Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2002/2003
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dipl.-Math. Matthias Köppe

6. Übung zur Vorlesung
Ganzzahlige Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2002`
E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`

Abgabe: Mittwoch, **4. Dezember**, vor der Übung

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Seien $C = \operatorname{cone}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m\}$ mit $\mathbf{v}^i \in \mathbf{Z}^n$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel und H die ganzzahlige Basis von $S = C \cap \mathbf{Z}^n$. Für $\mathbf{h} \in H$ heißt die Zahl

$$h_C(\mathbf{h}) = \min\left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i : \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}^i,\ \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, m \right\}$$

die *Höhe* des Basiselements $\mathbf{h}$. Weiterhin sei

$$\gamma(C) = \max\{ h_C(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in H \}$$

die *Höhe* der ganzzahligen Basis H.

Zeigen Sie, daß $h_C(\mathbf{h}) < n$ für alle $\mathbf{h} \in H$ gilt, also $\gamma(C) < n$ ist.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

Seien $p \in \mathbf{Z}_+$ und

$$C = \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \right\}.$$

In der Vorlesung (Beispiel 7.4) wurde gezeigt, daß die ganzzahlige Basis H von $S = C \cap \mathbf{Z}^2$ gleich

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} : x \in \{0, \dots, p\} \right\}$$

ist.

Zeigen Sie, daß $h_C(\mathbf{h}) < 1$ für alle $\mathbf{h} \in H$ gilt.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Seien $r \in \mathbf{N}$ und

$$C = \operatorname{cone}\left\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^{n-1}, r\mathbf{e}^n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{e}^i\right\},$$

wobei $\mathbf{e}^i$ der i-te Einheitsvektor im $\mathbf{R}^n$ ist.

(a) Zeigen Sie, daß der Vektor $\mathbf{h} = (1, \ldots, 1)^\top$ ein Element der ganzzahligen Basis von $C \cap \mathbf{Z}^n$ ist.

(b) Berechnen Sie die Höhe $h_C(\mathbf{h})$.

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 7.8 (b) der Vorlesung:

Seien $\mathbf{A} \in \mathbf{Z}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^m$,

$$P = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n_+ : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \,\} \quad \text{und} \quad S = P \cap \mathbf{Z}^n.$$

Wenn ein endliches ganzzahliges Erzeugendensystem von S existiert, dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganzzahlige Basis von S.