

# Покрытие ребер графа наименьшим числом клик: алгоритм Келлермана

А. О. Махорин\*

Декабрь 2009 г.

## 1 Введение

Пусть задан (неориентированный) граф  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин,  $E$  — множество ребер. *Клик* графа называется порожденный подграф, в котором любые две вершины смежны. Будем говорить, что семейство клик  $C_1, C_2, \dots, C_k$  графа  $G$  образует *реберное покрытие* этого графа, если каждое ребро  $e \in E$  принадлежит хотя бы одной клике из указанного семейства. Задача состоит в минимизации числа клик, покрывающих все ребра заданного графа.

Пример покрытия ребер графа кликами показан на рис. 1.

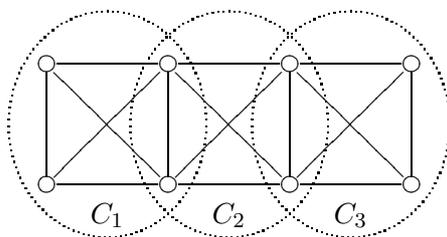


Рис. 1. Пример покрытия ребер графа кликами.

Известно, что в случае произвольных графов данная задача является NP-полной [2]. Поэтому практический интерес представляют в основном эвристические алгоритмы решения этой задачи, к числу которых относится алгоритм Келлермана.

В своем первоначальном виде алгоритм, предложенный Келлерманом, был предназначен для решения одной комбинаторной задачи, связанной с определением конфликтов в ключевых словах [1]. Однако в

---

\*Кафедра прикладной информатики, Московский авиационный институт, Москва, Россия. E-mail: <mao@gnu.org>.

работе [3] было показано, что указанная комбинаторная задача эквивалентна рассматриваемой задаче о покрытии ребер графа наименьшим числом клик. Поэтому далее алгоритм Келлермана, который относится к числу «жадных» эвристик, излагается применительно к рассматриваемой задаче.

## 2 Описание алгоритма

Пусть  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , т. е. вершины заданного графа  $G = (V, E)$  занумерованы целыми числами от 1 до  $n$ . В алгоритме Келлермана вершины обрабатываются последовательно. После выполнения  $(i - 1)$ -й итерации мы имеем порожденный подграф  $G_{i-1} \subseteq G$  со множеством вершин  $\{1, 2, \dots, i - 1\}$ , для которого уже построено семейство клик  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , образующих реберное покрытие этого подграфа. На  $i$ -й итерации мы добавляем вершину  $i$  вместе с инцидентными ребрами из  $E$  к подграфу  $G_{i-1}$ , в результате чего получается подграф  $G_i \subseteq G$  со множеством вершин  $\{1, 2, \dots, i\}$ . Цель  $i$ -й итерации состоит, таким образом, в покрытии новых ребер, которые появляются в подграфе  $G_i$ , как это изображено на рис. 2.

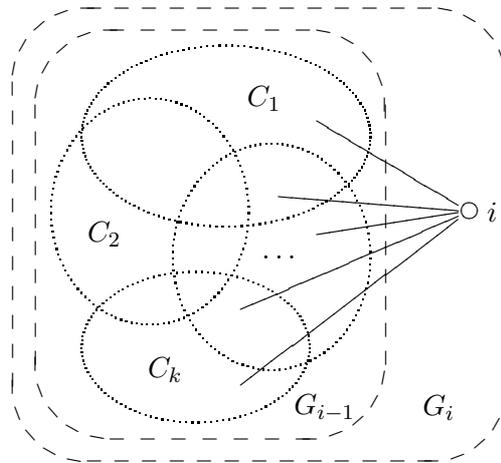


Рис. 2. Появление непокрытых ребер на  $i$ -й итерации.

Понятно, что все новые ребра, которые появляются на  $i$ -й итерации, имеют вид  $(i, j)$ , где  $i > j$ . Пусть  $W = \{j : (i, j) \in E, i > j\}$  — подмножество вершин подграфа  $G_{i-1}$ , смежных с вершиной  $i$ . Если  $C_m \subseteq W$ , где  $C_m$  — некоторая клика,  $1 \leq m \leq k$ , то вершина  $i$  смежна со всеми вершинами  $j \in C_m$ . В этом случае мы *расширяем* каждую такую клику, включая в нее вершину  $i$ , что позволяет покрыть соответствующие ребра.

