# $(C_0)$-Halbgruppen
# Satz von Hille – Yosida

Matthias Köppe

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{X}$ einen Banach-Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}^+, \mathbb{C}\}$.

**Definition** Sei $T := \{T_t : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ eine Familie von beschränkten linearen Operatoren auf $\mathcal{X}$. Wir nennen $T$ eine $(C_0)$-*Halbgruppe*, falls die folgenden Axiome gelten:

1. Für $t, s \in \mathbb{R}^+$ gilt $T_t T_s = T_{t+s}$ („semigroup property").
2. $T_0 = I$.
3. Für $f \in \mathcal{X}$ ist $T_\bullet f \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{X})$ („strong continuity condition").

**Definition** Sei $T$ eine $(C_0)$-Halbgruppe mit $\|T_t\| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}^+$. Dann nennen wir $T$ eine $(C_0)$-*Kontraktionshalbgruppe*.

**Definition** Sei $T$ eine $(C_0)$-Halbgruppe. Der *Erzeugende* („infinitesimal generator") $A$ von $T$ ist ein Operator auf $\mathcal{X}$, der durch die Formel

$$Af := \lim_{t \to 0} \frac{T_t f - f}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_t f\right|_{t=0}$$

definiert wird. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ von $A$ sei die Menge der $f \in \mathcal{X}$, für die der Limes existiert.

**Lemma 1** *Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Dann konvergiert für $t \in \mathbb{R}^+$ die Reihe*

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

*bezüglich der Norm auf $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Konvergenz der Reihe

$$e^{t\|A\|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\,\|A\|)^n}{n!}$$

gibt es $N_0(\varepsilon)$ mit

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=0}^{N+M} \frac{(tA)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| &= \left\| \sum_{n=N}^{N+M} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\
&\leq \sum_{n=N}^{N+M} \frac{t^n\,\|A\|^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N+M} \frac{(t\,\|A\|)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(t\,\|A\|)^n}{n!} \\
&< \varepsilon \quad (N \geq N_0(\varepsilon))
\end{aligned}
$$

Die Folge der Partialsummen ist somit eine Cauchy-Folge im Banachraum $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, die Reihe $e^{tA}$ konvergiert also. $\square$

**Lemma 2 (Cauchy-Produkt)** *Seien $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\| < \infty.$$

*Setze*

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} A_n, B := \sum_{n=0}^{\infty} B_n.$$

*Dann ist*

$$AB = \sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{p} A_l B_{p-l} \right).$$

**Korollar 1** *Seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ mit $AB = BA$. Dann gilt:*

$$e^{tA} e^{sB} = e^{tA+sB}$$

*Beweis.* Sei $f \in \mathcal{X}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
e^{tA} e^{sB} f &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(tA)^n}{n!}}_{=:A_n} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(sB)^n}{n!}}_{=:B_n} \right) f \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{p} A_l B_{p-l} \right) f \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{p} \frac{(tA)^l}{l!} \frac{(sB)^{p-l}}{(p-l)!} \right) f \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{1}{p!} \left( \sum_{l=0}^{p} \frac{p!}{l!(p-l)!} (tA)^l (sB)^{p-l} \right) \right) f \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{(tA+sB)^p}{p!} \right) f \\
&= e^{tA+sB} f
\end{aligned}
$$

$\square$

**Proposition 1** *Sei $A \in \mathcal{B}(X)$. Zu $t \in \mathbb{R}^+$ setze $T_t := e^{tA}$. Dann ist $T := \{T_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ eine $(C_0)$-Halbgruppe, die die „uniform continuity condition"*

$$\|T_t - I\| \to 0 \quad (t \to 0) \tag{1}$$

*erfüllt. Ferner ist $A$ der Erzeugende von $T$.*

*Sei umgekehrt $T$ eine $(C_0)$-Halbgruppe mit (1). Sei $A$ der Erzeugende von $T$. Dann ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ und $T_t = e^{tA}$.*

*Beweis von Proposition 1, Teil „⇒“.*

1. Die Gültigkeit der „semigroup property“ folgt aus Korollar 1:

$$\begin{aligned} T_t T_s f &= e^{tA} e^{sA} f \\ &= e^{(t+s)A} f \\ &= T_{t+s} f \end{aligned}$$

