

# Реализация смешанно-целочисленных отсечений Гомори

А. О. Махорин\*

Декабрь 2007 г.

## 1 Математическое обоснование

Рассмотрим смешанно-целочисленную задачу:

$$\min\{c^T x : x \in X\}, \quad (1)$$

$$X = \{x \in \mathbf{Z}_+^p \times \mathbf{R}_+^{n-p} : Ax = b\}, \quad (2)$$

и допустим, что получено базисное оптимальное решение ЛП-релаксации данной задачи, т. е. для этого решения указано разбиение переменных на базисные и небазисные  $x = (x_B, x_N)$ , а также соответствующее разбиение  $A = (B | N)$ , где  $B$  — невырожденная матрица, называемая базисом. Указанное разбиение позволяет явно выразить базисные переменные через небазисные посредством надлежащего эквивалентного преобразования исходной системы ограничений-равенств:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B = -B^{-1}Nx_N + B^{-1}b.$$

Таким образом:

$$x_B = -\tilde{A}x_N + \beta, \quad (3)$$

где матрица  $\tilde{A} = (\alpha_{ij}) = B^{-1}N$  — это так называемая симплекс-таблица, вектор  $\beta = (\beta_i) = B^{-1}b$  — преобразованный вектор правых частей ограничений. Поскольку в базисном решении все небазисные переменные находятся на своих нулевых границах, то такое решение имеет вид:

$$x^* = (x_B^*, x_N^*) = (\beta, 0), \quad (4)$$

т. е. значения базисных переменных равны соответствующим компонентам вектора  $\beta$  (при этом  $\beta \geq 0$ , поскольку базисное решение предполагается оптимальным, а значит, допустимым для ЛП-релаксации).

---

\*Кафедра прикладной информатики, Московский авиационный институт, Москва, Россия. E-mail: <mao@mai2.rcnet.ru>, <mao@gnu.org>.

Если  $x^*$  является целочисленно допустимым решением, т. е. оптимальные значения всех целочисленных переменных являются целыми числами, то  $x^*$  одновременно является оптимальным решением задачи (1)–(2), поэтому процесс решения заканчивается. В противном случае найдется хотя бы одна целочисленная переменная, оптимальное значение которой (для ЛП-релаксации) является дробным. Понятно, что такой переменной может быть только базисная переменная, поскольку оптимальные значения всех небазисных переменных равны нулю, а значит, являются целыми числами. Итак, пусть такой переменной является целочисленная переменная  $(x_B)_i$ , причем  $(x_B)_i = \beta_i \notin \mathbf{Z}$ , т. е. требование целочисленности нарушено. Строка симплекс-таблицы (3), соответствующая выбранной базисной переменной, имеет вид:

$$(x_B)_i = \beta_i - \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j. \quad (5)$$

Поскольку симплекс-таблица (3) эквивалентна исходной системе ограничений-равенств  $Ax = b$ , то равенство (3), а значит, и равенство (5) должны выполняться для любого целочисленно допустимого решения  $x \in X$ . Отсюда следует, что условие:

$$\beta_i - \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j \in \mathbf{Z} \quad (6)$$

является правильным (valid) условием для  $X$ . Заметим, что  $\beta_i$  можно представить в виде суммы  $\beta_i = \lfloor \beta_i \rfloor + f(\beta_i)$ , где  $\lfloor \cdot \rfloor$  — целая часть числа,  $f(\cdot)$  — дробная часть числа. Поэтому условие (6) можно заменить следующим эквивалентным условием:

$$f(\beta_i) - \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

которое также является правильным для  $X$ .

Точка, в которой сумма  $\sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j$  равна нулю, не может принадлежать множеству  $X$ , поскольку значение  $\beta_i$  предполагается дробным. Это позволяет представить  $X$  в виде объединения двух непересекающихся множеств:

$$X = X^+ \cup X^-, \quad (8)$$

где

$$X^+ = \{x \in X : \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j > 0\}, \quad (9)$$

$$X^- = \{x \in X : \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j < 0\}. \quad (10)$$

Поскольку  $f(\beta_i) < 1$ , то неравенство:

$$f(\beta_i) - \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j < 1 \quad (11)$$

является правильным для  $X^+$ . Но тогда из (11) с учетом (7) следует, что неравенство:

$$f(\beta_i) - \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j \geq f(\beta_i) \quad (12)$$

также является правильным для  $X^+$ . Аналогично, так как  $\beta_i$  есть дробная величина, то  $f(\beta_i) > 0$ . Поэтому неравенство:

$$f(\beta_i) - \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j > 0 \quad (13)$$

является правильным для  $X^-$ , откуда с учетом (7) следует, что тогда неравенство:

$$f(\beta_i) - \sum_{j \in N} \alpha_{ij}(x_N)_j \geq 1 \Leftrightarrow \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)} \sum_{j \in N} (-\alpha_{ij})(x_N)_j \geq f(\beta_i) \quad (14)$$

также является правильным для  $X^-$ .