Пусть теперь  $C_1, C_2, \dots, C_k$  — семейство клик с учетом их расширения за счет вершины  $i$ . Положим  $W := W \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k)$ . Тогда каждая вершина  $j \in W$  будет соответствовать ребру  $(i, j)$ , которое осталось непокрытым. Эти непокрытые ребра уже нельзя включить в существующие клики, поэтому необходимо создать новые клики. Заметим, что для каждого непокрытого ребра  $(i, j)$  мы могли бы создать новую клику, содержащую только вершины  $i$  и  $j$ , которая покрывает это ребро. Однако, чтобы покрыть новой кликой возможно большее число оставшихся непокрытых ребер и тем самым уменьшить общее число клик, мы пытаемся воспользоваться частями уже существующих клик. Для этого мы находим существующую клику  $C_m$ ,  $1 \leq m \leq k$ , у которой мощность пересечения  $|W \cap C_m|$  является максимальной (если таких клик несколько, то мы берем клику с наименьшим значением  $m$ ). Так как  $C_m$  — клика, то  $W \cap C_m$  тоже будет кликой, а поскольку вершина  $i$  смежна со всеми вершинами из  $W$ , то добавляя ее в  $W \cap C_m$  мы сформируем новую клику, которая позволяет покрыть  $|W \cap C_m|$  непокрытых ребер (рис. 3). Далее мы полагаем  $W := W \setminus C$ , чтобы вычеркнуть из  $W$  вершины, для которых соответствующие ребра покрыты кликой  $C$ , увеличиваем  $k$  на единицу и включаем новую клику  $C_k = C$  в семейство клик. Если в множестве  $W$  остались вершины, мы формируем еще одну новую клику и т. д. до тех пор, пока  $W$  не станет пустым, т. е. пока не будут покрыты все ребра подграфа  $G_i$ .

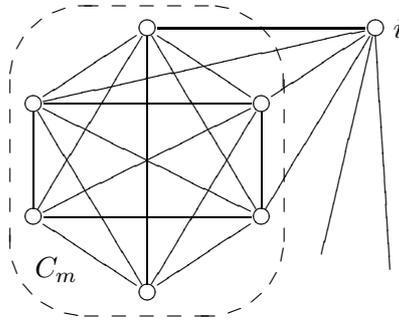


Рис. 3. Формирование новой клики.

Алгоритм заканчивает работу после выполнения  $n$ -й итерации, на которой будут покрыты все ребра графа  $G_n = G$ .

Формальное описание алгоритма Келлермана приведено рис. 4.

АЛГОРИТМ КЕЛЛЕРМАНА

**Вход.** Граф  $G = (V, E)$ , где  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Выход.** Семейство клик  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , покрывающих все ребра заданного графа.

$k := 0$ ;

*/\* основной цикл \*/*

**for**  $i := 1, 2, \dots, n$  **do**

$W := \{j : i > j, (i, j) \in E\}$ ;

*/\* цель  $i$ -й итерации — покрыть ребра  $(i, j)$  для всех  $j \in W$  \*/*

**if**  $W = \emptyset$  **then**

*/\* специальный случай \*/*

$k := k + 1$ ;

$C[k] := \{i\}$ ;

**continue for**  $i$ ;

**end if**

*/\* попытаться включить вершину  $i$  в существующие клики \*/*

$V := \emptyset$ ;

**for**  $m = 1, 2, \dots, k$  **while**  $V \neq W$  **do**

**if**  $C[m] \subseteq W$  **then**

$C[m] := C[m] \cup \{i\}$ ;

$V := V \cup C[m]$ ;

**end if**

**end for**

*/\* исключить из  $W$  вершины, инцидентные покрытым ребрам \*/*

$W := W \setminus V$ ;

*/\* покрыть оставшиеся ребра, формируя новые клики \*/*

**while**  $W \neq \emptyset$  **do**

        Найти клику  $C[m]$ ,  $1 \leq m \leq k$ , для которой мощность пересечения  $|W \cap C[m]|$  является максимальной (если имеется несколько таких клик, взять клику с наименьшим номером  $m$ );

*/\* сформировать новую клику, используя часть  $C[m]$  \*/*

$k := k + 1$ ;

$C[k] := (W \cap C[m]) \cup \{i\}$ ;

*/\* исключить из  $W$  вершины, инцидентные покрытым ребрам \*/*

$W := W \setminus C[k]$ ;

**end while**

**end for**

Рис. 4. Алгоритм Келлермана.