2. Es gilt $T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0 \cdot A)^n}{n!} = I$.

3. Wir zeigen jetzt die „uniform continuity condition“.

$$\begin{aligned} \|T_t - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^n}{n!} - 1 \\ &= e^{t\|A\|} - 1 \to 0 \quad (t \to 0) \end{aligned}$$

4. $A$ ist der Erzeugende von $T$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T_t - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I \right) - A \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - A \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} + \underbrace{\frac{1}{t} \frac{(tA)^1}{1!} - A}_{=0} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} (tA)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{(n+2)!} \right\| \\ &\leq t\|A\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^n}{(n+2)!} \\ &\leq t\|A\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^n}{n!} \\ &= t\|A\|^2 e^{t\|A\|} \to 0 \quad (t \to 0) \end{aligned}$$

□

**Satz 1 (Satz von Hille – Yosida)** *Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ist der Erzeugende einer $(C_0)$-Kontraktionshalbgruppe genau dann, wenn gilt:*

1. *$A$ ist abgeschlossen.*
2. *$A$ ist auf einer dichten Teilmenge von $\mathcal{X}$ definiert.*
3. *Für $\lambda > 0$ ist $\lambda \in \rho(A)$ und $\left\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq 1$.*

*Beweis von Satz 1, Teil „$\Rightarrow$".*

1. Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Unter Verwendung der Stetigkeit des Operators $T_t$ zeigen wir:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} T_t f &= \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t) f \\ &= \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I) T_t f \\ &= A T_t f \\ &= \lim_{h \downarrow 0} T_t h^{-1}(T_h - I) f \\ &= T_t \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I) f \\ &= T_t A f \end{aligned} \tag{2}$$

   Insbesondere sind $T_t$ und $A$ vertauschbar. Außerdem folgt: $T_t \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$.

2. Wir zeigen nun für $f \in \mathcal{D}(A)$ und $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^-}{\mathrm{d}t} T_t f &= \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_t - T_{t-h}) f \\ &= \lim_{h \downarrow 0} T_{t-h} h^{-1}(T_h - I) f \\ &= T_t \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I) f \\ &= T_t A f \end{aligned} \tag{3}$$

   Also ist $T_t f$ differenzierbar. Wegen der Stetigkeit von $T_\bullet A f$ ist sogar $T_\bullet f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{X})$. Außerdem gilt für $f \in \mathcal{D}(A)$:

$$\begin{aligned} T_t f - f &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} T_s f \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t A T_s f \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t T_s A f \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{4}$$

3. Wir zeigen: $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. Sei dazu $f \in \mathcal{X}$. Zu $t \in \mathbb{R}^+$ setze

$$f_t := \int_0^t T_s f \mathrm{d}s. \tag{5}$$

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_t \Big|_{t=0} = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} f_t = f.$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
h^{-1}(T_h - I)f_t &= h^{-1}(T_h - I)\int_0^t T_s f \mathrm{d}s \\
&= h^{-1}\left[T_h \int_0^t T_s f \mathrm{d}s - \int_0^t T_s f \mathrm{d}s\right] \\
&= h^{-1}\left[\int_h^{t+h} T_s f \mathrm{d}s - \int_0^t T_s f \mathrm{d}s\right] \\
&= h^{-1}\int_t^{t+h} T_s f \mathrm{d}s - h^{-1}\int_0^h T_s f \mathrm{d}s \\
&= T_t h^{-1}\int_0^h T_s f \mathrm{d}s - h^{-1}\int_0^h T_s f \mathrm{d}s \\
&\quad \to T_t f - f \quad (h \downarrow 0)
\end{aligned}$$