Далее нам потребуется следующая

**Т е о р е м а.** Пусть неравенство  $a^T x \geq b$  является правильным для множества  $P$ , а неравенство  $c^T x \geq d$  — правильным для множества  $Q$ . Тогда неравенство:

$$\sum_j \max(a_j, c_j)x_j \geq \min(b, d) \quad (15)$$

является правильным для множеств  $P \cup Q$  и  $\text{conv}(P \cup Q)$ .

Неравенство (12) является правильным для множества  $X^+$ , а неравенство (14) — правильным для множества  $X^-$ . Поэтому в соответствии с приведенной теоремой неравенство:

$$\sum_{j \in N} \max\left[\alpha_{ij}, \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)}(-\alpha_{ij})\right](x_N)_j \geq f(\beta_i) \quad (16)$$

является правильным для исходного смешанно-целочисленного множества  $X = X^+ \cup X^-$ . Так как  $0 < f(\beta_i) < 1$ , то  $f(\beta_i)/[1 - f(\beta_i)] > 0$ . Поэтому:

$$\max\left[\alpha_{ij}, \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)}(-\alpha_{ij})\right] = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} \geq 0 \\ \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)}(-\alpha_{ij}), & \text{если } \alpha_{ij} < 0 \end{cases} \quad (17)$$

что позволяет записать неравенство (16) в следующем виде:

$$\sum_{j \in N^+} |\alpha_{ij}|(x_N)_j + \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)} \sum_{j \in N^-} |\alpha_{ij}|(x_N)_j \geq f(\beta_i), \quad (18)$$

где  $N^+ = \{j \in N : \alpha_{ij} \geq 0\}$ ,  $N^- = \{j \in N : \alpha_{ij} < 0\}$ .

В оптимальной точке  $x^*$  (см. (4)) неравенство (18) нарушается, так как в этой точке  $x_N^* = 0$ , а  $f(\beta_i) > 0$ , поскольку значение базисной переменной  $(x_B^*)_i = \beta_i$  предполагается дробным. С другой стороны, неравенство (18) является правильным для множества допустимых решений  $X$  задачи (1)–(2). Следовательно, преобразуя указанное неравенство к виду равенства (введением переменной избытка) и добавляя его к исходной системе ограничений-равенств  $Ax = b$ , мы можем отсечь дробное решение  $x^*$  от смешанно-целочисленного множества  $X$ .

Неравенство (18) можно усилить следующим образом. Заметим, что это неравенство является следствием условия (7), которое не нарушится, если любой коэффициент  $\alpha_{ij}$  при *целочисленной* переменной  $(x_N)_j$  заменить коэффициентом  $\alpha_{ij} - \delta$ , где  $\delta$  — произвольное *целое* число. Если  $\alpha_{ij} - \delta \geq 0$ , то  $j \in N^+$ , и поэтому соответствующий коэффициент при  $(x_N)_j$  в неравенстве (18) будет равен  $|\alpha_{ij} - \delta|$ . Если же  $\alpha_{ij} - \delta < 0$ , то  $j \in N^-$ , и поэтому соответствующий коэффициент при  $(x_N)_j$  в неравенстве (18) будет равен  $f(\beta_i)/[1 - f(\beta_i)] \cdot |\alpha_{ij} - \delta|$ . Поскольку все коэффициенты в неравенстве (18) являются положительными, то для получения возможно более сильного отсечения необходимо сделать эти коэффициенты как можно меньше. Отсюда следует, что если  $\alpha_{ij} - \delta \geq 0$ , то наименьшее значение  $|\alpha_{ij} - \delta|$  получается при выборе  $\delta = \lfloor \alpha_{ij} \rfloor$  и равно  $f(\alpha_{ij})$ , а если  $\alpha_{ij} - \delta < 0$ , то наименьшее значение  $|\alpha_{ij} - \delta|$  получается при выборе  $\delta = \lceil \alpha_{ij} \rceil = \lfloor \alpha_{ij} \rfloor + 1$  и равно  $1 - f(\alpha_{ij})$  (в последнем случае  $\alpha_{ij}$  предполагается дробным). Таким образом, в качестве *наиболее подходящего* коэффициента при целочисленной переменной  $(x_N)_j$  в неравенстве (18) следует взять величину:

$$\min\left\{f(\alpha_{ij}), \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)}[1 - f(\alpha_{ij})]\right\}. \quad (19)$$

Чтобы придать формуле (19) более удобный вид, рассмотрим случай:

$$f(\alpha_{ij}) \leq \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)}[1 - f(\alpha_{ij})].$$

