Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Prof. Dr. Friedrich Juhnke
Dr. Matthias Köppe, Gebäude 18, Raum 311

Wintersemester 2003/2004

3. Übungsblatt

Lineare Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/opt1-2003`

Abgabe der Übungsaufgaben: bis Donnerstag, 6. November, zu Beginn der Übung

9. Aufgabe **(10 Punkte)**

Ein Papierfabrikant stellt Papierrollen mit einer Standardbreite von 105 cm und einer Länge von L cm her. Die Kunden verlangen jedoch Rollen der Länge L cm mit geringerer Breite.

Es liegen folgende Aufträge vor:

100 Rollen	25 cm breit,
125 Rollen	30 cm breit,
80 Rollen	35 cm breit.

Zur Erledigung der Aufträge werden Standardrollen zerschnitten. Zum Beispiel kann der Fabrikant aus einer Papierrolle mit Standardbreite zwei Rollen von je 35 cm Breite und eine Rolle von 30 cm Breite schneiden. Das ergibt einen Schnittverlust von $5L$ cm^2. Ziel des Fabrikanten ist die Minimierung der Schnittverluste für die vorliegenden Aufträge.

a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

b) Geben Sie es im MPS-Format in den Rechner ein, lösen Sie es mit GLPK und überprüfen Sie die Zulässigkeit der berechneten Lösung.

10. Aufgabe **(10 Punkte)**

Zeigen Sie: Für beliebige Mengen $A, B \subseteq \mathbf{R}^n$ gilt

$$\operatorname{conv}(A + B) = \operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B.$$

11. Aufgabe **(10 Punkte)**

Seien $M \subseteq \mathbf{R}^n$ und $\phi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, eine affin-lineare Abbildung. Zeigen Sie: Dann gilt

$$\operatorname{conv} \phi(M) = \phi(\operatorname{conv} M) \quad \text{und} \quad \operatorname{aff} \phi(M) = \phi(\operatorname{aff} M).$$

12. Aufgabe **(10 Punkte)**

Eine Menge $K \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt *Kegel*, wenn aus $\mathbf{x} \in K$, $\lambda \geq 0$ folgt: $\lambda\mathbf{x} \in K$.

Zeigen Sie:

a) Eine Menge $K \subseteq \mathbf{R}^n$ ist ein konvexer Kegel genau dann, wenn aus $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ und $\lambda \geq 0$ folgt: $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in K$, $\lambda\mathbf{x} \in K$.

b) Seien K_1, K_2 konvexe Kegel. Dann gilt $K_1 + K_2 = \operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)$.

13. Aufgabe **(10 Punkte)**

Seien $M \subseteq \mathbf{R}^n$ konvex und $\mathbf{x}^0 \in M$. Zeigen Sie: $\mathbf{x}^0$ ist Eckpunkt von M genau dann, wenn $M \setminus \{\mathbf{x}^0\}$ konvex ist.

14. Aufgabe **(10 Punkte)**

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbf{R}^n$. Der *von M erzeugte Kegel* (die *Kegelhülle von M*) ist definiert als

$$\operatorname{cone} M = \bigcap_{\substack{K \supseteq M \\ K \text{ konvexer Kegel}}} K.$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}\operatorname{cone} M &= \operatorname{conv} \operatorname{ray} M = \operatorname{ray} \operatorname{conv} M \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{a}^i : \mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^N \in M,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Dabei ist $\operatorname{ray} A = \{ \lambda\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A,\ \lambda \geq 0 \}$.

15. Aufgabe **(10 Punkte)**

Sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$ beliebig. Zeigen Sie:

a) Mit A ist auch $\operatorname{conv} A$ offen.

b) Mit A ist auch $\operatorname{conv} A$ beschränkt.

c) Mit A ist auch $\operatorname{conv} A$ kompakt.

d) Gilt auch: Mit A ist auch $\operatorname{conv} A$ abgeschlossen?