Also ist $f_t \in \mathcal{D}(A)$ für $t \in \mathbb{R}^+$. Damit ist gezeigt: $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. Außerdem haben wir für $f \in \mathcal{X}$:

$$T_t f - f = A \int_0^t T_s f \mathrm{d}s \tag{6}$$

4. Wir zeigen: $A$ ist ein abgeschlossener Operator. Seien dazu $f_n \in \mathcal{D}(A)$ vorgegeben mit $f_n \to f$ und $Af_n \to g \quad (n \to \infty)$. Nach Gleichung (4) und wegen der Stetigkeit von $T_s$ gilt:

$$\begin{aligned}
t^{-1}(T_t - I)f_n &= t^{-1}\int_0^t T_s A f_n \mathrm{d}s \\
&\quad \to t^{-1}\int_0^t T_s g \mathrm{d}s \quad (n \to \infty) \\
&\quad \to g \quad (t \downarrow 0)
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $T_t$ gilt andererseits:

$$\begin{aligned}
t^{-1}(T_t - I)f_n &\to t^{-1}(T_t - I)f \quad (n \to \infty) \\
&\to Af \quad (t \downarrow 0)
\end{aligned}$$

Somit ist $f \in \mathcal{D}(A)$ und $Af = g$, also ist $A$ abgeschlossen.

5. Wir zeigen: Für $\lambda > 0$ ist

$$\{e^{-\lambda t} T_t : t \in \mathbb{R}^+\}$$

eine $(C_0)$-Kontraktionshalbgruppe mit dem Erzeugenden

$$A - \lambda I.$$

- Die „semigroup property“ gilt:

  $$e^{-\lambda s}T_s e^{-\lambda t}T_t = e^{-\lambda(s+t)}T_{s+t}$$

- Es ist

  $$e^{-\lambda 0}T_0 = I.$$

- Die „strong continuity condition“ gilt:

  $$\lim_{t\to t_0} e^{-\lambda t}T_t = e^{-\lambda t_0}T_{t_0}$$

- Für $f \in \mathcal{D}(A)$ ist:

  $$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0}\frac{e^{-\lambda t}T_t f - f}{t} &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{e^{-\lambda t}T_t f - T_t f}{t} + \lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t f - f}{t}\\ &= -\lambda f + Af\end{aligned}$$

- $e^{-\lambda t}T_t$ ist eine Kontraktion:

  $$\left\|e^{-\lambda t}T_t\right\| = e^{-\lambda t}\left\|T_t\right\| \le 1$$

Auf diese Halbgruppe wenden wir die Gleichungen (6) bzw. (4) an:

$$\begin{aligned}-e^{-\lambda t}T_t f + f &= (\lambda - A)\int_0^t e^{-\lambda s}T_s f \mathrm{d}s \qquad f\in\mathcal{X} &(7)\\ &= \int_0^t e^{-\lambda s}T_s(\lambda - A)f\mathrm{d}s \qquad f\in\mathcal{D}(A) &(8)\end{aligned}$$

Für $g \in \mathcal{X}$ konvergiert das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_s g \mathrm{d}s$$

nach dem Satz über majorisierte Konvergenz wegen

$$\left\|e^{-\lambda s}T_s g\right\| \le e^{-\lambda s}\underbrace{\left\|T_s\right\|}_{\le 1}\left\|g\right\|$$

und

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}\left\|g\right\|\mathrm{d}s = \frac{1}{\lambda}\left\|g\right\|.$$

Da $A$ abgeschlossen ist, ist außerdem

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_s f \mathrm{d}s \in \mathcal{D}(A).$$

Wegen

$$\left\|e^{-\lambda t}T_t f\right\| \le e^{-\lambda t}\left\|f\right\| \to 0 \quad (t\to\infty)$$

gilt dann:

$$f = (\lambda - A)\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s f \mathrm{d}s \qquad f \in \mathcal{X} \tag{9}$$

$$f = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s (\lambda - A) f \mathrm{d}s \qquad f \in \mathcal{D}(A) \tag{10}$$

Aus Gleichung (9) folgt: $(\lambda - A)$ ist ein Operator von $\mathcal{D}(A)$ auf $\mathcal{X}$. Aus Gleichung (10) folgt: $(\lambda - A)$ ist injektiv. Denn: Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(A)$ mit $(\lambda - A)f_1 = (\lambda - A)f_2$. Dann ist $f_1 = f_2$. Zusammen haben wir: $\lambda \in \rho(A)$.

