Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2003/2004
Prof. Dr. Robert Weismantel
Dr. Matthias Köppe

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Ganzzahlige Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/ip-2003`

E-Mail: `mkoeppe@mail.math.uni-magdeburg.de`

10. Aufgabe **(10 Punkte)**

Seien C ein spitzer polyedrischer Kegel, $C \cap \mathbf{Z}^n = S$ und $H = \{\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^m\}$ die ganzzahlige Basis von S. Sei $\mathbf{x} \in S$.

Zeigen Sie: Das lineare Optimierungsproblem

$$\max \sum_{i=1}^{m} \lambda_i : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{h}^i = \mathbf{x}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$$

ist zulässig und beschränkt, und es gibt eine Optimallösung λ^* mit höchstens n von Null verschiedenen Komponenten.

11. Aufgabe **(10 Punkte)**

Wir betrachten das IP

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in S = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \,\} \end{aligned} \tag{$*$}$$

mit $\mathbf{c} \in \mathbf{Z}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbf{Z}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^m$. Seien $O_1, \ldots, O_{2^m}$ die Orthanten des $\mathbf{R}^m$. Für $j \in \{1, \ldots, 2^m\}$ seien

$$C_j = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \in O_j \,\}$$

und H_j ein ganzzahliges Erzeugendensystem von $C_j \cap \mathbf{Z}^n$. Zeigen Sie, daß $\mathbf{x} \in S$ eine Optimallösung von $(*)$ genau dann ist, wenn für jeden Vektor $\mathbf{h} \in \bigcup_{j=1}^{2^m} H_j$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\mathbf{c}^\top \mathbf{h} \leq 0$,

(b) $\mathbf{c}^\top \mathbf{h} > 0$ und $\mathbf{x} + \mathbf{h} \notin S$.

12. Aufgabe **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, daß es für jedes $n \in \mathbf{N}$ einen rationalen polyedrischen Kegel $C \subseteq \mathbf{R}^n$ und einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{x} \in C \cap \mathbf{Z}^n$ gibt, so daß $n + \lfloor n/6 \rfloor$ Elemente der ganzzahligen

Basis von $C \cap \mathbf{Z}^n$ erforderlich sind, um $\mathbf{x}$ als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination darzustellen.

(Hinweis: Verwenden Sie das 6dimensionale Beispiel aus der Vorlesung.)

13. Aufgabe **(10 Punkte)**

Seien $C = \text{cone}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m\}$ mit $\mathbf{v}^i \in \mathbf{Z}^n$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel und H die ganzzahlige Basis von $S = C \cap \mathbf{Z}^n$. Für $\mathbf{h} \in H$ heißt die Zahl

$$h_C(\mathbf{h}) = \min\left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i : \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}^i,\ \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, m \right\}$$

die *Höhe* des Basiselements $\mathbf{h}$. Weiterhin sei

$$\gamma(C) = \max\{\, h_C(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in H \,\}$$

die *Höhe* der ganzzahligen Basis H.

Zeigen Sie, daß $h_C(\mathbf{h}) < n$ für alle $\mathbf{h} \in H$ gilt, also $\gamma(C) < n$ ist.

14. Aufgabe **(10 Punkte)**

Seien $p \in \mathbf{Z}_+$ und

$$C = \text{cone}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \right\}.$$

In der Vorlesung (Beispiel 7.4) wurde gezeigt, daß die ganzzahlige Basis H von $S = C \cap \mathbf{Z}^2$ gleich

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} : x \in \{0, \dots, p\} \right\}$$

ist.

Zeigen Sie, daß $h_C(\mathbf{h}) < 1$ für alle $\mathbf{h} \in H$ gilt.

15. Aufgabe **(10 Punkte)**

Seien $r \in \mathbf{N}$ und

$$C = \text{cone}\left\{ \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^{n-1}, r\mathbf{e}^n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{e}^i \right\},$$

wobei $\mathbf{e}^i$ der i-te Einheitsvektor im $\mathbf{R}^n$ ist.

(a) Zeigen Sie, daß der Vektor $\mathbf{h} = (1, \dots, 1)^\top$ ein Element der ganzzahligen Basis von $C \cap \mathbf{Z}^n$ ist.

(b) Berechnen Sie die Höhe $h_C(\mathbf{h})$.

16. Aufgabe **(10 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 7.8 (b) der Vorlesung:

Seien $\mathbf{A} \in \mathbf{Z}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^m$,

$$P = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n_+ : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \,\} \quad \text{und} \quad S = P \cap \mathbf{Z}^n.$$

Wenn ein endliches ganzzahliges Erzeugendensystem von S existiert, dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganzzahlige Basis von S.

17. Aufgabe **(10 Punkte)**

Berechnen Sie ein ganzzahliges Erzeugendensystem der Menge

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^4_+ : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \leq 2 \right\}.$$

18. Aufgabe **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, daß das folgende Problem NP-vollständig ist:

> Seien C ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel und $\mathbf{x} \in C \cap \mathbf{Z}^n$. Ist $\mathbf{x}$ eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von Elementen von $(C \cap \mathbf{Z}^n) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{x}\}$?

Anleitung: Es sei bekannt, daß das folgende *Zahlenpartitionierungsproblem* NP-vollständig ist:

> Sei $a_1, \dots, a_d$ natürliche Zahlen. Gibt es eine Menge $J \subseteq \{1, \dots, d\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$?

Es sei nun eine Instanz des Zahlenpartitionierungsproblems gegeben. Seien $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)^\top$, $b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d a_i$ und

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \{0,1\}^d : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b} \right\}.$$

Weiterhin seien C der spitze Kegel

$$C = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{d+1}_+ : \sum_{i=1}^{d} a_i x_i - b x_{n+1} = 0 \right\}$$

und $S = C \cap \mathbf{Z}^{d+1}$.

Zeigen Sie, daß $P \neq \emptyset$ genau dann ist, wenn der Vektor $\mathbf{h} = (1, \dots, 1, 2)^\top \in S$ eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von Elementen von $S \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{x}\}$ ist.

19. Aufgabe **(10 Punkte)**

(TDI-Beschreibung des Knapsacks mit Teilbarkeiten.) Seien $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ mit $a_j \big| a_{j+1}$ für $j = 1, \ldots, n-1$. Zeigen Sie: Das folgende System ist TDI:

$$
\begin{array}{rcccccccl}
x_1 & + & \frac{a_2}{a_1}x_2 & + & \ldots & + & \frac{a_n}{a_1}x_n & \leq & \lfloor \frac{b}{a_1} \rfloor \\
 & & x_2 & + & \ldots & + & \frac{a_n}{a_2}x_n & \leq & \lfloor \frac{b}{a_2} \rfloor \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & x_n & \leq & \lfloor \frac{b}{a_n} \rfloor \\
-x_1 & & & & & & & \leq & 0 \\
 & & -x_2 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & -x_n & \leq & 0
\end{array}
$$

20. Aufgabe **(10 Punkte)**

Sei $P = \operatorname{conv}\left\{ \binom{0}{0}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0} \right\}$. Finden Sie eine TDI-Beschreibung von P, d.h. eine ganzzahlige Matrix $\mathbf{A}$ und einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{b}$, so daß $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ein TDI-System ist und $P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \right\}$ ist.