Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Prof. Dr. Friedrich Juhnke
Dr. Matthias Köppe, Gebäude 18, Raum 311

Wintersemester 2003/2004

# 4. Übungsblatt

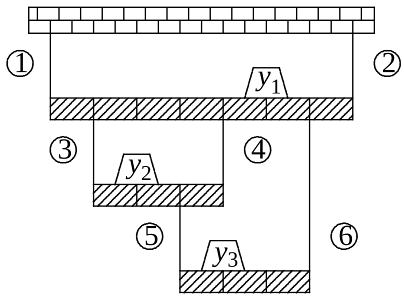
# Lineare Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/opt1-2003`

**Abgabe der Übungsaufgaben:** bis Donnerstag, 13. November, zu Beginn der Übung

**16. Aufgabe** **(10 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende Hängegerüst.




Die Kabel 1 und 2 können je 300 kg Last, die Kabel 3 und 4 je 100 kg und die Kabel 5 und 6 jeweils 50 kg Last tragen. Unter Vernachlässigung des Gewichtes der Kabel und der Bohlen soll das maximal zulässige Gesamtgewicht $y_1 + y_2 + y_3$ für die Lasten gefunden werden.

Beachten Sie, dass die Belastung der einzelnen Kabel sowohl von der Position der verschiedenen Gewichte auf der zugehörigen Bohle abhängig ist als auch von der Befestigungsposition der sich darunter befindlichen Kabelaufhängungen.

(a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm und lösen Sie es mit GLPK.

(b) Die Gewichte entsprechend der berechneten optimalen Lösung seien nun auf dem Gerüst plaziert. Gibt es jetzt noch eine Position auf dem Gerüst, auf die sich eine Person stellen könnte, ohne daß das Gerüst einstürzt? Arbeitsschutzrechtliche Fragen sind hierbei nicht zu berücksichtigen.

**17. Aufgabe** **(10 Punkte)**

Seien $K \subseteq \mathbf{R}^n$ ein konvexer Kegel und $\mathbf{x}^0$ ein Randpunkt von $K$. Zeigen Sie: Jede Stützhyperebene an $K$ in $\mathbf{x}^0$ verläuft durch die Kegelspitze $\mathbf{0}$.

**18. Aufgabe** **(10 Punkte)**

a) Zeigen Sie: Ist $C \subseteq \mathbf{R}^n$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge, dann ist auch der zugehörige Rezessionskegel

$$R(C) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \in C \quad \forall \mathbf{x} \in C,\ \lambda \geq 0 \right\}$$

abgeschlossen.

b) Geben Sie ein Beispiel einer nichtabgeschlossenen konvexen Menge an, deren Rezessionskegel ebenfalls nichtabgeschlossen ist.

**19. Aufgabe** **(10 Punkte)**

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbf{R}^n$ eine konvexe polyedrische Menge. Zeigen Sie:

$$\operatorname{ext} M = \emptyset \iff M \text{ enthält eine Gerade.} \tag{$*$}$$

Hierbei ist ext $M$ die Menge der Eckpunkte von $M$.

*Hinweis:* Benutzen Sie die äußere Darstellung von $M$ als

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}^1\mathbf{x} = \mathbf{b}^1, \mathbf{A}^2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^2 \right\}$$

und zeigen Sie zunächst: $M$ enthält eine Gerade genau dann, wenn $\begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \end{pmatrix}$ keinen vollen Spaltenrang besitzt. Für den Beweisteil „$\Rightarrow$“ von $(*)$ wählen Sie ein $\mathbf{x}^0$ mit maximaler Anzahl aktiver Restriktionen; unter der Annahme, daß $M$ keine Gerade enthält, führt dies zu einem Widerspruch.

**20. Aufgabe** **(10 Punkte)**

Das Polyeder $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}$ sei gegeben durch:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ graphisch dar und bestimmen Sie alle Ecken.

b) Formen Sie $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ in ein Polyeder der Normalform

$$P^{=}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n_+ : \bar{\mathbf{A}}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{b}} \right\}$$

um.

c) Bestimmen Sie alle regulären (3,3)-Untermatrizen von $\bar{\mathbf{A}}$.

d) Berechnen Sie alle Basislösungen und ordnen Sie diese den Ecken zu.
Welche Ecken bzw. Basislösungen sind entartet, welche sind zulässig?