6. Aus Gleichung (9) folgt für $g \in \mathcal{X}$ und $\lambda > 0$:

$$(\lambda - A)^{-1} g = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s g \mathrm{d}s \tag{11}$$

Diese Gleichung liefert die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left\|(\lambda - A)^{-1} g\right\| &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \|T_s\| \|g\| \mathrm{d}s \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|g\| \end{aligned}$$

Somit ist

$$\left\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq 1.$$

□

**Lemma 3 („the resolvent identity")** *Sei $A$ ein abgeschlossener Operator auf $\mathcal{X}$. Dann gilt für $\lambda, \mu \in \rho(A)$:*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

*Insbesondere sind die Resolventen $(\lambda - A)^{-1}$ und $(\mu - A)^{-1}$ vertauschbar.*

**Lemma 4** *Sei $A$ ein abgeschlossener Operator auf $\mathcal{X}$. Dann gilt für $\lambda \in \rho(A)$:*

$$\lambda A(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} A$$

*Insbesondere ist der Operator $A$ mit seiner Resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ vertauschbar.*

*Beweis.* Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda A(\lambda - A)^{-1} f &= -\lambda(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} f + \lambda^2(\lambda - A)^{-1} f \\ &= -\lambda(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A) f + \lambda(\lambda - A)^{-1}\lambda f \\ &= \lambda(\lambda - A)^{-1} A f \end{aligned}$$

□

**Lemma 5** *Seien $C, D$ die Erzeugenden der $(C_0)$-Kontraktionshalbgruppen $U$ bzw. $V$. Es gelte $U_t V_s = V_s U_t$ für $s, t \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$:*

$$\|U_t f - V_t f\| \leq t \|Cf - Df\|.$$

*Beweis.* Sei $f \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(U_{ts}V_{t(1-s)}f) &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} U_{t(s+h)} V_{t[1-(s+h)]} f \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} U_{t(s+h)} \left[V_{t[1-(s+h)]} - V_{t(1-s)}\right] f \\
&\quad + \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \left[U_{t(s+h)} - U_t s\right] V_{t(1-s)} f \\
&= U_{ts}V_{t(1-s)} t \left[\lim_{h\downarrow 0} \frac{I - V_{th}}{th} f + \lim_{h\downarrow 0} \frac{U_{th} - I}{th} f\right] \\
&= U_{ts}V_{t(1-s)} t(-Df + Cf)
\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir die gesuchte Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|U_t f - V_t f\| &= \|U_t V_0 f - U_0 V_t f\| \\
&= \left\| U_{ts} V_{t(1-s)} f \Big|_{s=0}^{1} \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(U_{ts}V_{t(1-s)}f)\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq t \int_0^1 \underbrace{\|U_{ts}\|}_{\leq 1} \underbrace{\left\|V_{t(1-s)}\right\|}_{\leq 1} \|Cf - Df\| \,\mathrm{d}s \\
&\leq t\,\|Cf - Df\|
\end{aligned}$$

□

**Lemma 6** *Eine $(C_0)$-Halbgruppe ist durch ihren Erzeugenden eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Seien $T$, $S$ zwei $(C_0)$-Halbgruppen mit dem gemeinsamen Erzeugenden $A$. Sei $f \in \mathcal{D}(A)$ und $t > 0$. Definiere eine Abbildung $u$ durch

$$u\colon [0,t] \ni s \mapsto T_s S_{t-s} f \in \mathcal{X}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u(s) &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \left[u(s+h) - u(s)\right] \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \left[T_{s+h} S_{t-s-h} f - T_s S_{t-s} f\right] \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} T_{s+h} \left(S_{t-s-h} - S_{t-s}\right) f \\
&\quad + \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_{s+h} - T_s\right) S_{t-s} f \\
&= T_s S_{t-s} \lim_{h\downarrow 0} \frac{I - S_h}{h} f \\
&\quad + T_s \lim_{h\downarrow 0} \frac{T_h - I}{h} S_{t-s} f \\
&= T_s S_{t-s} A f - T_s A S_{t-s} f \\
&= 0
\end{aligned}$$

wegen der Vertauschbarkeit von $A$ mit $S_{t-s}$. Somit ist $u$ konstant auf $[0,t]$. Insbesondere ist für $f \in \mathcal{D}(A)$

$$T_t f = u(t) = u(0) = S_t f.$$

Wegen $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$ folgt $T = S$. □

*Beweis von Satz 1, Teil „⇐“.* 1. Zu $\lambda > 0$ setze

$$\begin{aligned} A_\lambda &:= \lambda A(\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda^2 - (\lambda^2 - \lambda A))(\lambda - A)^{-1} \\ &= \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I \end{aligned} \tag{12}$$

