Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dr. Matthias Köppe, Gebäude 18, Raum 311

Sommersemester 2003

4. Übungsblatt

Computerorientierte Mathematik

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/coma-2003`

Abgabe der Übungsaufgaben: Donnerstag, 8. Mai, zu Beginn der Übung

Definition: Sei E eine endliche Menge. Ein *Unabhängigkeitssystem* auf der Grundmenge E ist ein Paar $(E, \mathcal{I})$, wobei $\mathcal{I}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen von E, die unter Teilmengenbildung abgeschlossen ist, d. h.

$$F' \subseteq F \in \mathcal{I} \quad \text{impliziert} \quad F' \in \mathcal{I}.$$

Die Elemente von $\mathcal{I}$ heißen *unabhängige Mengen*, die Elemente von $2^E \setminus \mathcal{I}$ heißen abhängige Mengen. Die inklusionsmaximalen unabhängigen Teilmengen B einer Menge $F \subseteq E$ heißen *Basen* von F. Die Basen von E bilden das *Basissystem* des Unabhängigkeitssystems $(E, \mathcal{I})$. Die inklusionsminimalen abhängigen Mengen $C \subseteq E$ heißen *Zirkuite*.

Definition: Sei $(E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem. Dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein *Matroid*, wenn gilt: Sei $F \subseteq E$; dann hat jede Basis B von F die gleiche Kardinalität.

13. Aufgabe **10 Punkte**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei $\mathcal{I} := \{ F \subseteq E : F \text{ ist ein Wald} \}$; dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei $\mathcal{I} := \{ F \subseteq E : E \setminus F \text{ enthält einen aufspannenden Baum für jede Komponente von } G \}$; dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid.

(c) Seien V ein Vektorraum, $n \in \mathbf{N}$ und $E = \{a^1, \dots, a^n\} \subseteq V$. Sei $\mathcal{I} = \{ F \subseteq E : F \text{ ist linear unabhängig} \}$. Dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid.

14. Aufgabe **5+5 Punkte**

(a) Formulieren Sie (in Pseudocode) einen Greedy-Algorithmus über einem Unabhängigkeitssystem (nach dem Vorbild des Greedy-Algorithmus zur Bestimmung gewichtsmaximaler Wälder). Das heißt: Gegeben ist ein Unabhängigkeitssystem $(E, \mathcal{I})$ und eine Funktion $c\colon E \to \mathbf{Q}$. Gesucht ist eine Menge $F \subseteq E$ mit maximalem Gewicht $\sum_{i \in F} c(i)$. Beachten Sie, daß diesmal auch negative Gewichte auftreten können.

(b) Beweisen Sie, daß Ihr Algorithmus korrekt ist, wenn $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid ist.