## 3 Реализация алгоритма

### 3.1 Алгоритм Келлермана (базовый вариант)

#### Спецификация

```
#include "glpnet.h"
int kellerman(int n, int (*func)(void *info, int i, int ind[]),
              void *info, glp_graph *H);
```

#### Назначение

Подпрограмма `kellerman` реализует эвристический алгоритм Келлермана для нахождения реберного покрытия заданного графа  $G = (V, E)$  минимальным числом клик.

Параметр  $n \geq 0$  задает  $|V|$ , число вершин графа  $G$ .

Формальная подпрограмма `func` задает множество ребер  $E$  графа  $G$  следующим образом. В процессе работы подпрограмма `kellerman` вызывает формальную подпрограмму `func`, передавая ей номер некоторой вершины  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , графа  $G$ . В ответ подпрограмма `func` должна поместить номера вершин, смежных с вершиной  $i$ , в элементы массива `ind[1]`, `ind[2]`, ..., `ind[len]` и вернуть значение `len` — общее число смежных вершин,  $0 \leq len \leq n$ . Петли допускаются, но игнорируются. Кратные ребра не допускаются.

Параметр `info` является транзитным указателем (magic cookie), который передается формальной подпрограмме `func` в качестве ее первого параметра.

Результатом выполнения подпрограммы `kellerman` является двудольный граф  $H = (V \cup C, F)$ , определяющий найденное реберное покрытие заданного графа  $G$ . (Программный объект типа `glp_graph`, заданный указателем `H`, должен быть предварительно создан с помощью подпрограммы `glp_create_graph`. В самом начале работы подпрограмма `kellerman` стирает текущее содержимое этого объекта, используя подпрограмму `glp_erase_graph`. Подробнее см. [4].) Вершины первой доли  $V$  указанного двудольного графа соответствуют вершинам исходного графа  $G$  и имеют те же порядковые номера  $1, 2, \dots, n$ . Вершины второй доли  $C$  соответствуют найденным кликам и имеют порядковые номера  $n + 1, n + 2, \dots, n + k$ , где  $k$  — общее число клик в покрытии. Каждое ребро двудольного графа  $f \in F$  в программном объекте  $H$  представлено дугой вида  $f = (i \rightarrow j)$ , где  $i \in V$  и  $j \in C$ , которая означает, что вершина  $i$  исходного графа принадлежит клике  $C_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ . (Таким образом, если две вершины исходного графа принадлежат одной и той же клике, то эти две вершины смежны в  $G$ , а соответствующее ребро покрыто этой кликой.)

### Возвращаемое значение

Подпрограмма `kellerman` возвращает значение  $k$  — общее число клик, образующих реберное покрытие заданного графа  $G$ .

## 3.2 Алгоритм Келлермана (стандартный вариант)

### Спецификация

```
#include <glpk.h>
int glp_kellerman(glp_graph *G, glp_graph *H);
```

### Назначение

Подпрограмма `glp_kellerman` эквивалентна подпрограмме `kellerman` (см. предыдущий подраздел) за исключением того, что в данном случае исходный граф  $G = (V, E)$  представлен явно в виде программного объекта типа `glp_graph`, заданного указателем  $G$ . Каждая дуга  $(i \rightarrow j)$  в этом программном объекте рассматривается как ребро (неупорядоченная пара вершин)  $(i, j) \in E$  графа  $G$ . При этом допускаются как петли (которые игнорируются), так и кратные ребра (которые рассматриваются как простые ребра).

## Литература

- [1] E. Kellerman, “Determination of keyword conflict.” IBM Tech. Disclosure Bull. 16, 2 (July 1973), pp. 544-46.
- [2] J. Orlin, “Contentment in graph theory: Covering graphs with cliques.” *Indagationes Math.* 39 (1977), pp. 406-24.
- [3] L. T. Kou, L. J. Stockmeyer, C. K. Wong, “Covering edges by cliques with regard to keyword conflicts and intersection graphs.” *Comm. of the ACM*, Vol. 21, No. 2 (1978), pp. 135-39.
- [4] GNU Linear Programming Kit: Graph and Network Routines.