Nach Voraussetzung ist $\|\lambda(\lambda - A)^-1\| \leq 1$, also $\left\|\lambda^2(\lambda - A)^-1\right\| \leq \lambda < \infty$. Somit ist $A_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

2. Sei $\lambda > 0$ fest. Wegen Proposition 1 ist

$$\{e^{tA_\lambda} : t \in \mathbb{R}^+\}$$

eine $(C_0)$-Halbgruppe. Ferner gilt für $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}\right\| &= \left\|e^{t[\lambda^2(\lambda-A)^{-1} - \lambda I]}\right\| \\ &= e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2(\lambda-A)^{-1}}\right\| \\ &\leq e^{-t\lambda}e^{\left\|t\lambda^2(\lambda-A)^{-1}\right\|} \\ &= e^{-t\lambda}e^{t\lambda\left\|\lambda(\lambda-A)^{-1}\right\|} \\ &\leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es handelt sich somit sogar um eine $(C_0)$-Kontraktionshalbgruppe.

3. Sei $g \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - A)^{-1}g - (\lambda - A)^{-1}Ag &= (\lambda - A)^{-1}\lambda g - (\lambda - A)^{-1}Ag \\ &= (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)g \\ &= g \end{aligned} \tag{13}$$

Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} \left\|(\lambda - A)^{-1}Ag\right\| &= \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1}Ag\right\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\underbrace{\left\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\right\|}_{\leq 1}\|Ag\| \to 0 \quad (\lambda \to \infty) \end{aligned}$$

Zusammen haben wir:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - A)^{-1}g &= \lambda(\lambda - A)^{-1}g - (\lambda - A)^{-1}Ag + (\lambda - A)^{-1}Ag \\ &= g + (\lambda - A)^{-1}Ag \to g \quad (\lambda \to \infty) \end{aligned}$$

Wegen $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$ gilt $\lambda(\lambda - A)^{-1}g \to g \quad (\lambda \to \infty)$ für alle $g \in \mathcal{X}$.

4. Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt wegen Lemma 4:

$$\begin{aligned} A_\lambda f &= \lambda A(\lambda - A)^{-1} f \\ &= \lambda(\lambda - A)^{-1} A f \to Af \quad (\lambda \to \infty) \end{aligned}$$

5. Setze $C := A_\lambda, D := A_\mu, U_t := e^{tA_\lambda}, V_t := e^{tA_\mu}$. Dann erzeugen $C, D$ die $(C_0)$-Kontraktionshalbgruppen $U := \{U_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ bzw. $V := \{V_t : t \in \mathbb{R}^+\}$. Mit Lemma 3 und 4 zeigen wir für $f \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} (tA_\lambda)^l (sA_\mu)^m f &= \left[t\lambda A(\lambda - A)^{-1}\right]^l \left[s\mu A(\mu - A)^{-1}\right]^m f \\ &= \left[s\mu A(\mu - A)^{-1}\right]^m \left[t\lambda A(\lambda - A)^{-1}\right]^l f \\ &= (sA_\mu)^m (tA_\lambda)^l f \end{aligned}$$

Deshalb läßt sich Korollar 1 anwenden. Damit zeigen wir für $f \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} U_t V_s f &= e^{tA_\lambda} e^{sA_\mu} f \\ &= e^{tA_\lambda + sA_\mu} f \\ &= e^{sA_\mu} e^{tA_\lambda} f \\ &= V_s U_t f \end{aligned}$$

Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 5 erfüllt. Wir erhalten für $f \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\lambda} f - e^{tA_\mu} f \right\| &= \| U_t f - V_t f \| \\ &\leq t \| Cf - Df \| \\ &= t \| A_\lambda f - A_\mu f \| \to 0 \quad (\lambda, \mu \to \infty) \end{aligned}$$

wegen $A_\lambda f, A_\mu f \to Af \quad (t \to \infty)$. Nach dem Cauchy-Kriterium in $\mathcal{X}$ existiert somit der Limes $\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} f$. Definiere für $f \in \mathcal{D}(A)$

$$T_t f := \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} f. \tag{14}$$

6. Wir haben bereits gezeigt: $\left\| e^{tA_\lambda} \right\| \leq 1$. Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \| T_t f \| &= \left\| \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} f \right\| \\ &= \lim_{\lambda \to \infty} \underbrace{\left\| e^{tA_\lambda} f \right\|}_{\leq \|f\|} \\ &\leq \|f\| \end{aligned}$$

Somit ist $\|T_t\| \leq 1$. Insbesondere ist $T_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, also ist für alle $f \in \mathcal{X}$

$$T_t f = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} f. \tag{15}$$

7. Die Gültigkeit der „semigroup property“ folgt wegen Korollar 1:

$$\begin{aligned}
T_t T_s f &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} e^{sA_\lambda} f \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda} f \\
&= T_{t+s}
\end{aligned}$$

Klar ist außerdem $T_0 = I$.

8. Die Ableitung von $e^{sA_\lambda} f$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^{sA_\lambda} f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA_\lambda)^k}{k!} f \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} s^k \frac{A_\lambda^k}{k!} f \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} \frac{A_\lambda^{k-1}}{(k-1)!} A_\lambda f \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{A_\lambda^k}{k!} A_\lambda f \\
&= e^{sA_\lambda} A_\lambda f
\end{aligned}$$

Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
T_t f - f &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} f - f \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^{sA_\lambda} f \mathrm{d}s \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda f \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left( \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda} A_\lambda f \right) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t T_s A f \mathrm{d}s \qquad (16)
\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration ist durch den Satz über majorisierte Konvergenz gerechtfertigt, denn es ist

$$\begin{aligned}
\left\| e^{aA_\lambda} A_\lambda f \right\| &\leq \underbrace{\left\| e^{sA_\lambda} \right\|}_{\leq 1} \|A_\lambda f\| \\
&\leq \|Af\| + 1 \quad (\lambda > \lambda_0)
\end{aligned}$$

wegen $A_\lambda f \to f \quad (\lambda \to \infty)$.

Damit zeigen wir:

$$\begin{aligned}
T_{t+h} f - T_t f &= \int_0^{t+h} T_s A f \mathrm{d}s - \int_0^t T_s A f \mathrm{d}s \\
&= \int_t^{t+h} T_s A f \mathrm{d}s \to 0 \quad (h \to 0)
\end{aligned}$$

Also ist $T_\bullet f$ stetig auf $\mathbb{R}^+$ für $f \in \mathcal{D}(A)$. Wegen $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$ gilt dies für alle $f \in \mathcal{X}$. Somit haben wir gezeigt: $T$ ist eine $(C_0)$-Kontraktionshalbgruppe.

9. Sei $B$ der Erzeugende von $T$. (Nach Teil „$\Rightarrow$" folgt: $B$ ist abgeschlossen, $\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{X}$, für $\lambda > 0$ ist $\lambda \in \rho(B)$.) Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Bf &= \lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T_s A f \mathrm{d}s \\ &= Af \end{aligned} \tag{17}$$

Also ist $f \in \mathcal{D}(B)$ und $B|\mathcal{D}(A) = A$.

Wegen $1 \in \rho(B)$ und $1 \in \rho(A)$ sind die Operatoren $(I - B)$ bzw. $(I - A)$ bijektiv. Wir zeigen: $(I - A)^{-1} = (I - B)^{-1}$. Sei dazu $f \in \mathcal{X}$. Es gibt $g \in \mathcal{D}(A)$ mit $(I - A)^{-1} f = g$, also

$$\begin{aligned} f &= (I - A)g \\ &= g - Ag \\ &= g - Bg \\ &= (I - B)g. \end{aligned}$$

Somit ist $(I - B)^{-1} f = g$. Es folgt $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$, also $A = B$.

