Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2003/2004
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dr. Matthias Köppe

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Ganzzahlige Optimierung

http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2003
E-Mail: mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de

1. Aufgabe **(10 Punkte)**

Bringen Sie die folgende Matrix in ganzzahlige Normalform, indem Sie das Verfahren aus dem Existenzbeweis verwenden:

$$\begin{pmatrix} 60 & 12 & 24 & 30 \\ 2 & 10 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe **(10 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende „nichtnegative Variante“ des ganzzahligen Farkas-Lemmas:

> Die Menge $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ ist genau dann leer, wenn es einen *nichtnegativen* Vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{Q}_+^m$ mit $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} \in \mathbf{Z}^n$ und $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} \notin \mathbf{Z}$ gibt.

3. Aufgabe **(10 Punkte)**

Eine rationale Matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{Q}^{m\times n}$ ist in *Hermite-Normalform* (HNF), wenn sie die Gestalt $[\mathbf{B}, \mathbf{0}]$ hat, wobei $\mathbf{B} \in \mathbf{Q}_+^{m\times m}$ eine reguläre Matrix mit nichtnegativen Einträgen ist und in jeder Zeile der eindeutig bestimmte maximale Eintrag auf der Hauptdiagonalen sitzt.

Zeigen Sie:

(a) Jede rationale Matrix mit vollem Zeilenrang kann mit elementaren Spaltenoperationen in Hermite-Normalform gebracht werden.

(b) Die Hermite-Normalform einer Matrix ist eindeutig bestimmt. (Hinweis: Seien $[\mathbf{B}, \mathbf{0}]$ und $[\mathbf{B}', \mathbf{0}]$ zwei verschiedene Hermite-Normalformen der Matrix $\mathbf{A}$. Sei i minimal mit $B_{i,j} \neq B'_{i,j}$ für ein j. Betrachte nun den Gittervektor $\mathbf{B}_{\bullet,j} - \mathbf{B}'_{\bullet,j}$.)

4. Aufgabe **(10 Punkte)**

Beweisen Sie Proposition 7.1 (Eigenschaften der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung) der Vorlesung.

5. Aufgabe **(10 Punkte)**

Sei $L \subseteq \mathbf{R}^2$ ein Gitter, gegeben durch eine Basis $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2 \in \mathbf{R}^2$. Das folgende Verfahren heißt $60°$-*Algorithmus von Gauß*:

1. Sei $\|\mathbf{c}^1\| \leq \|\mathbf{c}^2\|$.
2. Setze $\mathbf{c}^2 \leftarrow \mathbf{c}^2 - \left[\frac{(\mathbf{c}^1)^\top \mathbf{c}^2}{\|\mathbf{c}^1\|^2}\right] \mathbf{c}^1$, wobei $[\cdot]$ Runden zur nächsten ganzen Zahl bedeutet.
3. Wenn $\|\mathbf{c}^2\| < \|\mathbf{c}^1\|$, so vertausche $\mathbf{c}^1$ und $\mathbf{c}^2$ und gehe zu 2.
4. Gib $\mathbf{b}^1 = \mathbf{c}^1$ und $\mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$ aus.

Zeigen Sie: Das Verfahren berechnet in endlich vielen Schritten eine Basis $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2$ von L mit den Eigenschaften:

(i) $\left|(\mathbf{b}^1)^\top \mathbf{b}^2\right| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{b}^1\|^2$,

(ii) $\|\mathbf{b}^1\| = \min\{\, \|\mathbf{b}\| : \mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in L \,\}$.

6. Aufgabe **(10 Punkte)**

Seien $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n \in \mathbf{R}^n$ linear unabhängig und $L = L(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n) \subseteq \mathbf{R}^n$. Zeigen Sie die *Hadamardsche Ungleichung*

$$\det L \leq \prod_{i=1}^{n} \|\mathbf{b}^i\|.$$

Zeigen Sie weiterhin: Diese Ungleichung ist genau dann mit Gleichheit erfüllt, wenn die Vektoren $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$ paarweise orthogonal sind.

7. Aufgabe **(10 Punkte)**

Berechnen Sie eine reduzierte Basis des Gitters $L = L(\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3)$, wobei

$$\mathbf{b}^1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 71 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^3 = \begin{pmatrix} 23 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

8. Aufgabe **(10 Punkte)**

Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{Z}^{m \times n}$ mit vollem Zeilenrang einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bestimmt. Verwenden Sie *nicht* die ganzzahlige Normalform. (Hinweis: Berechnen Sie eine reduzierte Basis für ein bestimmtes

Gitter, das etwas mit $\mathbf{A}$ zu tun hat, und zeigen Sie dann, daß $\mathbf{b}^1$ eine Lösung ist, indem Sie die Abschätzung für die Länge des ersten Basisvektors verwenden.)

9. Aufgabe **(10 Punkte)**

Das Problem der *simultanen diophantischen Approximation* lautet wie folgt:

> Gegeben seien rationale Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{Q}$, $0 < \epsilon < 1$ und eine ganze Zahl $N > 1$. Finde $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{Z}$ und $q \in \mathbf{N}$ mit $0 < q \leq N$, so daß gilt:
>
> $$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{\epsilon}{q} \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\},$$
>
> oder entscheide, daß eine solche Approximation nicht existiert.

Es wurde von Dirichlet (1842) gezeigt, daß es für $N \geq \epsilon^{-n}$ immer eine Lösung gibt. Das Problem ist aber NP-vollständig.

Zeigen Sie, daß es für $N \geq 2^{n(n+1)/4}\epsilon^{-n}$ einen Algorithmus gibt, der das Problem in polynomieller Zeit löst.