehrt P ein 2dimensionaler Vektorraum mit einer Bilinearform f, sei $\{w,y\}$ ein Paar von Elementen mit:

$$\begin{array}{ll} \langle w,w\rangle = 0 & \langle w,y\rangle = 1 \\ \langle y,w\rangle = -1 & \langle y,y\rangle = 0 \end{array}$$

Dann ist die Form f alternierend, und die lineare Hülle $P = \mathrm{span}\{w,y\}$ ist eine hyperbolische Ebene bezüglich der Form.

Definition Sei E ein Vektorraum mit einer alternierenden Bilinearform. Dann heißt E *hyperbolisch*, wenn E die orthogonale Summe von hyperbolischen Ebenen ist.

Satz 2 *Sei f eine alternierende Bilinearform auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum E über $\mathbb{K}$. Wenn f nicht-entartet ist, so ist E ein hyperbolischer Raum.*

Beweis. Sei $w \in E, w \neq 0$. Es existiert $y \in E$ mit $\langle w, y \rangle \neq 0$ und $y \neq 0$ (ansonsten wäre f entartet). Setze $P := \operatorname{span}\{w, y\}$. P ist nicht-entartet, also eine hyperbolische Ebene.

Durch orthogonale Zerlegung erhalten wir:

$$E = P \oplus P^{\perp}$$

Da E nicht-entartet war, ist auch $P^{\perp}$ nicht-entartet. Durch induktive Fortsetzung dieser Konstruktion erhalten wir eine orthogonale Zerlegung von E in hyperbolische Ebenen. Also ist E hyperbolisch. $\square$

Folgerung 1 *Der Satz liefert die Konstruktion eines Basissystems $\mathcal{B}$ für den Vektorraum E, bezüglich dessen die Matrix der (nicht-entarteten) alternierenden Bilinearform f folgende Gestalt hat:*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix nennen wir die *Standardmatrix einer alternierenden Bilinearform.*

Folgerung 2 *Sei eine Matrix A vorgegeben, die bezüglich einer vorgegebenen Basis $\mathcal{B}$ eine nicht-entartete alternierende Bilinearform f beschreibt. Bei geeigneter Konstruktion einer anderen Basis $\mathcal{B}'$ läßt sich die Form durch die Standardmatrix beschreiben. Sei C die Basistransformationsmatrix für den Übergang von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$. Dann gilt:*

$$C^{\mathsf{T}} A C = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Damit können wir das aufgeschobene Lemma 1 beweisen. Vorgegeben war ein reguläre schiefsymmetrische Matrix A. Sie beschreibt eine alternierende Bilinearform, die nicht-entartet ist (vgl. [3, Seiten 522–531]).

Die letzte Folgerung liefert damit die geforderte Existenz der Matrix der speziellen Transformation.

Literatur

[1] Gröbner, Wolfgang: *Matrizenrechnung*, Band 4 der Reihe *Mathematische Einzelschriften*. R. Oldenbourg, München, 1956.

[2] Klingenberg, Wilhelm: *Lineare Algebra und Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 3. Auflage, 1992.

[3] Lang, Serge: *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[4] Neiss, Fritz und Heinz Liermann: *Determinanten und Matrizen*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 8. Auflage, 1975.