□

*Beweis von Proposition 1, Teil „$\Leftarrow$".* Definiere für $t > 0$ und $f \in \mathcal{X}$

$$B_t f := \frac{1}{t} \int_0^t T_s f \mathrm{d}s. \tag{18}$$

1. Unter Verwendung der „uniform continuity condition" (1) zeigen wir:

$$\begin{aligned} \|B_t f - f\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T_s f \mathrm{d}s - \frac{1}{t} \int_0^t f \mathrm{d}s \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (T_s - I) f \mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|T_s - I\| \, \mathrm{d}s \, \|f\| \to 0 \quad (t \to 0) \end{aligned}$$

Dies impliziert: Es gibt $\delta > 0$ mit

$$\|B_t - I\| < \frac{1}{2} \quad \text{für } 0 < t < \delta. \tag{19}$$

2. Definiere für $t > 0$ und $f \in \mathcal{X}$

$$C_t f := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (B_t - I)^n. \tag{20}$$

Wir zeigen: Für $0 < t < \delta$ konvergiert diese Reihe, und $C_t \in \mathcal{B}(X)$.

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(B_t - I)^n\right\| &\leq \sum_{n=0}^{N}\|B_t - I\|^n \\ &< \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 2 \quad (N \to \infty)\end{aligned}$$

3. Setze $C := B_t - I$. Wir zeigen:

   $$(I + C)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C^n$$

   Sei dazu $f \in \mathcal{X}$. Dann gilt:

   $$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{N}(-C)^n(I + C)f - f\right\| &= \left\|\sum_{n=0}^{N}(-C)^n f + \sum_{n=0}^{N}(-C)^n Cf - f\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=0}^{N}(-C)^n f - \sum_{n=0}^{N+1}(-C)^n f\right\| \\ &= \left\|(-C)^{n+1}f\right\| \\ &\leq \underbrace{\|C\|}_{<\frac{1}{2}}^{N+1}\|f\| \to 0 \quad (N \to \infty)\end{aligned}$$

   Damit haben wir gezeigt:[1]

   $$B_t^{-1} = C_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

4. Setze $\mathcal{Y} := (\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ mit der Graphnorm

   $$\|f\|_{\mathcal{Y}} := \|Af\| + \|f\|. \tag{21}$$

   Wegen Gleichung (6) haben wir:

   $$\begin{aligned}T_t f - f &= A\int_0^t T_s f \mathrm{d}s \\ &= AtB_t f \qquad (22)\end{aligned}$$

   Mit diesem Ergebnis können wir zeigen: $B_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

   $$\begin{aligned}\|B_t f\|_{\mathcal{Y}} &= \|AB_t f\| + \|B_t f\| \\ &= \frac{1}{t}\|AtB_t f\| + \|B_t f\| \\ &= \frac{1}{t}\|T_t f - f\| + \|B_t f\| \\ &\leq \underbrace{\left(\frac{1}{t}\|T_t - I\| + \|B_t\|\right)}_{=:c_t}\|f\|\end{aligned}$$

[1] Dieses Ergebnis ist auch als Satz von C. Neumann bekannt (siehe [4, Seite 69]).

Außerdem ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$:

$$\begin{aligned} \|Af\| &\leq \|Af\| + \|f\| \\ &= \|f\|_{\mathcal{Y}} \end{aligned}$$

Somit ist $AB_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$:

$$\begin{aligned} \|AB_t f\| &\leq \|B_t f\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq c_t \|f\| \end{aligned}$$

Zusammen haben wir:

$$\begin{aligned} \|Af\| &= \left\|AB_t B_t^{-1} f\right\| \\ &\leq \|AB_t\| \left\|B_t^{-1}\right\| \|f\| \end{aligned}$$

Somit ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

5. Nach Teil „$\Rightarrow$“ der Proposition ist nun $e^{tA}$ eine $(C_0)$-Halbgruppe mit dem Erzeugenden $A$. Nach Lemma 6 folgt $T = e^{tA}$.

□

# Literatur


[1] Davies, E. B.: *One Parameter Semigroups.* Academic Press, London, 1980.

[2] Goldstein, J. A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford University Press/Clarendon Press, Oxford/New York, 1985.

[3] Triebel, Hans: *Higher Analysis.* Johann Ambrosius Barth, Leipzig – Berlin – Heidelberg, 1992.

[4] Yosida, Kôsaku: *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 6. Auflage, 1980.