Поскольку  $f(\beta_i) < 1$ , то  $1 - f(\beta_i) > 0$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} f(\alpha_{ij})[1 - f(\beta_i)] &\leq f(\beta_i)[1 - f(\alpha_{ij})] \Leftrightarrow \\ f(\alpha_{ij}) - f(\alpha_{ij})f(\beta_i) &\leq f(\beta_i) - f(\beta_i)f(\alpha_{ij}) \Leftrightarrow \\ f(\alpha_{ij}) &\leq f(\beta_i). \end{aligned}$$

Таким образом, наиболее подходящий коэффициент при целочисленной переменной  $(x_N)_j$  равен:

$$\begin{cases} f(\alpha_{ij}), & \text{если } f(\alpha_{ij}) \leq f(\beta_i) \\ \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)}[1 - f(\alpha_{ij})], & \text{если } f(\alpha_{ij}) > f(\beta_i) \end{cases} \quad (20)$$

(Заметим, в частности, что если исходный коэффициент  $\alpha_{ij}$  является целочисленным, то наиболее подходящий коэффициент будет равен нулю.)

В результате усиления неравенства (18) за счет выбора наиболее подходящих коэффициентов при целочисленных переменных в соответствии с формулой (20) мы приходим к окончательному неравенству, которое называется *смешанно-целочисленным отсечением Гомори*:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_{\mathbf{Z}}^+} f(\alpha_{ij})(x_N)_j + \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)} \sum_{j \in N_{\mathbf{Z}}^-} [1 - f(\alpha_{ij})](x_N)_j + \\ \sum_{j \in N_{\mathbf{R}}^+} |\alpha_{ij}|(x_N)_j + \frac{f(\beta_i)}{1 - f(\beta_i)} \sum_{j \in N_{\mathbf{R}}^-} |\alpha_{ij}|(x_N)_j \geq f(\beta_i), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{Z}}^+ &= \{j \in N : (x_N)_j \in \mathbf{Z}, f(\alpha_{ij}) \leq f(\beta_i)\}, \\ N_{\mathbf{Z}}^- &= \{j \in N : (x_N)_j \in \mathbf{Z}, f(\alpha_{ij}) > f(\beta_i)\}, \\ N_{\mathbf{R}}^+ &= \{j \in N : (x_N)_j \in \mathbf{R}, \alpha_{ij} \geq 0\}, \\ N_{\mathbf{R}}^- &= \{j \in N : (x_N)_j \in \mathbf{R}, \alpha_{ij} < 0\}. \end{aligned} \quad (22)$$

(Следует отметить, что хотя неравенство (21) является более сильным, чем неравенство (18), величина нарушения этих неравенств в точке  $x^*$  одна и та же и равна  $f(\beta_i)$ .)

Р. Гомори показал<sup>1</sup>, что алгоритм решения смешанно-целочисленной задачи (1)–(2), основанный на последовательном добавлении отсечений вида (21) к исходной системе ограничений-равенств  $Ax = b$ , определяющих множество  $X$ , позволяет найти оптимальное решение указанной задачи за конечное число шагов (при условии, что  $c^T x \in \mathbf{Z}$  для всех  $x \in X$ ).

## 2 Дополнительные преобразования

Для вычисления строки симплекс-таблицы в пакете GLPK предусмотрена подпрограмма `glp_eval_tab_row`, которая возвращает результат в следующем формате:<sup>2</sup>

$$(x_B)_i = \sum_{j \in N} \xi_{ij}(x_N)_j. \quad (23)$$

Данный формат отличается от стандартного формата (5) тем, что здесь небазисные переменные могут иметь ненулевые нижние границы, конечные верхние границы, или иметь фиксированное значение. (Небазисные

<sup>1</sup>R. E. Gomory, An algorithm for the mixed integer problem, Technical Report RM-2597, RAND Corp., 1960.

<sup>2</sup>Подробнее см. справочное руководство по пакету GLPK.

переменные также могут быть свободными, т. е. неограниченными по знаку. Однако, если хотя бы одна такая переменная входит в строку симплекс-таблицы с ненулевым коэффициентом, соответствующая строка не используется для генерации отсечения.)

