Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2002/2003
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dipl.-Math. Matthias Köppe

11. Übung zur Vorlesung

Ganzzahlige Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2002`
E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`
Abgabe: bis zum Freitag, 7. Februar

1. Aufgabe **(7 Punkte)**

(TDI-Beschreibung des Knapsacks mit Teilbarkeiten.) Seien $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ mit $a_j \big| a_{j+1}$ für $j = 1, \dots, n-1$. Zeigen Sie: Das folgende System ist TDI:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & \frac{a_2}{a_1}x_2 & + & \dots & + & \frac{a_n}{a_1}x_n & \leq & \lfloor \frac{b}{a_1} \rfloor \\
 & & x_2 & + & \dots & + & \frac{a_n}{a_2}x_n & \leq & \lfloor \frac{b}{a_2} \rfloor \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & x_n & \leq & \lfloor \frac{b}{a_n} \rfloor \\
-x_1 & & & & & & & \leq & 0 \\
 & & -x_2 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & -x_n & \leq & 0
\end{array}
$$

2. Aufgabe **(7 Punkte)**

Sei $P = \operatorname{conv}\left\{ \binom{0}{0}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0} \right\}$. Finden Sie eine TDI-Beschreibung von P, d. h. eine ganzzahlige Matrix $\mathbf{A}$ und einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{b}$, so daß $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ein TDI-System ist und $P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \right\}$ ist.

3. Aufgabe **(7 Punkte)**

Seien $G = (V, E)$ ein Graph ohne isolierte Knoten und

$$
\begin{aligned}
P &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{|E|} : x_i + x_j \leq 1 \text{ für } \{i, j\} \in E \right\}, \\
P_{\mathrm{I}} &= \operatorname{conv}\left\{ \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|} : x_i + x_j \leq 1 \text{ für } \{i, j\} \in E \right\}.
\end{aligned}
$$

Seien weiter

$$P^1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \lfloor \delta \rfloor \text{ für alle Stützhyperebenen } \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \delta \text{ von } P \text{ mit } \mathbf{c} \in \mathbf{Z}^n \right\}$$

(Definition 9.3) und

$$P_{\frac{1}{2}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \lfloor \delta \rfloor \text{ mit } \mathbf{c} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \text{ und } \delta = \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \text{ für alle } \mathbf{y} \in \{0, \tfrac{1}{2}\}^m \right\}.$$

(a) Gilt stets $P_{\frac{1}{2}} = P^1$?

(b) Sei G ein ungerader Kreis. Zeigen Sie, daß $P_{\frac{1}{2}} = P^1 = P_{\mathrm{I}}$.

4. Aufgabe **(7 Punkte)**

Sei $P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+m} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}$ mit $\mathbf{A} = (\, \mathbf{C} \mid 2\mathbf{I} \,)$ und $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}^{m \times n}$. Zeigen Sie, daß $P^1 = P_{\frac{1}{2}}$ gilt.