Переход от формата (23) к стандартному формату (5) выполняется следующим образом. Множество всех небазисных переменных  $N$  разбивается на три непересекающихся подмножества:

$$N = N_L \cup N_U \cup N_S, \quad (24)$$

где  $N_L$  — множество небазисных переменных, у которых активна нижняя граница,  $N_U$  — множество небазисных переменных, у которых активна верхняя граница,  $N_S$  — множество небазисных переменных, имеющих фиксированное значение. В зависимости от статуса (24) отдельной исходной небазисной переменной  $(x_N)_j$  используется следующая подстановка:

$$(x_N)_j = \begin{cases} (l_N)_j + y_j, & \text{если } j \in N_L \\ (u_N)_j - y_j, & \text{если } j \in N_U \\ (s_N)_j, & \text{если } j \in N_S \end{cases} \quad (25)$$

где  $y_j \geq 0$  — преобразованная небазисная переменная, заменяющая исходную небазисную переменную,  $(l_N)_j$  — нижняя граница исходной небазисной переменной,  $(u_N)_j$  — верхняя граница исходной небазисной переменной,  $(s_N)_j$  — фиксированное значение исходной небазисной переменной. Эта подстановка позволяет преобразовать строку симплекс-таблицы (23) к стандартному формату (5):

$$\begin{aligned} (x_B)_i &= \sum_{j \in N_L} \xi_{ij}(x_N)_j + \sum_{j \in N_U} \xi_{ij}(x_N)_j + \sum_{j \in N_S} \xi_{ij}(x_N)_j = \\ &= \sum_{j \in N_L} \xi_{ij}[(l_N)_j + y_j] + \sum_{j \in N_U} \xi_{ij}[(u_N)_j - y_j] + \sum_{j \in N_S} \xi_{ij}(s_N)_j = \\ &= \beta_i - \sum_{j \in N} \alpha_{ij}y_j, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -\xi_{ij}, & \text{если } j \in N_L \\ +\xi_{ij}, & \text{если } j \in N_U \\ 0, & \text{если } j \in N_S \end{cases} \quad (26)$$

$$\beta_i = \sum_{j \in N_L} \xi_{ij}(l_N)_j + \sum_{j \in N_U} \xi_{ij}(u_N)_j + \sum_{j \in N_S} \xi_{ij}(s_N)_j. \quad (27)$$

(Заметим, что стандартный формат (5) также предполагает неотрицательность базисной переменной  $(x_B)_i$ . Однако, поскольку в формуле отсечения (21) используется только дробная часть текущего значения этой переменной  $f(\beta_i)$ , преобразование  $(x_B)_i$  не требуется.)

Использование формулы (21) для коэффициентов (26) и (27) дает отсечение, выраженное в терминах преобразованных небазисных переменных:

$$\sum_{j \in N_L \cup N_U} \bar{\varphi}_j y_j \geq \bar{\rho}, \quad (28)$$

где  $\bar{\varphi}_j$  — коэффициенты отсечения,  $\bar{\rho} = f(\beta_i)$  — правая часть отсечения. Поэтому далее выполняется подстановка, обратная к (25):

$$y_j = \begin{cases} (x_N)_j + (l_N)_j, & \text{если } j \in N_L \\ (u_N)_j - (x_N)_j, & \text{если } j \in N_U \end{cases} \quad (29)$$

чтобы выразить полученное отсечение в терминах исходных небазисных переменных:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_L \cup N_U} \bar{\varphi}_j y_j \geq \bar{\rho} &\Rightarrow \\ \sum_{j \in N_L} \bar{\varphi}_j [(x_N)_j - (l_N)_j] + \sum_{j \in N_U} \bar{\varphi}_j [(u_N)_j - (x_N)_j] &\geq \bar{\rho}. \end{aligned}$$

Таким образом, отсечение принимает вид:

$$\sum_{j \in N_L \cup N_U} \varphi_j (x_N)_j \geq \rho, \quad (30)$$

где

$$\varphi_j = \begin{cases} +\bar{\varphi}_j, & \text{если } j \in N_L \\ -\bar{\varphi}_j, & \text{если } j \in N_U \end{cases} \quad (31)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \sum_{j \in N_L} \bar{\varphi}_j (l_N)_j - \sum_{j \in N_U} \bar{\varphi}_j (u_N)_j. \quad (32)$$

Среди небазисных переменных в неравенстве (30) могут быть как структурные, так и вспомогательные переменные, в то время как пакет GLPK допускает строки (ограничения), содержащие только структурные переменные. Чтобы привести неравенство (30) к формату GLPK, для каждой небазисной вспомогательной переменной  $(x_N)_j = (x_R)_i$ , входящей в это неравенство, выполняется подстановка:

$$(x_R)_i = \sum_j a_{ij} (x_S)_j, \quad (33)$$

где  $a_{ij}$  — коэффициенты  $i$ -й строки (ограничения) исходной задачи,  $(x_S)_j$  — соответствующие структурные переменные. В процессе выполнения указанной подстановки фиксированные структурные переменные, которые могут присутствовать в (33), не включаются в левую часть неравенства (30), а учитываются соответствующим изменением правой части этого неравенства.

После подстановки вспомогательных переменных отсечение (30) принимает окончательный вид, в котором оно может быть добавлено к формулировке исходной задачи.

